

Anna DOMAŃSKA, Przemysław GRZAŚLEWICZ

POLITECHNIKA POZNAŃSKA, KATEDRA SYSTEMÓW TELEKOMUNIKACYJNYCH I OTPOELEKTRONIKI,
ul. Polanka 3, 60-965 Poznań

Efektywność estymacji parametrów sygnału harmonicznego metodą wielopunktowej interpolowanej DFT

Dr hab. inż. Anna DOMAŃSKA

Absolwentka Wydziału Elektrycznego Politechniki Poznańskiej i Wydziału Mat-Fiz-Chem Uniwersytetu Wrocławskiego. Stopień doktora i doktora habilitowanego uzyskała na WE PP. Główne zainteresowania naukowe dotyczą systemów pomiarowych z cyfrowym algorytmem pomiaru oraz teorii i zastosowań konwersji a-c z sygnałem ditherowym. Jest członkiem Komitetu Metrologii i Aparatury Naukowej PAN.



e-mail: domanska@et.put.poznan.pl

Mgr inż. Przemysław GRZAŚLEWICZ

Absolwent Wydziału Elektroniki i Telekomunikacji Politechniki Poznańskiej. (2012, kierunek: Elektronika i Telekomunikacja). Obecnie uczestnik studiów doktoranckich Communication Technologies, na WEiT PP. Główne zainteresowania dotyczą cyfrowego przetwarzania sygnałów i algorytmów zaawansowanej analizy sygnałów pomiarowych.



e-mail: grzadkabeetlen@tlen.pl

Streszczenie

Artykuł dotyczy zagadnienia estymacji widma sygnałów periodycznych metodą DFT z dodatkowym przetwarzaniem – zastosowaniem okna oraz interpolacją dwu i trzy punktową. Przedstawiono zasadę takiej estymacji w przypadku okna prostokątnego i Hanninga oraz zanalizowano efektywność każdego z wariantów. Przedstawiono interfejs programu, wykonany w celu zobrazowania i śledzenia graficznych i liczbowych wyników estymacji. Program i graficzny interfejs użytkownika mogą mieć zastosowanie w wirtualnym analizatorze widma o podwyższonej dokładności. W artykule tym przedstawiono dwie metody estymacji częstotliwości i amplitudy. Obie metody używały okien Hanninga i prostokątnego. Okazało się metoda trzy punktowej estymacji WMIpDFT osiąga lepsze rezultaty, posługując się kryterium wartości błędu bezwzględnego. Wartości te są mniejsze niż w przypadku stosowania metody estymacji dwu punktowej IpDFT. Jednak użycie prostokątnego okna w trzy punktowej estymacji generuje mniejszy błąd. Dla efektywnej estymacji amplitudy lepszym okazuje się zastosowanie okna Hanninga dla obu metod estymacji. Najmniejszy bezwzględny błąd jest otrzymywany dla estymacji amplitudy z wykorzystaniem dwupunktowej estymacji IpDFT oraz okna Hanninga.

Słowa kluczowe: okno Hanninga, DFT, interpolacja.

Efficiency of the Multipoint Interpolated DFT method in harmonic signal parameter estimation

Abstract

The paper deals with estimation of periodic signal spectra using the DFT method with additional processing (application of time window and two-point and three-point interpolation). The efficiency of estimation with the rectangular and Hanning window is analyzed. There is presented a program interface created for tracking graphical and numerical results of estimation. The graphical interface and the simulation program can be used in a high precision spectrum analyzer. In this paper two methods of frequency and amplitude estimation are discussed. Both methods use the Hanning and rectangular window. It turns out that the three-point WMIpDFT method gives better results, using the absolute error value criterion. The values of the absolute error are smaller than those in case of using the two-point IpDFT. However, use of rectangular window in the three-point estimation creates a lower error value. For the effective amplitude estimation it is better to use the Hanning window for both methods. The lowest absolute error value is obtained for the amplitude estimation with use of the two-point IpDFT method with the Hanning window.

Keywords: Hanning window, DFT, interpolation.

1. Wstęp

Dyskretna Transformata Fouriera – DFT, jest narzędziem umożliwiającym, na podstawie skończonego zbioru próbek, estymację skończonego zbioru wartości widmowych. Tylko w szczególnym przypadku - sygnału periodycznego i próbkowania

koherentnego, położenie estymowanych wartości widmowych pokrywa się ze składowymi harmonicznymi sygnału. W pozostałych przypadkach (sygnał periodyczny, próbkowanie niekoherentne) rezultatem DFT jest widmo rozmyte z powodu przecieku i o rozdzielczości zależnej od częstotliwości próbkowania oraz liczby próbek. Uzyskuje się reprezentację widma analizowanego sygnału analogowego o ograniczonej adekwatności a więc trudną do interpretacji. Nie jest możliwe dokładne bezpośrednie określenie właściwej wartości oraz częstotliwości elementów widma pierwotnego sygnału analogowego.

Poprawę dokładności określenia wartości elementów widma przynosi zastosowanie odpowiedniego okna wycinającego innego niż prostokątne, redukującego przeciek. Często stosuje się w tym celu okno Hanninga. Cechuje się ono znacznym tłumieniem listków bocznych, ale z powodu relatywnie dużej szerokości listka głównego daje umiarkowany wzrost tej dokładności, zwłaszcza w przypadku sygnału o większej liczbie składowych harmonicznym. Dokładność określenia częstotliwości elementów widma pozostaje przy tym bez zmian.

Poprawę dokładności określenia częstotliwości elementów widma można uzyskać w wyniku zastosowania wielopunktowej interpolowanej Dyskretnej Transformaty Fouriera (Multipoint Interpolated Discrete Fourier Transform - MIpDFT).

Jednocześnie poprawę dokładności określenia wartości oraz częstotliwości elementów widma można osiągnąć stosując okna oraz interpolację. MIpDFT w połączeniu z zastosowaniem okna nazywa się ważoną MIpDFT (Weighted Multipoint Interpolated Discrete Fourier Transform - WMIpDFT).

W artykule porównuje się możliwości poprawy dokładności analizy widmowej w przypadku dwupunktowej i trypunktowej WMIpDFT. Dodatkowo przedstawiono wykonany w tym celu graficzny interfejs programu, umożliwiający zobrazowanie i śledzenie graficznych i liczbowych wyników estymacji. Program wraz z interfejsem, mogą mieć zastosowanie w wirtualnym analizatorze widma o podwyższonej dokładności. Warunkiem stosowalności metody WMIpDFT jest spełnienie warunku Nyquista dla sygnałów okresowych.

2. Dwupunktowa WMIpDFT

W metodzie dwupunktowej wartość amplitudy i częstotliwości estymuje się na podstawie dwóch największych prążków, które zawierają się w listku głównym. Algorytm estymacji, przy wykorzystaniu okna czasowego prostokątnego zaproponował Jain [1] natomiast Grandke [2] zaproponował algorytm z wykorzystaniem okna Hanninga.

Metodę sprawdzono przy założeniu, że: wycinek czasowy zawiera 20 lub więcej okresów sygnału a liczba pobranych próbek jest większa lub równa 1024, czyli w przypadku próbkowania niekoherentnego z nadpróbkowaniem.

Ogólna zależność określająca estymowaną częstotliwość ma postać [1, 2]:

$$f = \lambda \Delta f = (k + \delta) \frac{1}{N \Delta t} \quad (1)$$

gdzie: f – częstotliwość sygnału, λ – liczba okresów sygnału, Δf – rozdzielczość analizy DFT, k – wartość całkowita liczby λ , δ – wartość ułamkowa liczby λ , N – liczba próbek sygnału, Δt – odstęp czasowy pomiędzy sąsiednimi próbkami

Wzór, z którego wyznacza się wartość parametru δ , zależy od rodzaju okna.

a. Estymacja częstotliwości

W przypadku okna prostokątnego parametr δ jest określony następująco [1]:

$$\delta = \frac{\alpha}{\alpha + 1} \quad (2)$$

gdzie:

$$0 \leq \delta \leq 1 \quad (3)$$

i

$$\alpha = \frac{|S(k+1)|}{|S(k)|} \quad (4)$$

gdzie: $S(k+1)$ i $S(k)$ – prążki widma o maksymalnej wartości.

W przypadku zastosowania okna Hanninga parametr δ przyjmuje postać [2]:

$$\delta = \frac{2\alpha - 1}{\alpha + 1} \quad (5)$$

gdzie: α – jest określone przez (4)

b. Estymacja amplitudy

Estymator amplitudy dla okna prostokątnego ma postać [1]:

$$A = \frac{2\pi\delta}{N} \frac{|S(k)|}{|\sin(\pi\delta)|} \quad (6)$$

gdzie: A – amplituda, $S(k)$ – magnituda największego prążka widma z listka głównego, k – numer prążka.

W przypadku gdy $S(k+1) > S(k)$ zamiast (6) stosowany jest wzór [1]:

$$A = \frac{2\pi(1-\delta)}{N} \frac{|S(k+1)|}{|\sin(\pi(1-\delta))|} \quad (7)$$

Estymator w przypadku zastosowania okna Hanninga [2]:

$$A = \frac{2\pi\delta(1-\delta)}{\sin(\pi\delta)} e^{-\pi j\delta} (1+\delta)S(k) \quad (8)$$

gdzie: j – jednostka urojona ($j^2 = -1$).

W przypadku gdy $S(k+1) > S(k)$ zamiast (8) stosuje się wzór [2]:

$$A = \frac{2\pi\delta(1-\delta)}{\sin(\pi\delta)} e^{-\pi j\delta} (\delta-2)S(k+1) \quad (9)$$

3. Trzypunktowa WMlpDFT

W metodzie trzypunktowej dokładną wartość amplitudy i częstotliwości estymuje się na podstawie trzech największych prążków, które zawierają się w listku głównym.

a. Estymacja częstotliwości

W metodzie trzypunktowej estymowana częstotliwość jest także określona zależnością (1). Istotną różnicą jest zakres zmian parametru δ [3, 4]:

$$-0,5 < \delta \leq 0,5 \quad (10)$$

Parametr ten dla okna prostokątnego jest określony następująco [3, 4]:

$$\delta \approx s_\delta \frac{[|S(k+1)| + |S(k-1)|]}{2|S(k)| + [|S(k+1)| - |S(k-1)|]} \quad (11)$$

gdzie: $s_\delta = \text{sign}(|S(k+1)| - |S(k-1)|)$, $S(k-1)$, $S(k)$, $S(k+1)$ – największe prążki widma

Natomiast w przypadku okna Hanninga zależność przyjmuje postać [3, 4]:

$$\delta \approx 2 \frac{[|S(k+1)| - |S(k-1)|]}{|S(k-1)| + 2|S(k)| + |S(k+1)|} \quad (12)$$

b. Estymacja amplitudy

W metodzie trzypunktowej estymowana amplituda jest określona zależnością [3, 4]:

$$A \approx 2 \frac{[|S(k-1)| + 2|S(k)| + |S(k+1)|]}{|W(1+\delta)| + 2|W(\delta)| + |W(1-\delta)|} \quad (13)$$

gdzie: $W()$ – wartość magnitudy DFT zastosowanego okna czasowego.

Dla okna Hanninga zależność ta przyjmuje postać [3]:

$$A \approx \frac{\pi\delta(1-\delta^2)(4-\delta^2)}{6\sin(\pi\delta)} [|S(k-1)| + 2|S(k)| + |S(k+1)|] \quad (14)$$

4. Efektywność estymacji parametrów metodą WMlpDFT

Ocenę i porównanie efektywności metody dwupunktowej i trzypunktowej przeprowadzono dla następującego przypadku:

- sygnał wejściowy: sinusoidalny
- częstotliwość sygnału: 10Hz
- częstotliwość próbkowania: 1000Hz
- liczba okresów generowanego sygnału: 20

Regulowanym parametrem wpływającym na siłę przecieku widma jest nieciągłość na końcu odcinka czasowego generowanego sygnału. Modelowanie tej nieciągłości jest realizowane poprzez dodanie do k okresów sygnału dodatkowej ułamkowej wartości okresu.

$$T_{OBS} = kT + \alpha T = (k + \alpha)T \quad (15)$$

gdzie: T_{OBS} – okres obserwacji sygnału, k – liczba okresów generowanego sygnału, T – okres sygnału, α – wartość ułamkowa, siła niekoherentnego próbkowania.

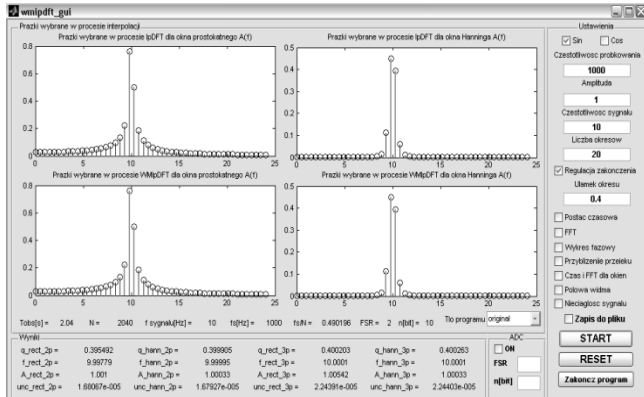
Jako kryterium oceny efektywności estymacji przyjęto błąd bezwzględny pomiędzy wartością estymowaną a wartością rzeczywistą:

$$\varepsilon = \left| v_{\text{estymowana}} - v_{\text{rzeczywista}} \right| \quad (16)$$

gdzie: ε – wartość błędu bezwzględnego, $v_{\text{estymowana}}$ – wartość estymowana, $v_{\text{rzeczywista}}$ – wartość rzeczywista.

Wyniki zestawiono w tabeli 1 i tabeli 2.

W celu zobrazowania i śledzenia graficznych i liczbowych wyników estymacji wykonano interfejs programu przedstawiony na rys. 1.



Rys. 1. Interfejs programu
Fig. 1. Program interface

Tab. 1. Wartość błędu bezwzględnego estymowanej częstotliwości w funkcji siły niekoherentnego próbkowania

Tab. 1. The absolute error value of the estimated frequency as a function of the noncoherent sampling strength

Wartość różnicy estymowanej wartości częstotliwości w funkcji siły niekoherentnego próbkowania				
Siła niekoherentnego próbkowania α	2p IpDFT		3p WMpDFT	
	okno prostokątne	okno Hanninga	okno prostokątne	okno Hanninga
0.1	0,000900	0,000200	0,000020	0,000000
0.2	0,000700	0,000150	0,000000	0,000100
0.3	0,000620	0,000100	0,000100	0,000100
0.4	0,002210	0,000050	0,000100	0,000100
0.5	0,002970	0,000000	0,000100	0,000160
0.6	0,002400	0,000100	0,000090	0,000130
0.7	0,000920	0,000100	0,000060	0,000090
0.8	0,000500	0,000100	0,000010	0,000060
0.9	0,000800	0,000200	0,000000	0,000030

Tab. 2. Wartość błędu bezwzględnego estymowanej amplitudy w funkcji siły niekoherentnego próbkowania

Tab. 2. The absolute error value of the estimated amplitude as a function of the noncoherent sampling strength

Wartość różnicy estymowanej wartości amplitudy w funkcji siły niekoherentnego próbkowania				
Siła niekoherentnego próbkowania α	2p IpDFT		3p WMpDFT	
	okno prostokątne	okno Hanninga	okno prostokątne	okno Hanninga
0.1	0,001485	0,000440	0,001926	0,000440
0.2	0,000831	0,000690	0,005030	0,000390
0.3	0,000560	0,000350	0,001520	0,003500
0.4	0,001000	0,000330	0,005420	0,000330
0.5	0,000180	0,000320	0,007740	0,000320
0.6	0,000764	0,000330	0,005270	0,000330
0.7	0,000618	0,000350	0,001865	0,000350
0.8	0,005600	0,000380	0,001010	0,000380
0.9	0,001290	0,000420	0,001660	0,000420

5. Wnioski

- Lepszą metodą przy estymacji częstotliwości jest metoda 3p WMpDFT (tabela 1) ze względu na kryterium wartości błędu bezwzględnego. Wartości te są niższe niż w przypadku stosowania metody 2p IpDFT.
- Mniejszy błąd przy estymacji częstotliwości 3p otrzymuje się wykorzystując okno prostokątne
- W przypadku estymacji amplitudy korzystniejszym rozwiązaniem jest wykorzystanie metod estymacji z oknem Hanninga 2p oraz 3p.
- Najmniejszy błąd w estymacji amplitudy dla okna Hanninga osiągnięty jest przy zastosowaniu metody 2p IpDFT

6. Literatura

- [1] Jain V., Collins W., Davis D.: High-accuracy analog measurements via interpolated FFT, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 28, no. 2, June 1979.
- [2] Grandke T.: Interpolation algorithms for discrete Fourier Transform of weighted signals, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 32, no. 2, June 1983.
- [3] Agrež D.: Weighted multipoint interpolated DFT to improve amplitude estimation of multifrequency signal, IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 51, no. 2, April 2002.
- [4] Bellegra D., Dallet D.: Frequency estimation via weighted multipoint interpolated DFT, IET Science, Measurement Technology, vol. 2, no. 1, January 2008.

otrzymano / received: 18.02.2013

przyjęto do druku / accepted: 01.04.2013

artykuł recenzowany / revised paper

INFORMACJE

Informacja redakcji dotycząca artykułów współautorskich

W miesięczniku PAK od numeru 06/2010 w nagłówkach artykułów współautorskich wskazywany jest autor korespondujący (Corresponding Author), tj. ten z którym redakcja prowadzi wszelkie uzgodnienia na etapie przygotowania artykułu do publikacji. Jego nazwisko jest wyróżnione drukiem pogrubionym. Takie oznaczenie nie odnosi się do faktycznego udziału współautora w opracowaniu artykułu. Ponadto w nagłówku artykułu podawane są adresy korespondencyjne wszystkich współautorów.

Wprowadzona procedura wynika z międzynarodowych standardów wydawniczych.