

Magdalena GERTNER

POLITECHNIKA BIAŁOSTOCKA, WYDZIAŁ MECHANICZNY
ul. Wiejska 45 C, 15-351 Białystok

Porównanie wyników badań symulacyjnych układu regulacji z regulatorem klasycznym i regulatorem rzędu $\frac{1}{2}$ z wynikami uzyskanymi praktycznie

Mgr inż. Magdalena GERTNER

Absolwentka Wydział Mechanicznego Politechniki Białostockiej (2012 r.). Od 2012 r. uczestniczka studiów doktoranckich na Wydziale Mechanicznym Politechniki Białostockiej. Zajmuje się głównie analizą i syntezą układów sterowania, a w szczególności układami niecałkowitego rzędu.



e-mail: m.gertner@doktoranci.pb.edu.pl

Streszczenie

W artykule opisano ogólną postać operatora niecałkowitego rzędu. Przedstawiono opis regulatora proporcjonalno-całkującego i proporcjonalno-różniczkującego rzędu $\frac{1}{2}$. Wyznaczono odpowiedzi na wartość zadaną układu z klasycznym regulatorem PI, PD, PID oraz z regulatorem proporcjonalno-całkującym, proporcjonalno-różniczkującym i proporcjonalno-całkująco-różniczkującym rzędu $\frac{1}{2}$. Porównano wyniki badań symulacyjnych z badaniami opisanymi w pracy [6].

Słowa kluczowe: regulator rzędu $\frac{1}{2}$; operatory niecałkowitego rzędu; klasyczne regulatory PI, PD oraz PID; obiekt fraktalny.

Comparison of simulation results of the control system with a classical controller and a controller of order $\frac{1}{2}$ with results obtained in practice

Abstract

In the paper the design of a fractional order controller of the closed loop system with inertial plant with time delay is considered (Fig. 1). The definition of a fractional order differ-integral is given by (1). In Section 2 the Riemanna-Liouville (2), Grünwald-Letnikov (4) and Caputo (5) operator are presented. Section 3 describes the transfer function and block diagrams of classical PI, PD, PID controllers and proportional-integral, proportional-derivative, proportional-integral-derivative controllers of order $\frac{1}{2}$. The simulation results of the control system of proportional-integral and proportional-derivative classical controllers and of order $\frac{1}{2}$ are shown and compared. The systems have been tested for setpoint change. Computer simulations have been performed in the MATLAB/Simulink environment. Section 4 provides an approach to control of order $\frac{1}{2}$ described in [7]. It is based on fractal geometric objects, which are used for electrical systems (Fig. 4). In Section 3 the obtained results are compared with the results from simulations of the control systems.

Keywords: controller of order $\frac{1}{2}$; differintegral operator; classical PI, PD and PID controllers; the fractal object.

1. Wprowadzenie

Przy pomocy układów sterowania można obsługiwać bardzo różnorodne obiekty. Układy sterowania, a w szczególności układy automatycznej regulacji, można klasyfikować według różnych kryteriów, np. liniowości, liczby wejść i wyjść, zadań układu itd. Rodzaj regulatora dobierany jest w zależności od oczekiwań układu oraz od rodzaju obiektu.

Biorąc pod uwagę różne sposoby podejścia do problemu regulacji, różne właściwości, wartość opóźnienia, zmienne wartości parametrów obiektu można mówić o klasycznych metodach regulacji (np. regulacja odporna, regulacja adaptacyjna [5, 17]) oraz niekonwencjonalnych metodach regulacji, np. [2, 8, 18, 20]. Wśród tych ostatnich na uwagę zasługują metody wykorzystujące algorytmy sterowania oparte o operatory niecałkowitego rzędu [2,

9, 18, 20, 23]. W pracy [18] analizowano zarówno wpływ rzędu całkowania i rzędu różniczkowania na odpowiedzi skokowe układu, jak i na możliwości kształtowania dynamiki układu zamkniętego z regulatorem niecałkowitego rzędu. Rzędy całkowania i różniczkowania przyjmowały wartości niecałkowite.

Celem tej pracy jest porównanie czasu ustalania oraz czasu przeregulowania, czyli parametrów charakterystyk dynamicznych, układów regulacji z regulatorem klasycznym PI, PD, PID oraz z regulatorem proporcjonalno-całkującym, proporcjonalno-różniczkującym oraz proporcjonalno-całkująco-różniczkującym połówkowego rzędu. W rozdziale 2 omówiony jest operator różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu. W rozdziale 3 przedstawiono opis transmitancyjny oraz schematy blokowe regulatorów klasycznych PI, PD, PID i regulatorów proporcjonalno-całkującego, proporcjonalno-różniczkującego i proporcjonalno-całkująco-różniczkującego rzędu $\frac{1}{2}$. Pokazano oraz porównano wyniki symulacji układu regulacji z regulatorami proporcjonalno-całkującym oraz proporcjonalno-różniczkującym klasycznym i rzędu $\frac{1}{2}$. Układ został przebadany na zmianę wartości zadanej. W rozdziale 4 przedstawiono podejście do regulatora rzędu $\frac{1}{2}$ opisanie w pracy [7]. Opiera się ono na fraktalnych obiektach geometrycznych, które zastosowano do układów elektrycznych. Wyniki uzyskane za pomocą tych układów są porównane z wynikami symulacyjnymi układów regulacji uzyskanymi w rozdziale 3.

2. Operatory niecałkowitego rzędu

Rachunek różniczkowo-całkowy niecałkowitego rzędu zarówno w przypadku ciągłym jak i dyskretnym obejmuje różne definicje pochodnej, np. [15, 20, 24]. Układy dynamiczne z operatorem zarówno ciągłym jak i dyskretnym niecałkowitego rzędu w naturalny sposób poszerzają klasę modeli opisujących rzeczywiste zjawiska (np. [1, 2, 3, 12] i inni).

W przypadku ogólnym operator niecałkowitego rzędu można zdefiniować jako [np. 11, 14]:

$${}_a D_t^\alpha := \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \operatorname{Re} \alpha > 0 \\ 1 & \operatorname{Re} \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \operatorname{Re} \alpha < 0 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie α jest rzędem rozważanego operatora, a $a \in \mathbb{R}$ odpowiada za stałą związaną z warunkami początkowymi. Można pokazać, że operator ${}_a D_t^\alpha$ jest operatorem liniowym [np. 5, 8]. Co więcej, można go zadać na różne sposoby. Do najczęściej stosowanych należą [8, 14]:

a) operator Riemanna-Liouville'a:

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (2)$$

gdzie $\alpha \in (n-1, n)$, n jest liczbą naturalną. Operator Riemanna-Liouville'a stosuje się głównie do opisu układów z pamięcią [13, 19].

Transformata Laplace'a pochodno-całki Riemanna-Liouville'a przy $a=0$ ma postać [2]:

$$\mathcal{L}\{{}_0 D_t^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^p s^{\alpha-1} f^{(\alpha-k)}(0^+), \quad (3)$$

gdzie $F(s)$ jest transformatą Laplace'a funkcji $f(t)$, tj. $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

b) operator Grünwalda-Letnikov'a:

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{\alpha}{j} f(t-jh), \quad (4)$$

gdzie $\binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-j+1)}{j!}$, $j = 1, 2, 3, \dots$, oraz $\alpha \in (n-1, n)$, $n \in \mathbb{N}$, $h > 0$. Operator ten jest szczególnie przydatny przy zastosowaniach numerycznych rachunku różniczkowego niecałkowitego rzędu oraz do analizy własności układów dynamicznych [4, 8, 20, 24].

c) operator Caputo:

$${}_a D_t^\alpha f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \frac{f(\tau)^{(n)}}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (5)$$

przy czym $\alpha \in (n-1, n)$, n jest dowolną liczbą naturalną.

Transformata Laplace'a pochodno-całki Caputo przy $a=0$ ma postać [2]:

$$\mathcal{L}\{ {}_0 D_t^\alpha f(t) \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=1}^p s^{\alpha-1} f^{(k-1)}(0^+), \quad (6)$$

Wyznaczanie transformaty Laplace'a pochodno-całki Caputo nie wymaga obliczania pochodnych niecałkowitych rzędów funkcji $f(t)$ w punkcie $t = 0^+$, jak ma to miejsce w przypadku pochodno-całki Riemanna-Liouville'a [2].

Liniowy stacjonarny ciągły układ dynamiczny rzędu niecałkowitego SISO opisuje się równaniem różniczkowym niecałkowitego rzędu o postaci [2]:

$$\sum_{i=0}^n a_i D_t^{\alpha_i} y(t) = \sum_{k=0}^m b_k D_t^{\beta_k} u(t), \quad (7)$$

gdzie $\alpha_n > \alpha_{n-1} > \dots > \alpha_1 > \alpha_0 \geq 0$, $\beta_m > \beta_{m-1} > \dots > \beta_1 > \beta_0 \geq 0$ są to liczby rzeczywiste, a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$) oraz b_k ($k = 0, 1, 2, \dots, m$) są to rzeczywiste współczynniki, natomiast $D_t^\delta \equiv {}_0 D_t^\delta$ jest pochodno-całką Riemanna-Liouville'a lub Caputo niecałkowitego rzędu $\delta > 0$.

Stosując przekształcenie Laplace'a o obu stron równania (7) przy zerowych warunkach początkowych otrzymujemy następującą transmitancję [2]:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_m s^{\beta_m} + b_{m-1} s^{\beta_{m-1}} + \dots + b_0 s^{\beta_0}}{a_n s^{\alpha_n} + a_{n-1} s^{\alpha_{n-1}} + \dots + a_0 s^{\alpha_0}}, \quad (8)$$

W dalszej części pracy używany będzie operator Riemanna-Liouville'a, który doskonale nadaje się do opisu dynamicznego układu regulacji.

3. Schematy blokowe badanych układów

Będą używane następujące oznaczenia: k_p – współczynnik wzmocnienia regulatora, T_i – czas zdwojenia; K_D – stała różniczkowania; T_d – czas wyprzedzenia.

3.1. Regulator rzędu $\frac{1}{2}$

Jak wiadomo, klasyczna transmitancja regulatora typu PI jest postaci (np. [22]):

$$G_1(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right), \quad (9)$$

a klasyczną transmitancją idealnego regulatora typu PD jest:

$$G_2(s) = k_p (1 + T_d s). \quad (10)$$

W rzeczywistości najczęstszą postacią klasycznej transmitancji dla regulatora proporcjonalno-różniczkującego rzeczywistego jest:

$$G_3(s) = k_p \left(1 + \frac{T_d s}{T_s + 1} \right), \quad (11)$$

gdzie $T = \frac{T_d}{K_p}$.

Regulatory niecałkowitego rzędu są typowym przykładem regulatorów o niekonwencjonalnych algorytmach. Ich realizacja jest możliwa zarówno w sposób cyfrowy jak i w sposób analogowy [18,20]. Ogólną postać transmitancyjną regulatora niecałkowitego rzędu typu proporcjonalno-całkującego, oznaczanego jako PI^ν , można opisać następująco [18, 20]:

$$G_{ulam1}(s) = k_p \left[1 + \frac{1}{T_i s^\nu} \right], \quad (12)$$

gdzie ν jest dowolną nieujemną liczbą rzeczywistą nazywaną rzędem całkowania. Ogólną postacią transmitancyjną regulatora niecałkowitego rzędu typu proporcjonalno-różniczkującego, oznaczonego jako PD^μ , można opisać następująco [18, 20]:

$$G_{ulam2}(s) = k_p [1 + T_d s^\mu], \quad (13)$$

Gdzie μ jest dowolną nieujemną liczbą rzeczywistą nazywaną rzędem różniczkowania. Wpływ wielkości rzędu całkowania oraz rzędu różniczkowania na kształt charakterystyki czasowej (odpowiedź skokowa) idealnego regulatora niecałkowitego rzędu był badany w [18]. Dokładna analiza otrzymanych wyników (zależności odpowiedzi czasowych na wymuszenie skokowe) jest przedstawiona w [18, s. 317-320].

Przykłady 1 oraz 2 ilustrują sposób powstawania członu całkującego oraz członu różniczkującego w celu łatwego zaimplementowania do programu MATLAB/Simulink.

Przykład 1 [6]:

Jeżeli sygnałem wejściowym do regulatora jest sygnał opisany funkcją skoku jednostkowego

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}, \quad (14)$$

gdzie t jest czasem, w którym istnieje skok, a sygnałem wyjściowym z regulatora jest sygnał opisany funkcją $y(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, to transmitancją takiego regulatora jest: $G_{ulam3}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \sqrt{\pi} \cdot s^{-\frac{1}{2}}$. Przybliżając funkcję $g(s) = s^{-\frac{1}{2}}$ wielomianem Taylora rzędu 50 w otoczeniu punktu $s_0 = 1$ otrzymuje się:

$$G_{ulam3}(s) = \sqrt{\pi} \cdot s^{-\frac{1}{2}} \approx 1.7724(1 + 0.5(s-1) - 0.1250(s-1)^2 + 0.0625(s-1)^3 - \dots - 0.0008(s-1)^{50}). \quad (15)$$

Przykład 2:

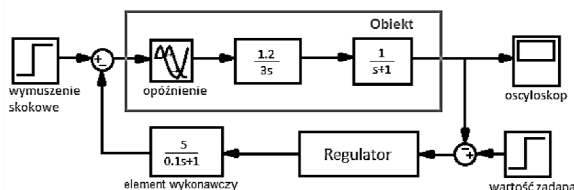
Jeżeli sygnałem wejściowym do regulatora jest sygnał opisany funkcją skoku jednostkowego (16) a sygnałem wyjściowym z regulatora jest sygnał opisany funkcją $y(t) = \sqrt{t}$. Transmitancją takiego regulatora jest: $G_{ulam4}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}}$. Przybliżając funkcję $g(s) = s^{\frac{1}{2}}$ wielomianem Taylora rzędu 50 w otoczeniu punktu $s_0 = 1$ otrzymujemy:

$$G_{ulam4}(s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot s^{\frac{1}{2}} \approx 0.886225(1 - 0.5(s-1) + 0.375(s-1)^2 - 0.3125(s-1)^3 + \dots + 0.0796(s-1)^{50}). \quad (16)$$

3.2. Symulacje układu regulacji

W celu zbudowania w programie MATLAB/Simulink regulatorów o transmitancjach (15) oraz (16) utworzono poszczególne człony regulatora niecałkowitego rzędu $\frac{1}{2}$ łącząc szeregowo bloki

o transmitancji $G(s) = \frac{s-1}{s+1}$. Liczba tych bloków odpowiada stopniowi wyrażenia $(s-1)$ we wzorach (15) i (16). Po syntezie poszczególnych członów zbudowano układ regulacji, w którym opóźnienie wynosi 0.1 s. Układ przedstawiony jest na rysunku 1.



Rys. 1. Schemat blokowy rozważanego układu regulacji zbudowany w programie MATLAB/Simulink

Fig. 1. Block diagram of the control system built in MATLAB/Simulink

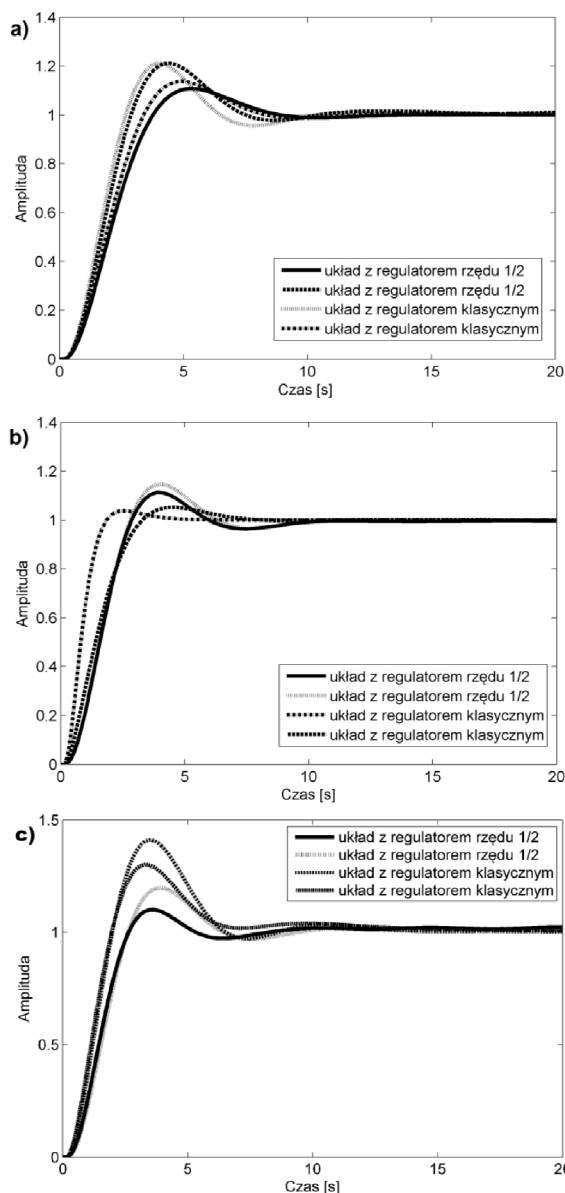
Transmitancja układu z regulatorem $PI^{1/2}D^{1/2}$ powstała ze złożenia transmitancji członów $I^{1/2}$ oraz $D^{1/2}$ opisanych wzorami (15) i (16).

Układ (rys. 1) będzie badany z wykorzystaniem regulatorów $PI^{1/2}$, $PD^{1/2}$, $PI^{1/2}D^{1/2}$ oraz z regulatorami klasycznym PI, PD, PID. Sygnałem wejściowym będą zmiany wartości zadanej. Badania będą prowadzone przy różnych wartościach nastaw regulatorów: k_p (współczynnik wzmocnienia), T_i (czas zdwojenia), T_d (czas wyprzedzenia), T (czas określony zależnością $\frac{T_d}{K_D}$). Wyniki symulacji przedstawiono na rysunku 2.

Zakłada się następujące wartości poszczególnych nastaw dla odpowiedzi na wartość zadaną układu:

- z regulatorem $PI^{1/2}$: $k_p = 0.287$, $T_i = 0.001$ oraz $k_p = 0.3529$, $T_i = 0.0369$,
- z regulatorem klasycznym PI: $k_p = 0.4301$, $T_i = 0.0001$ oraz $k_p = 0.32$, $T_i = 0.001$,
- z regulatorem $PD^{1/2}$: $k_p = 0.3114$, $T_d = 0.0602$ oraz $k_p = 0.3529$, $T_d = 0.0369$,
- z regulatorem klasycznym PD: $k_p = 0.6325$, $T_d = 0.4577$, $T = 0.1281$ oraz $k_p = 0.3682$, $T_d = 0.1511$, $T = 0.1$,
- z regulatorem $PI^{1/2}D^{1/2}$: $k_p = 0.14$, $T_i = 0.08$, $T_d = 0.15$ oraz $k_p = 0.3529$, $T_i = 0.0369$, $T_d = 0.0369$,
- z regulatorem klasycznym PID: $k_p = 0.54$, $T_i = 0.1$, $T_d = 0.1$, $T = 0.1$ oraz $k_p = 0.562$, $T_i = 0.07$, $T_d = 0.1511$, $T = 0.13$.

Analiza otrzymanych wyników pokazuje, że w przypadku regulatora proporcjonalno-całkującego mniejsze przeregulowanie osiąga układ z regulatorem niecałkowitego rzędu, natomiast czasy ustalania osiągają podobne wartości. W przypadku układu z regulatorem proporcjonalno-różniczkującym krótszy czas ustalania oraz mniejsze przeregulowanie osiąga układ z klasycznym regulatorem. Wartość czasu ustalania jak i wielkość przeregulowania wpływa na dynamikę układu. W przypadku układu z regulatorem proporcjonalno-różniczkującym lepszym regulatorem jest regulator klasyczny, ponieważ osiąga mniejsze wartości przeregulowania oraz krótszy czas ustalania. W przypadku układu z regulatorem proporcjonalno-całkującym wybór odpowiedniego rodzaju regulatora zależy od wymagań układu, ponieważ czasy ustalania są podobne dla regulatora klasycznego i niecałkowitego rzędu. Wybór regulatora również zależy od rodzaju obiektu. W niniejszej pracy użyto obiektu astatycznego (całkujący) z opóźnieniem. W przypadku układu z regulatorem proporcjonalno-całkująco-różniczkującym wartość przeregulowania uzyskuje większe wartości niż układ z regulatorem proporcjonalno-całkującym lub proporcjonalno-różniczkującym, natomiast czasy ustalania są porównywalne. Układ z regulatorem klasycznym proporcjonalno-całkująco-różniczkującym wykazuje znaczne różnice w wartościach przeregulowania niż układ z regulatorem niecałkowitego rzędu.



Rys. 2. Odpowiedź układu na wartość zadaną a) z regulatorem proporcjonalno-całkującym, b) z regulatorem proporcjonalno-różniczkującym, c) z regulatorem proporcjonalno-całkująco-różniczkującym

Fig. 2. Step responses of the control system with a) a proportional-integral controller, b) a proportional-derivative controller, c) a proportional-integral-derivative controller

Po dokonaniu symulacji porównano odpowiedzi układów. Analiza wykazuje, że w przypadku układu:

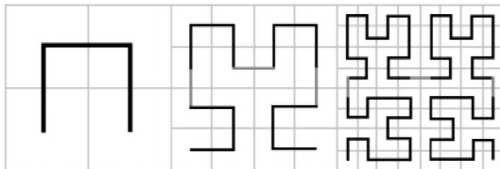
- z regulatorem $PI^{1/2}$: zwiększenie wartości współczynnika k_p wpływa na większą wartość przeregulowania, zwiększenie wartości współczynnika T_i wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi,
- z regulatorem klasycznym PI: zmniejszenie wartości współczynnika k_p wpływa na wartość przeregulowania, zwiększając współczynnik T_i otrzymujemy oscylacje, które wpływają na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi,
- z regulatorem $PD^{1/2}$: zwiększenie wartości współczynnika k_p wpływa na większą wartość przeregulowania, zwiększenie wartości współczynnika T_d wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi,
- z regulatorem klasycznym PD: zwiększenie wartości współczynnika k_p wpływa na większą wartość przeregulowania, zwiększenie wartości współczynnika T_d wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi, zwiększenie wartości współczynnika T wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi,

- e) z regulatorem $PI^{1/2}D^{1/2}$: zwiększenie wartości współczynnika k_p wpływa na większą wartość przeregulowania, zmniejszenie wartości współczynnika T_i wpływa na niwelowanie oscylacji odpowiedzi układu, zwiększanie wartości współczynnika T_d wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi,
- f) z regulatorem klasycznym PID : zwiększenie wartości współczynnika k_p wpływa na większą wartość przeregulowania, zmniejszenie wartości współczynnika T_i wpływa na niwelowanie oscylacji odpowiedzi układu, zwiększanie wartości współczynnika T_d wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi, zwiększenie wartości współczynnika T wpływa na dłuższy czas ustalania się odpowiedzi.

4. Regulator rzędu niecałkowitego zbudowany w oparciu o krzywą Hilberta

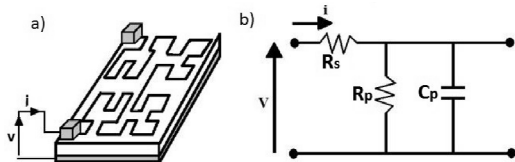
Fraktale znajdują zastosowanie w różnych dziedzinach życia takich jak: medycyna, biologia, psychologia, gospodarka leśna, analiza sygnałów, ekonomia [21]. Przykładem zastosowania fraktali w życiu codziennym oraz najnowszej technologii może być telefon komórkowy, który korzysta z wbudowanej anteny fraktalnej [4].

W pracy [7] wykorzystano obiekt fraktalny jakim jest krzywa Hilberta do wykonania płytki modelowej. Konstrukcję tej krzywej przedstawia rysunek 3. Krzywa Hilberta posiada wymiar fraktalny 2.



Rys. 3. Sposób konstrukcji krzywej Hilberta
Fig. 3. Hilbert's fractal structure

Na rysunku 4 przedstawiono schemat płytki modelowej z krzywą Hilberta oraz schemat układu elektrycznego z zaimplementowaną tego typu płytką.



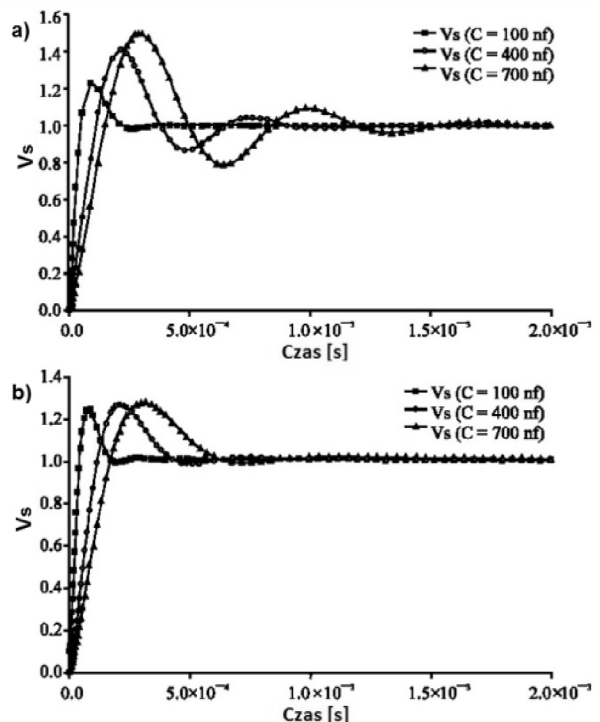
Rys. 4. a) Schemat płytki, b) schemat układu elektrycznego
Fig. 4. a) Hilbert's fractal structure component, b) electrical layout

W celu budowy omawianej płytki wytworzono elementy elektroniczne uzyskiwane w procesie mikro-elektroniki. Każdy z komponentów przedstawionych na rysunku 4a składa się z trzech warstw: metal-tlenek-półprzewodnik (ang. Metal-Oxide-Semiconductor), które rozpatrywane są jako kondensator. Jedną z okładek kondensatora złożona jest z krzemu. Struktura fraktalna jest odzwierciedlana na okładce kondensatora przez proces fotolitografii. Na tylnej części drugiej okładki znajduje się cienka warstwa aluminium osadzana w celu stworzenia masy. Okładki kondensatora są separowane tlenkiem krzemu SiO_2 , który działa jako dielektryk. Wyjścia z kondensatora są planowane tak, aby umożliwić wzajemne połączenie ich z układem pomiarowym przez proces nakładania warstw [7].

Z elektrycznego punktu widzenia, każdy segment ze strukturą fraktalną można zamodelować jako komórkę złożoną z R_s, C_p, R_p (rys. 4), gdzie R_s oraz C_p charakteryzują odpowiednio impedancję

oraz pojemność warstwy półprzewodnikowej. W połączeniu równoległym znajduje się rezystancja R_p oraz pojemność C_p . Rezystancja R_p jest tak zwaną rezystancją upływową, która charakterystyczna jest dla warstwy utworzonej z tlenków [7].

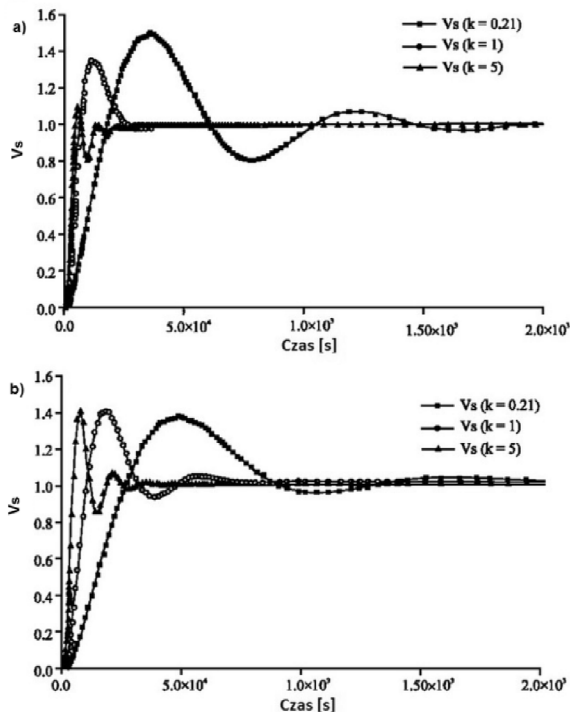
W przypadku regulatora proporcjonalno-różniczkującego powstałego w powyższym opisie transmitancja obiektu jest postaci: $G_1(s) = \frac{A}{s^2}$. Użycie regulatora proporcjonalno-różniczkującego zapewnia zapas fazy na poziomie 45° niezależnie od wielkości wzmocnienia [7]. Transmitancja tego regulatora wynosi: $G_{prop.-r\acute{o}z.}(s) = k\sqrt{s}$, gdzie k jest wartością podaną. W przypadku regulatora proporcjonalno-całkującego niecałkowitego rzędu transmitancja obiektu jest następująca: $G_2(s) = \frac{1}{T_s}$. Transmitancja regulatora proporcjonalno-całkującego wynosi [7]: $G_{prop.-cał.}(s) = \frac{k}{\sqrt{s}}$, gdzie k jest wartością podaną. Na rysunkach 5 oraz 6 przedstawiono odpowiedź układu z omówionymi wyżej regulatorami.



Rys. 5. Odpowiedź układu z regulatorem proporcjonalno-całkującym otrzymanego w pracy [7] a) układ z regulatorem klasycznym, b) układ z regulatorem niecałkowitego rzędu
Fig. 5. Step responses of the control system [7] with a) a classical proportional-integral controller, b) a proportional-integral controller of order $\frac{1}{2}$

Porównując odpowiedzi układu z regulatorem proporcjonalno-całkującym klasycznym oraz układu otrzymanego w pracy [7] można zauważyć, że układ z regulatorem rzędu $\frac{1}{2}$ osiąga mniejsze wartości przeregulowania i krótszy czas ustalania. Co więcej w odpowiedzi układu z regulatorem klasycznym pojawiają się oscylacje, które wpływają niekorzystnie na obiekt. W przypadku odpowiedzi układu z pracy [7] możemy zauważyć, że w układzie z klasycznym regulatorem również pojawiają się oscylacje, które wpływają na jakość regulacji.

Porównując odpowiedź układu z regulatorem proporcjonalno-różniczkującym otrzymanym w pracy [7] można zauważyć, że przeregulowanie i czas ustalania zależy od doboru parametrów układu oraz od rodzaju regulatora. W przypadku układu z regulatorem klasycznym można dobrać tak parametry, aby osiągał lepsze wskaźniki jakości układu, czyli krótszy czas ustalania oraz mniejsze przeregulowanie, niż z regulatorem $\frac{1}{2}$.



Rys. 6. Odpowiedź układu z regulatorem proporcjonalno-różniczkującym otrzymanego w pracy [7] a) układ z regulatorem klasycznym, b) układ z regulatorem niecałkowitego rzędu

Fig. 6. Step responses of the control system [7] with a) a classical proportional-derivative controller, b) a proportional-derivative controller of order $\frac{1}{2}$

Porównując wyniki badań symulacyjnych otrzymanych w tej pracy z wynikami otrzymanymi w pracy [7] można zauważyć, że wyniki symulacji pokrywają się wynikami teoretycznymi co do wartości przeregulowania. W odpowiedzi układu otrzymanych w tej pracy jak i w pracy [7] pojawiają się oscylacje, które wpływają niekorzystnie na jakość układu.

5. Podsumowanie i wnioski

W niniejszej pracy wykorzystano klasyczną definicję transmittancji do opisu układów z regulatorem niecałkowitego rzędu. Po dokonaniu badań symulacyjnych zauważono, że w przypadku obiektu astatycznego najlepszym regulatorem okazał się regulator proporcjonalno-całkujący niecałkowitego rzędu oraz regulator klasyczny proporcjonalno-różniczkujący. Właściwości regulacyjne układu zależą nie tylko od obiektu, który ma być wysterowany, ale również od rodzaju i parametrów regulatora. Analizy wyników otrzymanych w innych pracach pokazała, że układy z regulatorami niecałkowitego rzędu nie zawsze wykazują lepsze właściwości niż układy z regulatorami klasycznymi.

W pracy [7] został stworzony regulator za pomocą układu elektrycznego z krzywą Hilberta. Porównano wyniki badań symulacyjnych przedstawionych w tym artykule z wynikami badań otrzymanymi w pracy [7]. Z porównania wynika, że zbudowany układ z krzywą Hilberta zachowuje się jak układ z regulatorem rzędu $\frac{1}{2}$.

6. Literatura

- [1] Busłowicz M.: Robust stability of positive discrete-time linear systems of fractional order. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences. Technical Science*, 58 nr 4, s. 567-572, 2010.
- [2] Busłowicz M.: Wybrane zagadnienia z zakresu liniowych ciągłych układów niecałkowitego rzędu, *PAR*, nr. 2, 2010, p. 93-114.

- [3] Busłowicz M.: Nartowicz T.: Projektowanie regulatora ułamkowego rzędu dla określonej klasy obiektów z opóźnieniem. *PAR*, R. 13, nr 2, s. 398-405, 2009.
- [4] Chan K. H., Tang C. K., Fung L. C., Leung S. W., Siu Y. M.: Study of Using Fractional Phantom Head Model on SAR Evaluation in Mobile Antenna Design. *Asia-Pacific Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Singapore, s. 104-107, 2008.
- [5] Das S.: *Functional Fractional Calculus for System Identification and Controls*. Springer, Berlin, 2008.
- [6] Gertner M.: Porównanie wyników badań symulacyjnych układu regulacji z regulatorem klasycznym i regulatorem rzędu $\frac{1}{2}$. *Młodzi naukowcy dla polskiej nauki : materiały Konferencji Młodych Naukowców nt. : Wpływ młodych naukowców na osiągnięcia polskiej nauki : Nowe trendy w naukach inżynierskich*, cz. 10, Kraków, 2013, s. 57-64
- [7] Haba T. C., Loum G. L., Zoueu J. T., Ablart G.: Use of component with fractional impedance in realization of an analogical regulator of order $\frac{1}{2}$. *Journal of Applied Sciences* 8(1), s. 59-67, 2008.
- [8] Kaczorek T.: *Selected Problems of Fractional Systems Theory*. Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 2011.
- [9] Kaczorek T.: Realization Problem for Descriptor Positive Fractional Continuous-Time Linear Systems, *Springer, Volume 257*, 2013, pp 3-14.
- [10] Klamka J.: *Sterowalność układów dynamicznych*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1990.
- [11] Klamka J.: Local Controllability of Fractional Discrete-Time Semilinear Systems, *Acta Mechanica et Automatica*, vol.15, no.2, 2011, s. 55-58.
- [12] Leszczyński J.: *An introduction to fractional mechanics*. Wydawnictwo Politechniki Częstochowskiej, Częstochowa, 2011.
- [13] Lorenzo C.F., Hartley T.T.: *Initialized Fractional Calculus*. National Aeronautics and Space Administration, USA, 2000.
- [14] Matus R.: Application of fractional order calculus to control theory. *International journal of mathematical models and methods in applied sciences* vol. 5, USA, 2011.
- [15] Mozyrska D., Pawłuszewicz E.: Local controllability of nonlinear discrete-time fractional order systems. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences Technical Sciences*, Volume 61, Issue 1, s. 251-25, 2013.
- [16] Mozyrska D., Girejko E., Wyrwas M.: *Comparison of h-Difference Fractional Operators*, Springer, Volume 257, 2013, pp 191-197.
- [17] Ogata K.: *Modern Control Engineering*. Prentice Hall, New Jersey, 2011.
- [18] Ostalczyk P.: *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowania w automatyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź, 2008.
- [19] Petras I., Chen Y.: *Fractional-Order Circuit Elements with Memory*. 13th International Carpathian Control Conference (ICCC), Słowacja, 2012.
- [20] Podlubny I.: *Fractional differential equations*. Academic Press, San Diego, 1999.
- [21] Ratajczyk W.: *Metodologiczne aspekty fraktalnego modelowania*. UAM, Poznań, 1998.
- [22] Siemieniako F., Gosiewski Z.: *Automatyka T1 Modelowanie i analiza układów*. Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok, 2011.
- [23] Sierociuk D., Dzieliński A.: Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol.16, 2006, pp 129-140
- [24] Sierociuk D., Macias M.: Comparison of Variable Fractional Order PID Controller for Different Types of Variable Order Derivatives, 14th International Carpathian Control Conference (ICCC), s. 334-339, Kraków-Rytko, 2013.

otrzymano / received: 05.08.2013

przyjęto do druku / accepted: 03.02.2014

artykuł recenzowany / revised paper