

## ODTWARZANIE PRZEBIEGU TRASY KOLEJOWEJ O ZŁOŻONYM UKSZAŁTOWANIU GEOMETRYCZNYM<sup>1</sup>

---

### Władysław Koc

prof. dr hab. inż., Politechnika Gdańska, 80-233  
Gdańsk, ul. Narutowicza 11/12, tel. +48 58 347 1026,  
e-mail: kocwl@pg.gda.pl

### Piotr Chrostowski

dr inż., Politechnika Gdańska, 80-233 Gdańsk, ul. Na-  
rutowicza 11/12, tel. +48 58 348 6090, e-mail: piotr-  
chrost@gmail.com

### Katarzyna Palikowska

dr inż., Politechnika Gdańska, 80-233 Gdańsk, ul. Na-  
rutowicza 11/12, tel. +48 58 348 6090, e-mail: katpa-  
lik@pg.gda.pl

---

**Streszczenie.** *Kształt eksploatowanych torów kolejowych jest w niektórych sytuacjach bardzo złożony, a jednocześnie – jak wykazały przeprowadzone ciągłe pomiary satelitarne – niekiedy tak zdeformowany, że określenie kierunków głównych okazuje się niemożliwe. W pracy przedstawiono program komputerowy do odtwarzania przebiegu trasy kolejowej w takich właśnie przypadkach. Przygotowano zestaw funkcji realizujących połączenia prostych i łuków kołowych za pomocą krzywych przejściowych z zachowaniem ciągłości geometrycznej  $G^2$  w punktach połączeń. Przedstawiono sposób kodowania kształtu trasy w postaci ciągu liczbowego, umożliwiający efektywne ustalanie parametrów geometrycznych trasy w procesie optymalizacji.*

**Słowa kluczowe:** *tor kolejowy, pomiary satelitarne, program komputerowy, ocena kształtu geometrycznego*

### 1. Wprowadzenie

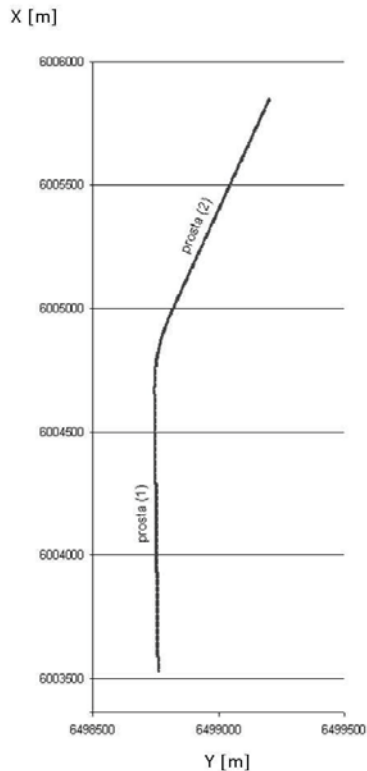
Technika pomiarów satelitarnych GPS w wersji mobilnej, zastosowana w 2009 roku przez zespół naukowy Politechniki Gdańskiej i Akademii Marynarki Wojennej w Gdyni [7], umożliwia bardzo szybkie i precyzyjne odtworzenie przebiegu istniejącej trasy kolejowej. Pozwala na odtworzenie kierunków prostych trasy (i określenie występujących na nich deformacji poziomych), a także rejonów zmiany kierunku trasy (kąty zwrotu trasy, łuki kołowe i krzywe przejściowe).

Dzięki technice satelitarnej staje się możliwe odtworzenie, w sposób bezpośredni, rzeczywistego kształtu toru w płaszczyźnie poziomej. Zagęszczenie punktów pomiarowych jest tak duże, że traci rację bytu potrzeba jakiegokolwiek interpolacji. Jednocześnie pojawia się kwestia odpowiedniego opisu matematycznego pomierzonych rzędnych. Tradycyjne podejście (a także obowiązujące wytyczne projektowania) wymaga wyodrębnienia z układu składowych elementów geometrycznych:

---

<sup>1</sup> Wkład autorów w publikację: Koc W. 34%, Chrostowski P. 33%, Palikowska K. 33%

odcinków prostych, łuków kołowych i krzywych przejściowych. Pozwala to na odтворzenie kształtu istniejącej osi toru. W następnym etapie odbywać się będzie korygowanie rzędnych, mające na celu eliminowanie występujących nieprawidłowości oraz dostosowywanie układu do wymaganych parametrów eksploatacyjnych.



Rys. 1. Przykładowy układ geometryczny stanowiący przedmiot postępowania

Podstawę prowadzenia oceny pomierzonej trasy (a następnie projektowania) stanowi poligon jej kierunków głównych. Sposób jego tworzenia został omówiony w pracy [4]. Przedmiotem postępowania staje się pojedynczy rejon zmiany kierunku trasy, pokazany na rysunku 1 w państwowym systemie odniesień przestrzennych 2000. Kwestię kluczową stanowi tutaj określenie równań obydwu przecinających się prostych w postaci  $X = A Y + B$ . Równania te można uzyskać bezpośrednio, wyznaczając z wyznaczonych współrzędnych odpowiednich punktów proste najmniejszych kwadratów.

Wyznaczone współrzędne punktów trasy – pionowa  $X$  i pozioma  $Y$  są oczywiście obarczone błędem pomiarowym. Jeśli chcemy uzyskać większą dokładność wyznaczenia równań prostych poligonu, możemy przyjąć, że dysponujemy zmienną niezależną nie obciążoną błędem; jest nią czas pomiaru  $t$ . Rozpatrywaną prostą opisujemy więc równaniami parametrycznymi  $X(t)$  i  $Y(t)$ , w których błędami po-

miarowymi obarczone będą zmienne zależne  $X$  i  $Y$ . Równania te uzyskamy wyznaczając odpowiednie proste najmniejszych kwadratów. Dla odcinka prostego trasy z trasy z lewej strony na rysunku 1 są one następujące:

$$X = 5997482,803 + 2,87311 t \quad (1)$$

$$Y = 6498829,206 - 0,03388 t \quad (2)$$

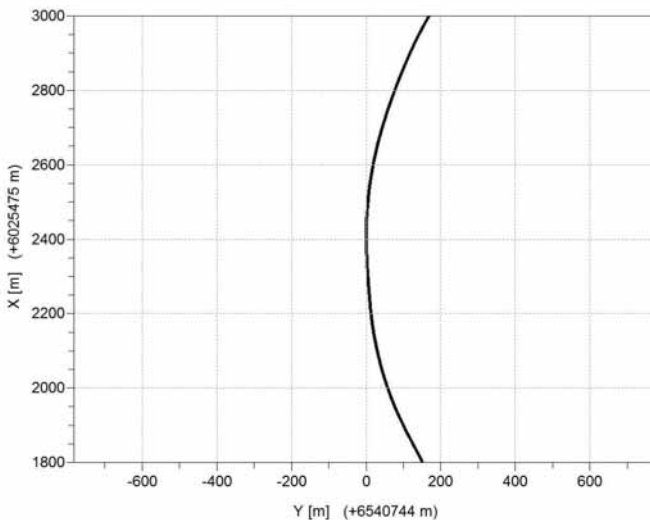
gdzie:  $t = 2151,00 - 2493,20$  s.

Znajomość równań parametrycznych prostej umożliwi zapisanie jej w układzie  $X(Y)$ . Równaniom (1), (2) odpowiada zależność:

$$X = 557114695,89 - 84,80253837 Y \quad (3)$$

Szczegółowa analiza właściwego rejonu zmiany kierunku trasy, tj. łuku kołowego z krzywymi przejściowymi, wymaga odpowiedniej transformacji (przesunięcia i obrotu) układu współrzędnych [6]. W powstałym w wyniku tej operacji lokalnym układzie współrzędnych funkcjonują opracowane nowe metody projektowania, dostosowane do techniki ciągłych pomiarów satelitarnych [2, 3].

W niektórych sytuacjach kształt eksploatowanych torów kolejowych jest bardzo złożony, a jednocześnie – jak wykazały przeprowadzone ciągłe pomiary satelitarne – niekiedy tak zdeformowany, że określenie kierunków głównych okazuje się niemożliwe. Taka sytuacja została przedstawiona w pracy [8], a zilustrowana na rysunku 2. Nie można wówczas podjąć modelowego toku postępowania, polegającego na osobnym rozpatrywaniu poszczególnych rejonów zmiany kierunku trasy. Ocena musi wtedy nabrać charakteru całościowego, przy wykorzystaniu odpowiedniego wspomaganie komputerowego. W pracy przedstawiono program komputerowy do odtwarzania przebiegu trasy kolejowej w takich właśnie przypadkach.



Rys. 2. Przykład złożonego układu geometrycznego

## 2. Zasady kodowania kształtu trasy

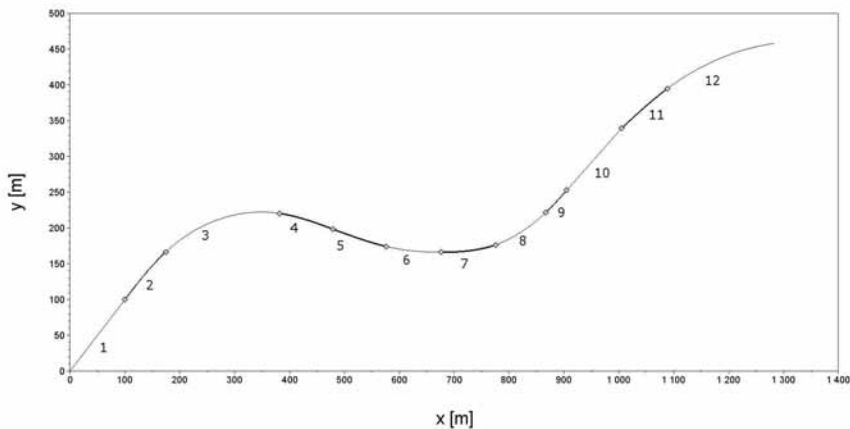
W procesie odtwarzania przebiegu pomierzonej trasy przyjęto założenie, iż trasa składa się ze skończonego zbioru elementów geometrycznych, takich jak prosta (odcinek), łuk kołowy i krzywa przejściowa (np. kłotoida), połączonych ze sobą z zachowaniem ciągłości geometrycznej  $G^2$  w punktach połączenia, tzn. zapewnieniem ciągłości trasy, zgodności stycznych i zgodności krzywizny. Każdy element geometryczny trasy opisany jest zestawem parametrów:

- typem (prosta, łuk kołowy, rodzaj krzywej przejściowej),
- długością rzutu na oś odciętych (dla prostej, łuku kołowego i krzywej przejściowej),
- promieniem (dla łuku kołowego),
- atrybutem kształtu (dla łuku kołowego i krzywej przejściowej).

Dodatковым elementem opisującym przebieg trasy jest kąt początkowy (kąt nachylenia kierunku głównego na początku trasy w lokalnym układzie współrzędnych).

Atrybut kształtu związany jest z charakterem krzywizny, której dodatnia wartość występuje na krzywych o wypukłości skierowanej w dół (oznaczenie: 1), a wartość ujemna – na krzywych o wypukłości skierowanej w górę (oznaczenie: -1).

W celu wyjaśnienia omawianej procedury, rozważmy przykładową trasę o przebiegu przedstawionym na rysunku 3 i kącie początkowym  $\varphi = \pi/4$  rad. Jest ona złożona jest z 12 elementów geometrycznych, opisanych parametrami podanymi w tabeli 1.



Rys. 3. Przebieg przykładowej trasy z zaznaczonymi poszczególnymi elementami geometrycznymi

Tabela 1. Charakterystyka elementów geometrycznych przykładowej trasy

Lp.	Typ	Długość[m]	Promień [m]	Kształt
1	Prosta	100	-	-
2	Kłotoida_1	100	-	-1
3	Łuk kołowy	200	300	-1
4	Kłotoida_2	100	-	-1
5	Kłotoida_1	100	-	1
6	Łuk kołowy	100	500	1
7	Kłotoida_3	100	-	1
8	Łuk kołowy	100	300	1
9	Kłotoida_2	50	-	1
10	Prosta	100	-	-
11	Kłotoida_1	100	-	-1
12	Łuk kołowy	200	500	-1

Krzywe przejściowe w postaci kłotoidy oznaczone indeksami 1, 2 i 3 oznaczają odpowiednio:

- kłotoida\_1 – krzywą przejściową łączącą prostą z łukiem kołowym,
- kłotoida\_2 – krzywą przejściową łączącą łuk kołowy z prostą,
- kłotoida\_3 – krzywą przejściową łączącą dwa łuki kołowe o zgodnych krzywiznach  $k_1$  i  $k_2$ .

Wszystkie wymienione krzywe przejściowe charakteryzują się liniową zmianą krzywizny, przy czym kłotoida\_1 i kłotoida\_2 są opisane standardowymi równaniami kłotoidy, natomiast równania parametryczne kłotoidy\_3 o długości  $l_k$  są następujące [5]:

$$\begin{aligned}
 x(l) &= \int \cos \theta(l) dl \\
 &= l - \frac{k_1^2}{6} l^3 - \frac{k_1}{8 l_k} (k_2 - k_1) l^4 + \left[ \frac{k_1^4}{120} - \frac{1}{40 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^5 + \frac{k_1^3}{72 l_k} (k_2 - k_1) l^6 \\
 &\quad - \left[ \frac{k_1^6}{5040} - \frac{k_1^2}{112 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^7 - \left[ \frac{k_1^5}{1920 l_k} (k_2 - k_1) - \frac{k_1}{384 l_k^3} (k_2 - k_1)^3 \right] l^8 \\
 &\quad + \left[ \frac{k_1^8}{362880} - \frac{k_1^4}{1728 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 + \frac{1}{3456 l_k^4} (k_2 - k_1)^4 \right] l^9 + \dots
 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 y(l) &= \int \sin \theta(l) dl \\
 &= \frac{k_1}{2} l^2 + \frac{1}{6 l_k} (k_2 - k_1) l^3 - \frac{k_1^3}{24} l^4 - \frac{k_1^2}{20 l_k} (k_2 - k_1) l^5 + \left[ \frac{k_1^5}{720} - \frac{k_1}{48 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^6 \\
 &\quad + \left[ \frac{k_1^4}{336 l_k} (k_2 - k_1) - \frac{1}{336 l_k^3} (k_2 - k_1)^3 \right] l^7 - \left[ \frac{k_1^7}{40320} - \frac{k_1^3}{384 l_k^2} (k_2 - k_1)^2 \right] l^8 \\
 &\quad - \left[ \frac{k_1^6}{12960 l_k} (k_2 - k_1) - \frac{k_1^2}{864 l_k^3} (k_2 - k_1)^3 \right] l^9 + \dots
 \end{aligned} \quad (5)$$

Na potrzeby opisu przebiegu trasy za pomocą zbioru elementów geometrycznych został przygotowany zestaw funkcji wyznaczających współrzędne elementów w postaci parametrycznej oraz realizujących łączenie tychże elementów z zachowaniem ciągłości geometrycznej  $G^2$  w punktach połączeń. Zestaw ten obejmuje następujące funkcje:

- f\_prosta (długość, kąt)
- f\_kłotoidal1 (długość, promień, kąt, kształt)
- f\_kłotoida2 (długość, promień, kąt, kształt)

```
f_klotoida3(długość, promień1, promień2, kąt, kształt)
f_luk(długość, promień, kąt, kształt)
f_dosuń(punkt1, punkt2, element)
f_obrot(kąt, element)
```

Przyjęcie założenia, że łukom zawsze towarzyszą krzywe przejściowe zapewniające zgodność krzywizny w punktach połączenia, pozwala na uproszczenie zapisu kształtu trasy (krzywe przejściowe przestają być traktowane jako elementy niezależne). W rozpatrywanym przypadku całkowita liczba elementów ulega zredukowaniu o połowę. Przyjęty schemat kodowania trasy przedstawiono w tabeli 2.

Tabela 2. Schemat kodowania przebiegu trasy

Kąt [rad]	Elementy geometryczne (1 ... N)						
	Element 1						...
	Typ {0,1}	Długość [m]	Promień [m]	Kształt {-1,1}	Długość pierwszej krzywej przejściowej [m]	Długość drugiej krzywej przejściowej [m]	
$\varphi$	$T_1$	$L_1$	$R_1$	$K_1$	$Kp1_1$	$Kp2_1$	

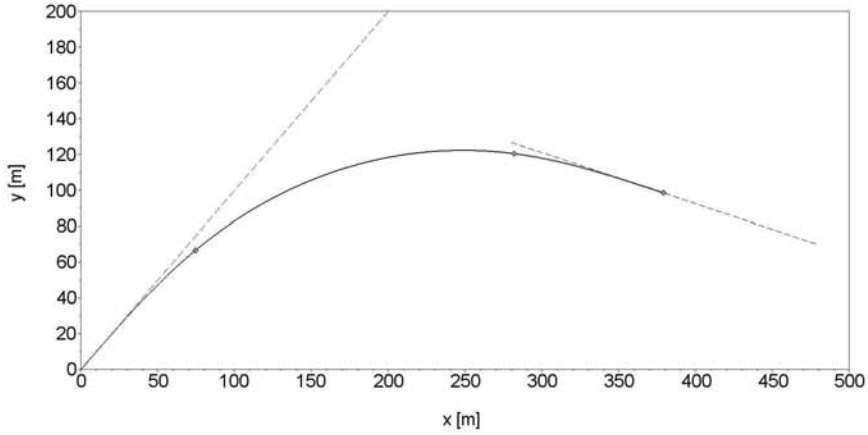
Ciąg kodujący poszczególne elementy geometryczne składa się z sześciu pozycji. Typ elementu przyjmuje jedną z dwóch wartości  $T \in \{0,1\}$ , gdzie 0 – oznacza prostą, 1 – łuk kołowy. Również parametr kształtu przyjmuje jedną z dwóch wartości  $K \in \{-1,1\}$ . Niektóre pozycje ciągu mogą być niewykorzystane (np. dla prostego odcinka trasy) i wówczas oznacza się je symbolem x.

Trasa przedstawiona na rysunku 3 składa się z 4 łuków kołowych z krzywymi przejściowymi oraz 2 odcinków prostych i może być jednoznacznie opisana ciągiem liczbowym o długości 37 ( $37 = 1 + 6 * 6$ ). Ciąg liczbowy kodujący przebieg trasy przedstawiono w tabeli 3.

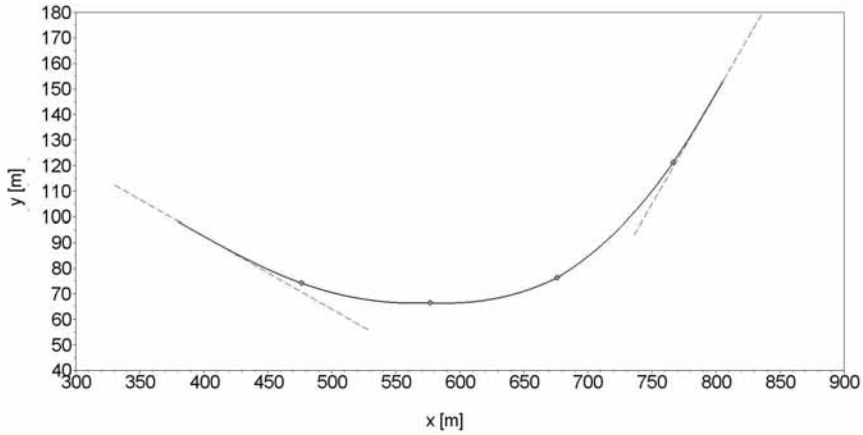
Tabela 3. Ciąg liczbowy kodujący trasę przedstawioną na rysunku 3

Kąt	Element 1	Element 2	Element 3	Element 4
$\pi/4$	0 100 x xxx	1 200 300-1 100 100	1 100 500 1 100 100	1 100 300 1 0 50
	Element 5	Element 6		
	0 100 x xxx	1 200 500 -1 100 0		

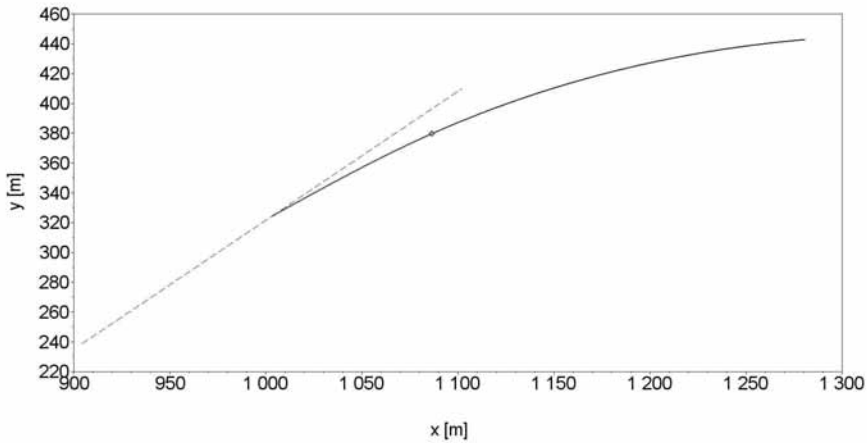
Na rysunkach 4, 5 i 6 przedstawiono etapy dekodowania ciągu liczbowego przedstawionego w tabeli 3 oraz realizacji połączenia  $G^2$  sześciu zakodowanych elementów, którymi została opisana trasa z rysunku 3. Rysunek 4 dotyczy elementu 2, rysunek 5 – elementów 3 i 4, a rysunek 6 – elementu 6.



Rys. 4. Dekodowanie ciągu liczbowego opisującego element 2 (tabela 3)



Rys. 5. Dekodowanie ciągu liczbowego opisującego elementy 3 i 4 (tabela 3)



Rys. 6. Dekodowanie ciągu liczbowego opisującego element 6 (tabela 3)

### 3. Ustalanie parametrów geometrycznych trasy

Założono, że uzyskany na drodze pomiarów satelitarnych układ geometryczny z rys. 2 składa się z 5 łuków i 2 wstawek prostych. Układ ten, po odpowiedniej transformacji, został przedstawiony na rysunku 8 (uzyskano go poprzez obrót o kąt  $3\pi/2$  i dosunięcie do punktu początkowego o współrzędnych 0,0). Parametry geometryczne odtwarzanego przebiegu trasy (kąt, długości i promienie łuków, długości krzywych przejściowych oraz długości wstawek prostych) zostały wyznaczone w procesie optymalizacji prowadzonym algorytmem roju cząstek PSO (*ParticleSwarmOptimization*) [1].

Algorytm PSO działa w oparciu o populację cząstek poruszających się w przestrzeni rozwiązań. Każda cząstka reprezentuje potencjalne rozwiązanie problemu, tj. szukany ciąg  $1+6 \cdot n$  liczb, gdzie:  $n$  – oznacza liczbę elementów geometrycznych, z których składa się odtwarzana trasa. Cząstki zmieniają swoje położenie w kierunku uzależnionym od najlepszego dotychczasowego położenia cząstki, najlepszego dotychczasowego położenia cząstek sąsiednich oraz własnej prędkości.

Zastosowano PSO-Toolbox v. 0.7-1 dostępny w SciLab v. 5.4.0 [9]. W tabeli 4 przedstawiono przyjęte parametry algorytmu.

Tabela 4. Przyjęte parametry algorytmu PSO

Parametr	Przyjęta wartość
Współczynnik inercji $\omega_{max}$	0,9
Współczynnik inercji $\omega_{min}$	0,4
Indywidualny współczynnik uczenia $C_1$	0,7
Grupowy współczynnik uczenia $C_2$	1,47
Liczba iteracji	200

Ocena cząstki reprezentującej rozwiązanie problemu jest przeprowadzana w oparciu o różnicę pomiędzy rzędnymi odtwarzanego kształtu trasy a rzędnymi wynikającymi z pomiarów, zgodnie z formułą:

$$FF(a_1, \dots, a_{1+6n}) = \frac{1}{(n+1)^4} \sum_{i=1}^n (py_i - y_k)^4 \rightarrow \min \quad (6)$$

gdzie:

$FF$  – wartość funkcji oceny (*fitness function*),

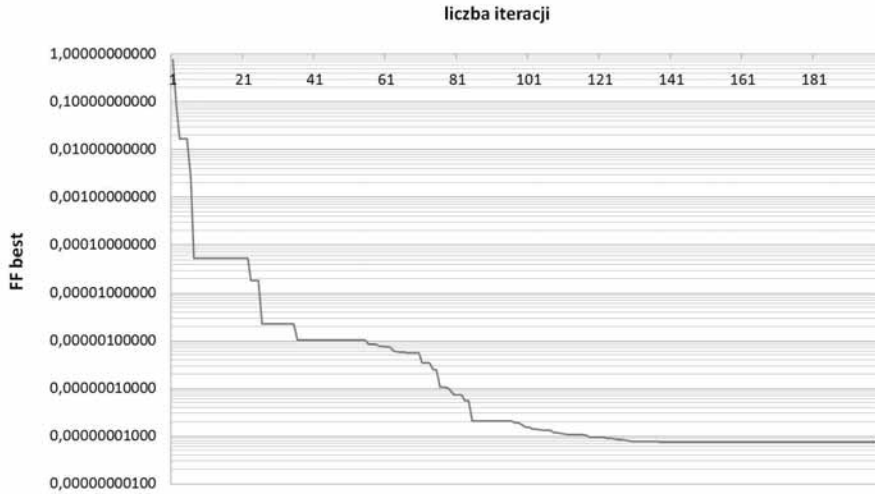
$n$  – liczba uwzględnionych próbek reprezentujących rzędne układu pomierzonego,

$y_k$  –  $k$ -ta rzędna odtwarzanego układu, której odpowiadająca odcięta  $x_k$  spełnia układ nierówności  $x_{k-1} < px_i \geq x_k$ ,

$py_i$  – rzędna wynikająca z pomiarów.

Przebieg procesu optymalizacji został przedstawiony na rysunku 7. Wartości  $FF_{best}$  w kolejnych iteracjach zostały przedstawione w skali logarytmicznej o podstawie 10.





Rys. 7. Przebieg procesu optymalizacji

W wyniku procesu optymalizacji otrzymano ciąg liczbowy przedstawiony w tabeli 5.

Tabela 5. Ciąg liczbowy uzyskany w wyniku procesu optymalizacji

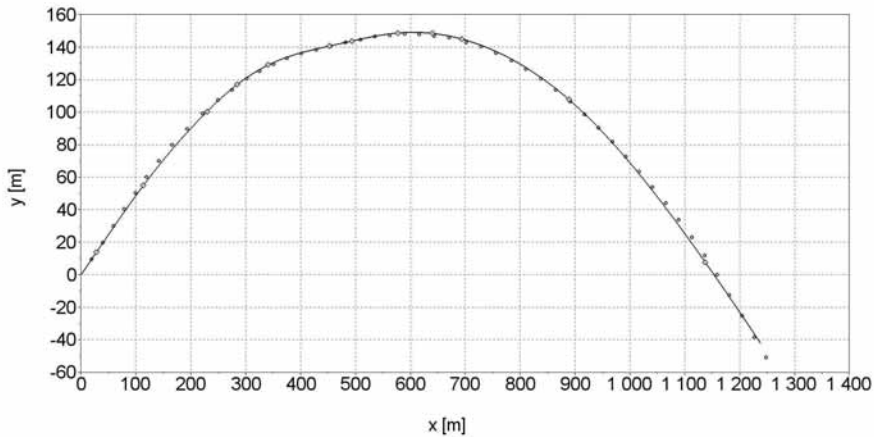
0.4597581	0	28	x	x	x	x	1	123	1267
-1	95	57	1	57	623	-1	0	112	0
41	x	x	x	x	1	63	936	-1	84
54	1	197	1025	-1	0	268	1	110	4366
1	0	0							

Przedstawiony ciąg jednoznacznie opisuje kształt trasy, której parametry geometryczne przedstawiono w tabeli 6 (kąt początkowy  $\varphi = 0.4597581$  rad).

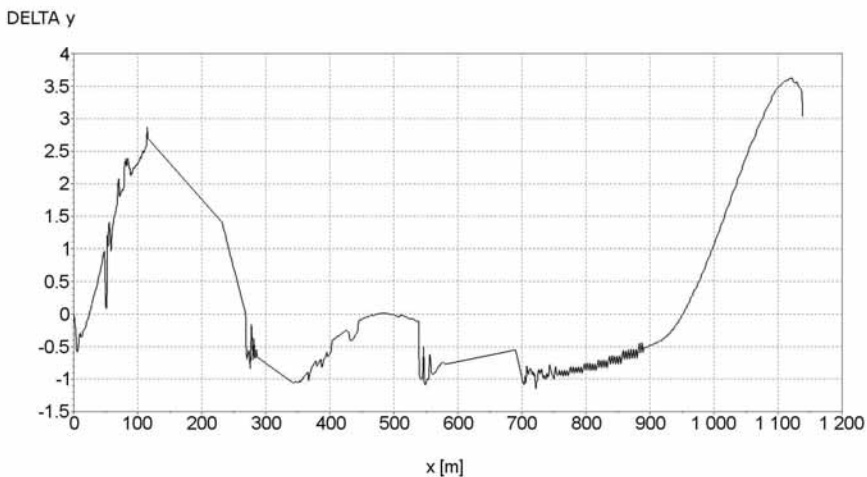
Tabela 6. Elementy geometryczne pomierzonej trasy

Lp	Typ	Długość [m]	Promień [m]	Kształt
1	Prosta	28	-	-
2	Klotoida_1	95	-	-1
	Łuk kołowy	123	1267	-1
	Klotoida_3	57	-	-1
3	Łuk kołowy	57	623	-1
	Klotoida_2	112	-	-1
4	Prosta	41	-	-
5	Klotoida_1	84	-	-1
	Łuk kołowy	63	936	-1
	Klotoida_3	54	-	-1
6	Łuk kołowy	197	1025	-1
	Klotoida_3	268	-	-1
7	Łuk kołowy	110	4366	-1

Odtworzony kształt trasy został przedstawiony na rysunku 8 na tle przebiegu trasy wynikającego z danych pomiarowych. Wykres różnic rzędnych wynikających z danych pomiarowych i rzędnych układu odtworzonego został przedstawiony na rysunku 9.



Rys. 8. Odtworzony kształt trasy na tle jej przebiegu wynikającego z danych pomiarowych



Rys. 9. Wykres różnic rzędnych wynikających z danych pomiarowych i rzędnych układu odtworzonego

## 5. Podsumowanie

- Technika pomiarów satelitarnych GPS w wersji mobilnej umożliwia bardzo szybkie i precyzyjne odtworzenie, w sposób bezpośredni, rzeczywistego kształtu toru w płaszczyźnie poziomej. Zagęszczenie punktów pomiarowych jest tak duże, że traci rację bytu potrzeba jakiegokolwiek interpolacji.

Jednocześnie pojawia się kwestia odpowiedniego opisu matematycznego pomierzonych rzędnych.

- W niektórych sytuacjach kształt eksploatowanych torów kolejowych jest bardzo złożony, a jednocześnie niekiedy tak zdeformowany, że określenie kierunków głównych okazuje się niemożliwe. Nie można wówczas podjąć modelowego toku postępowania, polegającego na osobnym rozpatrywaniu poszczególnych rejonów zmiany kierunku trasy. Ocena musi wtedy nabrać charakteru całościowego, przy wykorzystaniu odpowiedniego wspomaganie komputerowego. W pracy przedstawiono program komputerowy do odtwarzania przebiegu trasy kolejowej w takich właśnie przypadkach.
- W celu rozwiązania postawionego problemu przygotowano zestaw funkcji realizujących połączenia prostych i łuków kołowych za pomocą krzywych przejściowych z zachowaniem ciągłości geometrycznej  $G^2$  w punktach połączeń. Opracowano sposób kodowania kształtu trasy w postaci ciągu liczbowego, umożliwiający efektywne ustalanie parametrów geometrycznych trasy w procesie optymalizacji.
- Parametry geometryczne odtwarzanego przebiegu trasy (kąąt początkowy, długości i promienie łuków kołowych, długości krzywych przejściowych oraz długości wstawek prostych) zostały wyznaczone w procesie optymalizacji prowadzonym algorytmem roju cząstek PSO (*ParticleSwarmOptimization*).
- Zaprezentowana metoda umożliwia szybkie opracowanie danych z pomiarów satelitarnych i wyznaczenie przebiegu trasy w ujęciu modelowym. Może to stanowić podstawę do podjęcia odpowiednich działań modernizacyjnych.

## Literatura

- [1] Kennedy J., Eberhart R., Swarm intelligence. Morgan Kaufmann Publishers, San Francisco, 2001.
- [2] Koc W., Metoda projektowania rejonu zmiany kierunku trasy kolejowej. Problemy Kolejnictwa 2011, zeszyt 152.
- [3] Koc W., Projektowanie łuków kosзовych dostosowane do pomiarów satelitarnych. Prace Naukowe Politechniki Warszawskiej, seria Transport, z. 98, 2013.
- [4] Koc W., Chrostowski P., Tworzenie poligonu kierunków głównych trasy kolejowej z wykorzystaniem pomiarów GPS. X Konferencja Naukowo-Techniczna „Nowoczesne Technologie i Systemy Zarządzania w Transporcie Szynowym”, Kościelisko, 30 listopada-2 grudnia 2011.
- [5] Koc W., Palikowska K., Ocena dynamiczna wybranych sposobów łączenia elementów trasy o zróżnicowanej krzywiznie. Technika Transportu Szynowego 2012, nr 9, CD-ROM.
- [6] Koc W., Specht C., Wyniki pomiarów satelitarnych toru kolejowego. Technika Transportu Szynowego 2009, nr 7-8.

- 
- [7] Koc W., Specht C., Jurkowska A., Chrostowski P., Nowak A., Lewiński L., Bornowski M., Określanie przebiegu trasy kolejowej na drodze pomiarów satelitarnych. II Konferencja Naukowo-Techniczna „Projektowanie, Budowa i Utrzymanie Infrastruktury w Transporcie Szynowym INFRA-SZYN 2009, Zakopane, 22-24 kwietnia 2009.
- [8] Koc W., Specht C., Lewiński L., Chrostowski P., Grzejka P., Ocena efektów regulacji osi toru na wybranej linii kolejowej. Technika Transportu Szynowego 2013, nr 2-3.
- [9] Salmon S., Baudin M., Cornet A.: Particle Swarm Optimization Toolbox v. 0.7-1, <http://forge.scilab.org/index.php/p/pso-toolbox/>