

Damian SZUBARTOWSKI¹

ZAGADNIENIE ZAKRZYWIONEJ ANIZOTROPOWEJ ORAZ FUNKCJONALNIE GRADOWANEJ POWŁOKI PODDANEJ DZIAŁANIU POLA TEMPERATURY

Praca dotyczy problematyki zakrzywionej powłoki wykonanej z anizotropowego materiału o funkcyjnej gradacji. W rachunku wykorzystano koncepcję tensora krzywizny Riemanna-Christoffela wzbogaconą o wpływ pola temperatury przez obecność tensora właściwości termicznych. W ramach wykonanych obliczeń różnica wektora poddanego koneksji afinicznej wzdłuż infinitezimalnego czworokąta wyraża się, zależnie od drogi przejścia, sumą zarówno efektu geometrycznego, reprezentowanego tensorem krzywizny Riemanna-Christoffela, jak również efektu termicznego wyrażonego przez symbol krzywizny termicznej.

Słowa kluczowe: materiał funkcjonalnie gradientowy, termosprężystość

1. Wprowadzenie

Budowana teoria stanowi podejście Riemanna Christoffela, opierające się na ogólnie rozumianym przesunięciu równoległym wektora wzdłuż infinitezimalnego czworokąta (por. [1]). Nowością jest natomiast doszacowanie wpływu pola temperatury, którego obecność objawia się w przyroście wektora bazowego według wzoru:

$$de_i = (\Gamma_{ik}^j dx^k + \alpha_i^j dT) e_j \quad (1)$$

Oznacza to, że lokalny reper przy przejściu do nieskończenie bliskiego punktu sąsiedniego doznaje przyrostów wektorów bazowych zarówno z uwagi na pierwotnie posiadaną krzywiznę, jak i jej modyfikację związaną z obecnością właściwości termicznych oraz pola temperatury. W rachunku Γ_{ik}^j oznacza symbol Christoffela drugiego rodzaju, natomiast α_i^j stanowi tensor rozszerzalności termicznej.

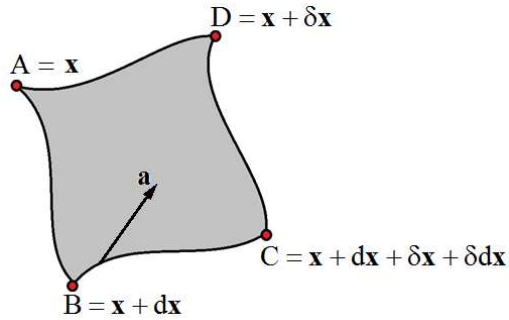
¹ Autor do korespondencji/corresponding author: Damian Szubartowski, Politechnika Krakowska, al. Jana Pawła II 37, 31-864 Kraków, tel.: (12) 3743370, e-mail: damian.szubartowski@pk.edu.pl

Przyrost kontrawariantnego wektora poddanego przesunięciu równoległemu można wyrazić jako:

$$da^j = -a^i (\Gamma_{ik}^j dx^k + \alpha_i^j dT) \quad (2)$$

2. Koneksja afiniczna wektora kontrawariantnego wzdłuż infinitezymalnego czworokąta

Rozważmy nieskończenie mały czworokąt ABCD rozpięty na zakrzywionej powierzchni zgodnie z rys. 1.



Rys. 1. Infinitezymalny czworokąt ABCD

Fig. 1. Infinitesimal quadrangle ABCD

Boki wielokąta zostaną oznaczone kolejno przez:

$$\begin{aligned} A &= (x^1, \dots, x^n) = \mathbf{x} \\ (A \rightarrow B) &\Rightarrow B = \mathbf{x} + d\mathbf{x} \\ (A \rightarrow D) &\Rightarrow D = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} \\ (B \rightarrow C') &\Rightarrow C' = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \delta(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + \delta d\mathbf{x} \\ (D \rightarrow C'') &\Rightarrow C'' = \mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + d(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + d\delta\mathbf{x} \\ \text{jeżeli: } \delta d\mathbf{x} &= d\delta\mathbf{x} \text{ (przestrzeń Riemannowska)} \Leftrightarrow C' = C'' = C = \mathbf{x} + d\mathbf{x} + \delta\mathbf{x} + \delta d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3)$$

Można dokonać przesunięcia równoległego wektora \mathbf{a} z punktu A przez B do C oraz z punktu A przez D do C. Różnica wektorów przesuwanych równolegle wspomnianymi drogami stanowi pewną miarę krzywizny, zgodnie z następującym rachunkiem:

$$\begin{aligned}
& A \rightarrow a_A^j = a^j \\
& (A \rightarrow B) \Rightarrow B \rightarrow a_{A \rightarrow B}^j = a^j - a^i (\Gamma_{ik}^j dx^k + \alpha_i^j dT) \\
& (B \rightarrow C) \Rightarrow C \rightarrow a_{B \rightarrow C}^j = a^j - a^i (\Gamma_{ik}^j dx^k + \alpha_i^j dT) + \delta[a^j - a^i (\Gamma_{ik}^j dx^k \\
& + \alpha_i^j dT)] = a^j - \Gamma_{ik}^j a^i dx^k - a^i \Gamma_{ik}^j \delta x^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} a^i dx^k \delta x^l + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{ik}^j a^l dx^k \delta x^m \\
& - \Gamma_{ik}^j a^i \delta dx^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} a^i dx^k \delta T + \alpha_i^j a^l \Gamma_{ik}^j dx^k \delta T - a^i \alpha_i^j dT - a^i \alpha_i^j \delta T - \\
& \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} a^i dT \delta x^k - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial T} a^i dT \delta T + \Gamma_{lm}^i \alpha_i^j a^l \delta x^m dT + \alpha_i^j \alpha_i^l a^l dT \delta T - \alpha_i^j a^i \delta dT \\
& (A \rightarrow D) \Rightarrow D \rightarrow a_{A \rightarrow D}^j = a^j - a^i (\Gamma_{ik}^j \delta x^k + \alpha_i^j \delta T) \\
& (D \rightarrow C) \Rightarrow C \rightarrow a_{D \rightarrow C}^j = a^j - a^i (\Gamma_{ik}^j \delta x^k + \alpha_i^j \delta T) + d[a^j - a^i (\Gamma_{ik}^j \delta x^k \\
& + \alpha_i^j \delta T)] = a^j - \Gamma_{ik}^j a^i \delta x^k - \Gamma_{ik}^j a^i dx^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} a^i \delta x^k dx^l + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{ik}^j a^l \delta x^k dx^m \\
& - \Gamma_{ik}^j a^i d \delta x^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} a^i \delta x^k dT + \Gamma_{ik}^j a^l \alpha_i^l \delta x^k dT - a^i \alpha_i^j \delta T - a^i \alpha_i^j dT \\
& - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} a^i dx^k \delta T - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial T} a^i \delta T dT + \alpha_i^j \Gamma_{lm}^i a^l dx^m \delta T + \alpha_i^j \alpha_i^l a^l \delta T dT - \alpha_i^j a^i d \delta T \\
& a_{B \rightarrow C}^j - a_{D \rightarrow C}^j = \Delta a^j = a^j - \Gamma_{ik}^j a^i dx^k - a^i \Gamma_{ik}^j \delta x^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} a^i dx^k \delta x^l \\
& + \Gamma_{lm}^i \Gamma_{ik}^j a^l dx^k \delta x^m - \Gamma_{ik}^j a^i \delta dx^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} a^i dx^k \delta T - a^j + \Gamma_{ik}^j a^i \delta x^k + \Gamma_{ik}^j a^i dx^k \\
& + \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} a^i \delta x^k dx^l - \Gamma_{lm}^i \Gamma_{ik}^j a^l \delta x^k dx^m + \Gamma_{ik}^j a^i d \delta x^k + \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} a^i \delta x^k dT \\
& + \alpha_i^j a^l \Gamma_{ik}^j dx^k \delta T - a^i \alpha_i^j dT - a^i \alpha_i^j \delta T - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} a^i dT \delta x^k - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial T} a^i dT \delta T \\
& + \Gamma_{lm}^i \alpha_i^j a^l \delta x^m dT + \alpha_i^j \alpha_i^l a^l dT \delta T - \alpha_i^j a^i \delta dT - \Gamma_{ik}^j a^l \alpha_i^l \delta x^k dT + a^i \alpha_i^j \delta T \\
& + a^i \alpha_i^j dT + \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} a^i dx^k \delta T + \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial T} a^i \delta T dT - \alpha_i^j \Gamma_{lm}^i a^l dx^m \delta T - \alpha_i^j \alpha_i^l a^l \delta T dT \\
& + \alpha_i^j a^i d \delta T = -\Gamma_{ik}^j a^i dx^k - \Gamma_{ik}^j a^i \delta x^k - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} a^i dx^k \delta x^l + \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j a^i dx^k \delta x^l \\
& - \Gamma_{ik}^j a^i \delta dx^k
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} a^i dx^k \delta T + \Gamma_{ik}^j a^i \delta x^k + \Gamma_{ik}^j a^i dx^k + \frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^k} a^i dx^k \delta x^l - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j a^i dx^k \delta x^l \\
& + \Gamma_{ik}^j a^i d\delta x^k + \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} a^i \delta x^k dT + \Gamma_{ik}^j \alpha_i^l a^l dx^k \delta T - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} a^i \delta x^k dT \\
& + \Gamma_{lm}^i \alpha_i^l a^l \delta x^m dT - \Gamma_{ik}^j \alpha_i^l a^l \delta x^k dT + \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} a^i dx^k \delta T - \Gamma_{lm}^i \alpha_i^l a^l dx^m \delta T \\
& = \left(\frac{\partial \Gamma_{il}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial x^l} + \Gamma_{il}^m \Gamma_{mk}^j - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{ml}^j \right) a^i dx^k \delta x^l + \left(\frac{\partial \Gamma_{ik}^j}{\partial T} - \frac{\partial \alpha_i^j}{\partial x^k} + \Gamma_{ik}^l \alpha_l^j \right. \\
& \left. - \Gamma_{ik}^j \alpha_l^l \right) a^i (\delta x^k - dx^k) dT
\end{aligned}$$

gdzie:

$$\frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{ij}^l}{\partial x^k} + \Gamma_{mj}^l \Gamma_{ik}^m - \Gamma_{mk}^l \Gamma_{ij}^m = R_{ijk}^l \quad (5)$$

stanowi tensor krzywizny Riemana-Christoffela, natomiast

$$\frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial T} - \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial x^j} + \Gamma_{ij}^l \alpha_l^k - \Gamma_{ij}^k \alpha_l^l = S_{ij}^k \quad (6)$$

można interpretować jako symbol krzywizny termicznej.

W celu wyznaczenia pochodnej symbolu Christoffela drugiego rodzaju po temperaturze wykorzystuje się jego związek z tensorem metrycznym, prezentując następujące rozumowanie:

$$\begin{aligned}
g_{ij} &= \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j \Rightarrow dg_{ij} = d\mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i \circ d\mathbf{e}_j = \\
&= \left(\Gamma_{ik}^l dx^k + \alpha_i^l dT \right) \mathbf{e}_l \circ \mathbf{e}_j + \left(\Gamma_{jk}^l dx^k + \alpha_j^l dT \right) \mathbf{e}_i \circ \mathbf{e}_l = \\
&= \underbrace{\left(\Gamma_{ik}^l g_{lj} + \Gamma_{jk}^l g_{il} \right)}_{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}} dx^k + \underbrace{\left(\alpha_i^l g_{lj} + \alpha_j^l g_{il} \right)}_{\frac{\partial g_{ij}}{\partial T}} dT \\
\frac{\partial g_{ij}}{\partial T} &= 2\alpha_i^l g_{lj}
\end{aligned} \quad (7)$$

Dalej, postulując na tensorze metrycznym spełnienie warunków Schwarza z uwagi na zmienną x oraz T , otrzymuje się:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} \right) = 2 \frac{\partial}{\partial T} (\Gamma_{ik}^l g_{lj}) = \\
& = 2 \frac{\partial}{\partial x^k} (\alpha_i^l g_{lj}) + 2 \frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha_k^l g_{lj}) - 2 \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha_i^l g_{lk}) / : 2 \\
& \frac{\partial \Gamma_{ik}^l}{\partial T} g_{lj} = \left[\frac{\partial}{\partial x^k} (\alpha_i^l g_{lj}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha_k^l g_{lj}) - \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha_i^l g_{lk}) \right] \\
& - \Gamma_{ik}^l (\alpha_i^m g_{mj} + \alpha_j^m g_{lm}) / g^{nj}
\end{aligned} \tag{8}$$

Ostatecznie:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial T} = g^{km} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha_i^l g_{lm}) + \frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha_j^l g_{lm}) - \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha_i^l g_{lj}) \right] \\
& - \Gamma_{ij}^l (\alpha_i^k + \alpha_n^m g^{kn} g_{lm})
\end{aligned} \tag{9}$$

zatem:

$$\begin{aligned}
& S_{ij}^k = g^{km} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} (\alpha_j^l g_{lm}) + \frac{\partial}{\partial x^j} (\alpha_i^l g_{lm}) - \frac{\partial}{\partial x^m} (\alpha_i^l g_{lj}) \right] \\
& - \Gamma_{ij}^l \alpha_n^m g^{kn} g_{lm} - \Gamma_{ij}^k \alpha_i^l - \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial x^j}
\end{aligned} \tag{10}$$

Transformacja symbolu krzywizny termicznej:

$$\begin{aligned}
& S_{ij}^k = \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial T} - \frac{\partial \alpha_i^k}{\partial q^j} + \Gamma_{ij}^l \alpha_i^k - \Gamma_{ij}^k \alpha_i^l = \frac{\partial x^1}{\partial q^i} \frac{\partial x^m}{\partial q^j} \frac{\partial q^k}{\partial x^n} S_{lm}^n + \\
& + \Gamma_{lm}^n \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial x^1}{\partial q^i} \frac{\partial x^m}{\partial q^j} \frac{\partial q^k}{\partial x^n} \right) + \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial^2 x^1}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial q^k}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial^2 x^m}{\partial q^i \partial q^j} \frac{\partial q^l}{\partial x^m} \cdot \\
& \cdot \frac{\partial x^n}{\partial q^l} \frac{\partial q^k}{\partial x^r} \alpha_r^n - \frac{\partial^2 x^m}{\partial q^l \partial q^j} \frac{\partial x^n}{\partial q^i} \frac{\partial q^l}{\partial x^r} \frac{\partial q^k}{\partial x^m} \alpha_r^n - \alpha_m^l \frac{\partial}{\partial q^j} \left(\frac{\partial x^m}{\partial q^i} \frac{\partial q^k}{\partial x^1} \right)
\end{aligned} \tag{11}$$

Kilka ostatnich członów transformacji nie znika, przez co symbol nie transformuje się w pełni, wykorzystując tensorowe prawo transformacji.

3. Podsumowanie

Wyznaczony symbol krzywizny termicznej obrazuje numerycznie potwierdzoną obecność zakrzywienia funkcjonalnie gradowanej powłoki poddanej działaniu pola temperatury. Wspomniana problematyka jest szczególnie widoczna w przypadku konstrukcji warstwowych z interfejsem wykonanym z materiału FGM (por. [2]). Podczas gdy warstwy zewnętrzne różnych materiałów ulegają swobodnej deformacji termicznej, interfejs zaczyna się zakrzywiać, wprowadzając tym samym obecność naprężenia. Widać to wyraźnie na rys. 2., który obrazuje deformacje trójwarstwowej struktury. Pierwsza warstwa stanowi materiał ceramiczny, druga to interfejs wykonany z materiału FGM, trzecia zaś stanowi materiał metaliczny. Z uwagi na strukturę funkcjonalnie gradowaną w obecności pola temperatury zakrzywieniu ulega wyłącznie interfejs. Dalej zestawiono przypadki szczególne opisywanej teorii:

- powłoka izotropowa

$$\alpha_i^j = \alpha \delta_i^j \Rightarrow S_{ij}^k = 0 \text{ dla każdego } i, j, k = 1, 2, 3 \quad (12)$$

z uwagi na brak funkcyjnej gradacji wszystkie składowe symbolu krzywizny termicznej zgodnie z oczekiwaniami wynoszą zero,

- powłoka pierwotnie niezakrzywiona

$$S_{ijk} = \frac{\partial \alpha_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial x^k} \quad (13)$$

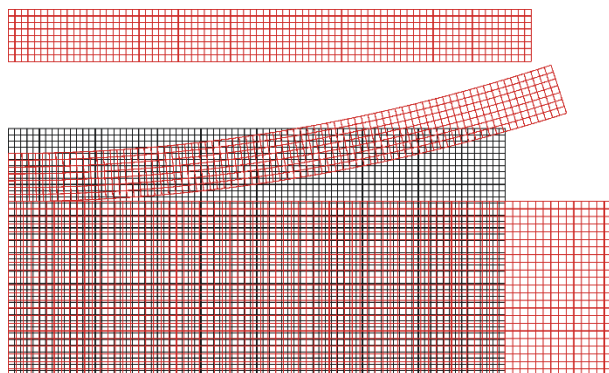
symbol krzywizny termicznej zależy wyłącznie od pochodnych cząstkowych tensora rozszerzalności termicznej,

- powłoka pierwotnie niezakrzywiona, zdefiniowana tensorem rozszerzalności termicznej

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}(x^3) & \alpha_{12}(x^3) & \alpha_{13} \\ \alpha_{21}(x^3) & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} S_{113} &= -\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial x^3} \\ S_{123} &= -\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial x^3} = S_{213} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha(x^3) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(x^3) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(x^3) \end{bmatrix} \Rightarrow S_{ij}^k = \delta_j^k \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} - \delta_{ij} \delta^{km} \frac{\partial \alpha}{\partial x^m} \Rightarrow \begin{aligned} S_{31}^1 &= \frac{\partial \alpha}{\partial x^3} \\ S_{32}^2 &= \frac{\partial \alpha}{\partial x^3} \\ S_{11}^3 &= -\frac{\partial \alpha}{\partial x^3} \\ S_{22}^3 &= -\frac{\partial \alpha}{\partial x^3} \end{aligned} \quad (15)$$

W tym przypadku z uwagi na brak pierwotnej krzywizny symbol krzywizny termicznej jest związany różniczkowo wyłącznie z tensorem rozszerzalności termicznej. Wcześniej pokazano wyłącznie niezerowe składowe.



Rys. 2. Przykładowa deformacja interfejsu FGM

Fig. 2. Exemplary deformation of FGM interface

Literatura

- [1] Karaśkiewicz E.: Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, Warszawa 1976.
- [2] Ganczarski A., Szubartowski D.: On the stress free deformation of linear FGM interface under constant temperature, Acta Mech. Automatica, 9(2015) 135-139.

PROBLEM OF CURVILINEAR ANISOTROPIC AND FUNCTIONALLY GRADATED COATING SUBJECTED TO TEMPERATURE FIELD

Abstract

This work concerns the problem of a curvilinear shell made of anisotropic material with functional gradation. The calculus is based on the concept of the Riemann-Christoffel curvature tensor enhanced by the influence of temperature field through the presence of a thermal tensor. Calculations

comprise estimation of the difference of a vector subjected to the affine connection along the infinitesimal quadrangle expressed, correspondingly to the shifting path, by a sum of both the geometric effect, represented by the Riemann-Christoffel curvature tensor, as well as certain symbol of the thermal curvature.

Keywords: FGM, thermo-elasticity

DOI: 10.7862/rm.2018.20

Przesłano do redakcji: 24.04.2018

Przyjęto do druku: 21.05.2018