

Maciej SIWCZYŃSKI, Andrzej DRWAL, Sławomir ŻABA
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, WIEIK,
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Minimalno – energetyczny rozkład napięciowych sygnałów elektrycznych w przestrzeni liniowej L^1 – impulsów

Prof. Maciej SIWCZYŃSKI

Prof. Maciej Siwczyński ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Śląskiej w Gliwicach, gdzie doktoryzował się w 1974 roku, a w 1983 uzyskał stopień doktora habilitowanego. Pracował na Politechnice Śląskiej, Politechnice Opolskiej i na Uniwersytecie Zielonogórskim. Obecnie jest profesorem zwyczajnym na Wydziale Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej Politechniki Krakowskiej. Jego działalność i aktywność naukowa obejmuje głównie teorię obwodów i sygnałów w powiązaniu z optymalnym sterowaniem.

Dr inż. Sławomir ŻABA

Ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Krakowskiej. W 2004 uzyskał stopień doktora na Akademii Górniczo – Hutniczej. Pracuje na Politechnice Krakowskiej na Wydziale Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej. Jego działalność i aktywność naukowa obejmuje głównie teorię obwodów i sygnałów oraz transmisję i przetwarzanie sygnałów.

e-mail: e-3@pk.edu.pl

Dr inż. Andrzej DRWAL

Ukończył Wydział Elektryczny Politechniki Krakowskiej. W 2004 uzyskał stopień doktora na Akademii Górniczo – Hutniczej. Pracuje na Politechnice Krakowskiej na Wydziale Inżynierii Elektrycznej i Komputerowej. Jego działalność i aktywność naukowa obejmuje głównie teorię obwodów i sygnałów oraz transmisję i przetwarzanie sygnałów.

Streszczenie

W artykule pokazano, że w obwodach sygnałów elektrycznych należących do przestrzeni L^1 - impulsów, występujący tam rzeczywisty rozkład napięć nie spełnia zasady minimum strat energetycznych. Przedstawiono rozwiązanie tego zagadnienia poprzez wprowadzenie sterowania źródłem prądowym w dwuadmitancyjnym obwodzie szeregowym i $n-1$ źródłami w n -admitancyjnym obwodzie. Wykazano, że wprowadzone sterowanie jest energetycznie obojętne.

Słowa kluczowe: obwód szeregowy, zasada minimum energii, przestrzenie liniowe, operatory splotowe, sterowanie optymalnoenergetyczne.

The minimally-energy distribution of voltage electrical signals in the linear space L^1 -pulse

Abstract

The paper presents that in circuits of electrical signals belonging to the L^1 -impulses space, the actual voltages distribution does not comply with the principle of minimum energy loss. The solution is presented to this issue through the introduction of the control system: the current source in two components series circuit and $n-1$ current sources in n -components circuit. It is demonstrated that the introduced control system is energy-neutral.

Keywords: series circuit, the minimum energy principle, linear spaces, convolution operators, energy neutral controlled voltage source.

1. Wstęp

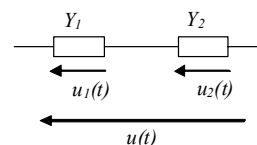
W obwodach prądu stałego obowiązuje zasada minimum energii, zgodnie z którą rozkład napięć w złożonej sieci jest taki, że całkowite straty energii w obwodzie są minimalne [1, 2]. Jednak zasada ta na ogół nie działa już w obwodzie prądu sinusoidalnego [3]. W artykule wykazano, że w obwodach z sygnałami należącymi do liniowej przestrzeni L^1 - impulsów, występujący tam rzeczywisty rozkład napięć także nie spełnia zasady minimum strat energii. Aby tak było, potrzebne jest sterowanie. Rozważono dwuadmitancyjny obwód szeregowy z rozdziałem napięciowym i sterowaniem napięciowo-prądowym.

Wykazano, że zastosowane źródło sterowane jest energetycznie obojętne. Zatem proces minimalno-energetycznego sterowania odbywa się bezenergetycznie. Przedstawiono jednak także uogólnienie zasady minimum strat energetycznych dla n -admitancyjnego obwodu szeregowego.

Przedstawiono dwa przykłady sterowań optymalnych. Pierwszy z udziałem regulatorów różniczkujących i drugi przykład z zastosowaniem operatorów z biegunami rzeczywistymi. Podano odpowiednio do tego interpretacje elektryczne RC i RL.

2. Zasada minimum strat energetycznych w przestrzeniach L^1 i P^T

Na rys. 1 przedstawiono rozkład napięć w szeregowym obwodzie prądu zmiennego, w którym poszczególne admitancje Y_1 i Y_2 są określone przez liniowe operatory czasowo-niezmiennicze.



Rys. 1. Rozkład napięć w admitancyjnym obwodzie szeregowym
Fig. 1. Decomposition of voltage in serial admittance circuit

Sygnały $u(t)$, $u_1(t)$, $u_2(t)$, należą do przestrzeni sygnałowej L^1 , tzw. przestrzeni L^1 - impulsów:

$$L^1 = \left\{ x(t) : \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty \right\} \quad (1)$$

albo do generowanej przez nią przestrzeni sygnałów T -okresowych [4, 5]:

$$P_T = \left\{ \tilde{x}(t) : \tilde{x}(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(t + pT); \quad x(t) \in L^1 \right\} \quad (2)$$

W przestrzeniach tych określony jest iloczyn skalarny; w L^1 :

$$(u, i) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)i(t) dt \quad (3)$$

a w P_T :

$$(u, i) = \int_0^T u(t)i(t) dt \quad (4)$$

Operator admitancji Y rozkłada się na dwie składowe G i B [6, 7]:

$$Y = \frac{1}{2}[Y + Y^*] + \frac{1}{2}[Y - Y^*] = G + B \quad (5)$$

gdzie:

$$G = \frac{1}{2}[Y + Y^*] \quad (6)$$

G - jest operatorem samosprężonym (hermitowskim) tj. $G^* = G$, oraz

$$B = \frac{1}{2}[Y - Y^*] \quad (7)$$

B - jest operatorem antyhermitowskim, $B^* = -B$.

Operator Y^* jest operatorem sprzężonym względem Y , tj. takim, że dla dowolnych sygnałów x, y : $(Yx, y) = (x, Y^*y)$. Operator G reprezentuje składową czynną operatora impedancji Y (operator stratności), a operator B jego składową bierną. Można wykazać, że dla funkcji zespolonych s -transformat zachodzi: $Y^*(s) = Y(-s)$.

Odpowiednia zasada minimum dla sygnałów napięciowych u_1, u_2 , odkładających się na dwóch komponentach określonych operatorami admittancji Y_1, Y_2 ma postać:

$$\begin{aligned} (G_1 u_1, u_1) + (G_2 u_2, u_2) &\rightarrow \text{MIN} \\ u_1 + u_2 &= u \end{aligned} \quad (8)$$

Zagadnienie to jest równoważne minimalizacji funkcjonału:

$$\begin{aligned} f(u_1) &= (G_1 u_1, u_1) + (G_2 (u - u_1), u - u_1) = \\ &= ((G_1 + G_2) u_1, u_1) - (G_2 u, u_1) - (G_2 u_1, u) + (G_2 u, u) \rightarrow \text{MIN} \end{aligned} \quad (9)$$

albo:

$$f(u_1) = ((G_1 + G_2) u_1, u_1) - 2(G_2 u, u_1) \rightarrow \text{MIN} \quad (10)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{1}{2}[Y_1 + Y_1^*] \\ G_2 &= \frac{1}{2}[Y_2 + Y_2^*] \end{aligned} \quad (11)$$

Wariacja funkcjonału ma postać:

$$\begin{aligned} \delta f(u_1) &= f(u_1 + \delta u_1) - f(u_1) = \\ &= (2(G_1 + G_2) u_1 - G_2 u, \delta u_1) + ((G_1 + G_2) \delta u_1, \delta u_1) \end{aligned} \quad (12)$$

Warunek konieczny i wystarczający „MIN f ” można zapisać w następującej formie:

$$\forall \delta u_1 \quad \delta f(u_1) > 0 \quad (13)$$

Skąd, przy dodatniej określoności operatorów G_1, G_2 :

$$\forall \delta u_1 \quad ((G_1 + G_2) u_1 - G_2 u, \delta u_1) = 0 \quad (14)$$

Zatem napięcie u_1 musi spełnić następujące równanie (tzw. równanie optymalizacyjne):

$$(G_1 + G_2) u_1 = G_2 u \quad (15)$$

Operatory Y_1, Y_2 są operatorami typu splotu (czasowa niezmienniczość), dlatego w przestrzeni L^1 równanie optymalizacyjne jest równaniem całkowym:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (g_1(t-t') + g_2(t-t')) u_1(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} g_2(t-t') u(t') dt' \quad (16)$$

a w przestrzeni P^T równaniem całkowym ze splotem cyklicznym:

$$\int_0^T (\tilde{g}_1(t \ominus t') + \tilde{g}_2(t \ominus t')) \tilde{u}_1(t') dt' = \int_0^T \tilde{g}_2(t \ominus t') \tilde{u}(t') dt' \quad (17)$$

a jądra operatorów całkowych, tj. funkcje $g_1(t)$ i $g_2(t)$ są odpowiedziami impulsowymi operatorów G_1 i G_2 gdzie symbol \ominus oznacza działanie odejmowania modulo T :

$$t \ominus t' = \begin{cases} t - t' & \text{dla } t - t' \in [0, T) \\ t - t' + T & \text{dla } t - t' \notin [0, T) \end{cases} \quad t, t' \in [0, T) \quad (18)$$

Rozwiązanie całkowego równania optymalizacyjnego można zapisać z użyciem operatora odwrotnego w następujący sposób:

$$u_1 = (G_1 + G_2)^{-1} G_2 u \equiv \frac{G_2}{G_1 + G_2} u \quad (19)$$

a dla napięcia u_2 otrzymuje się:

$$u_2 = (G_1 + G_2)^{-1} G_1 u \equiv \frac{G_1}{G_1 + G_2} u \quad (20)$$

Wyniki (19) i (20) nie pokrywają się z tymi, które otrzymuje się z praw Kirchhoffa (tzw. „dzielnik napięcia”):

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Rozwiązując układ równań liniowych (21) metodą Cramera otrzymuje się wyznaczniki:

$$W = Y_1 + Y_2; \quad W_1 = Y_2 u; \quad W_2 = Y_1 u \quad (22)$$

skąd:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{W_1}{W} = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} u \\ u_2 &= \frac{W_2}{W} = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} u \end{aligned} \quad (23)$$

Wprowadzając tzw. operator odchylenia między rozwiązaniem minimum a rozwiązaniem według prawa dzielnika napięcia dla u_1 można zapisać:

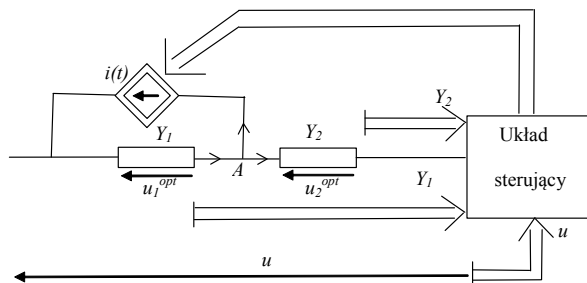
$$\Delta \rho_1^u = \frac{Y_2}{Y_1 + Y_2} - \frac{G_2}{G_1 + G_2} = \frac{G_1 Y_2 - G_2 Y_1}{(Y_1 + Y_2)(G_1 + G_2)} = \frac{Y_2 Y_1^* - Y_1^* Y_2}{Y^2 + Y Y^*} \quad (24)$$

a dla napięcia u_2 :

$$\Delta \rho_2^u = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2} - \frac{G_1}{G_1 + G_2} = \frac{G_2 Y_1 - G_1 Y_2}{(Y_1 + Y_2)(G_1 + G_2)} = \frac{Y_1 Y_2^* - Y_1^* Y_2}{Y^2 + Y Y^*} \quad (25)$$

gdzie: $Y = Y_1 + Y_2$.

Tak więc, w obwodzie prądu zmiennego z rys. 1 występujący tam rzeczywisty rozkład napięć nie spełnia zasady minimum strat energii. Aby tak było, potrzebne jest sterowanie z użyciem źródła prądowego o wydajności $i(t)$ sterowanego napięciem $u(t)$ [8] (rys. 2).



Rys. 2. Układ sterowania rozkładem napięcia u na optymalne napięcia u_1^{opt} i u_2^{opt}
Fig. 2. The control system of voltage distribution at the optimal voltages u_1^{opt} i u_2^{opt}

Sterowanie prądem źródłowym $i(t)$ następuje tak, aby zrealizowany był optymalny energetycznie rozdział napięcia u na u_1^{opt} , u_2^{opt} :

$$u_1^{opt} = \frac{G_2}{G_1 + G_2} u \equiv \rho_1^u u \quad (26)$$

$$u_2^{opt} = \frac{G_1}{G_1 + G_2} u \equiv \rho_2^u u$$

gdzie:

$$\rho_1^u = G_2(G_1 + G_2)^{-1} = G_1^{-1}(G_1^{-1} + G_2^{-1})^{-1} \quad (27)$$

$$\rho_2^u = G_1(G_1 + G_2)^{-1} = G_2^{-1}(G_1^{-1} + G_2^{-1})^{-1}$$

są operatorami rozdziału napięcia u na napięcia u_1^{opt} , u_2^{opt} . Dla operatorów ρ_1^u oraz ρ_2^u zachodzi:

$$(\rho_1^u)^* = \rho_1^u \quad (28)$$

$$(\rho_2^u)^* = \rho_2^u$$

czyli są to operatory hermitowskie.

Prąd źródłowy i musi spełniać wtedy równanie Kirchhoffa (dla węzła A):

$$i - Y_1 u_1^{opt} + Y_2 u_2^{opt} = 0 \quad (29)$$

skąd otrzymuje się warunek sterowania

$$i = Y_1 u_1^{opt} - Y_2 u_2^{opt} = \frac{G_2 Y_1 - G_1 Y_2}{G_1 + G_2} u = \frac{Y_1 Y_2^* - Y_1^* Y_2}{Y^2 + Y Y^*} u = C^Y u \quad (30)$$

gdzie: C^Y – admitancyjny operator sterowania spełniający warunek:

$$(C^Y)^* = -C^Y \quad (31)$$

czyli C^Y jest operatorem antyhermitowskim.

Na podstawie (28) oraz (31) można wykazać, że odpowiednie iloczyny skalarnie spełniają następujące warunki:

$$(C^Y u, u) = -(C^Y u, u) \rightarrow (i, u) = 0 \quad (32)$$

$$(C^Y u, \rho_1^u u) = -(C^Y u, \rho_1^u u) \rightarrow (i, u_1^{opt}) = 0$$

$$(C^Y u, \rho_2^u u) = -(C^Y u, \rho_2^u u) \rightarrow (i, u_2^{opt}) = 0$$

co oznacza, że sygnał prądu źródłowego $i(t)$ jest ortogonalny do sygnałów napięć u , u_1^{opt} , u_2^{opt} , czyli zastosowane źródło jest energetycznie obojętne tj. proces minimalno-energetycznego sterowania odbywa się bezenergetycznie.

Z wyrażen dla operatora sterowania C^Y (30), a także z wyrażen na operatory odchylenia (24), (25) wynika, że naturalne warunki minimalnoenergetycznego rozkładu napięć tzn. warunki, które nie wymagają sterowania są następujące:

$$\text{albo } Y_1(s)Y_2(-s) = Y_1(-s)Y_2(s) \quad (33)$$

ponieważ wtedy zarówno operator sterowania jak i operatory odchylenia są jednocześnie operatorami zerowymi.

3. Uogólnienie zasady minimum strat energetycznych dla n -admitancyjnego obwodu szeregowego

Uogólnione rozwiązania zasady minimum strat energetycznych dla n -admitancyjnego obwodu szeregowego określają dystrybucję napięć na poszczególne komponenty k scharakteryzowane operatorami admityncyjnymi, z rozkładem G, B $Y_k = G_k + B_k$:

$$u_k^{opt} = \rho_k^u u \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (34)$$

Operatory ρ_k^u rozdziału napięcia u na napięcia u_k^{opt} mają postać:

$$\rho_k^u = \frac{1}{G_k \sum_{m=1}^n G_m^{-1}} = \frac{G_{12\dots n}}{G_k \sum_{m=1}^n G_{12\dots n}^{-1} G_m^{-1}} = \frac{G_{12\dots n}}{G_k M} \quad (35)$$

gdzie operatory $G_{12\dots n}$ oraz M określone są wzorami:

$$G_{12\dots n} = G_1 G_2 \dots G_n; \quad (36)$$

$$M = \sum_{m=1}^n G_{12\dots n} G_m^{-1} = G_{12\dots n} \sum_{m=1}^n G_m^{-1} \quad (37)$$

Sygnały wydajności prądowych źródeł sterujących:

$$i_k = C_k^Y u \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (38)$$

Transadmitancyjne operatory sterowania C_k^Y zdefiniowane są wyrażeniami:

$$C_k^Y = Y_k \rho_k^u - Y_n \rho_n^u = \frac{1}{2} G_k^{-1} G_n^{-1} \left(\sum_{m=1}^n G_m^{-1} \right)^{-1} (Y_k Y_n^* - Y_k^* Y_n) \quad (39)$$

i są one antyhermitowskie, tj.:

$$(C_k^Y)^* = -C_k^Y \quad k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (40)$$

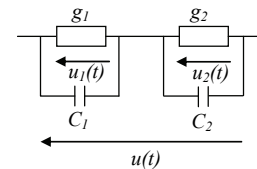
Przykład 1

W przykładzie przedstawiono optymalny rozdział napięcia w obwodzie szeregowym, którego operatory admityncji poszczególnych gałęzi składowych opisuje zależność:

$$Y_1(s) = g_1 + sC_1 \quad (41)$$

$$Y_2(s) = g_2 + sC_2$$

Schemat układu elektrycznego, dla admityncji, określonych zależnościami (41) przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Szeregowy obwód konduktancyjno-pojemnościowy
Fig. 3. The serial conductance-capacitive circuit

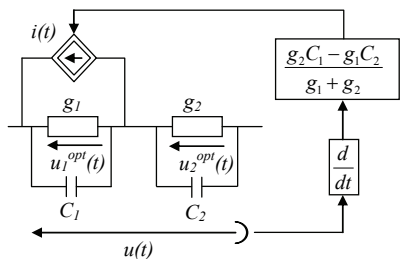
Operatory stratności G_1 i G_2 przyjmują postać:

$$G_1(s) = g_1; \quad G_2(s) = g_2 \quad (42)$$

i są one bezdispersyjne (nie zależą od s). Operator sterowania C^Y opisuje zależność:

$$C^Y(s) = \frac{g_2(g_1 + sC_1) - g_1(g_2 + sC_2)}{g_1 + g_2} = \frac{g_2 C_1 - g_1 C_2}{g_1 + g_2} s \quad (43)$$

Schemat układu sterowania optymalnego rozdziału napięcia $u(t)$ dla obwodu z rys. 3 zawiera pojedynczy regulator różniczkujący i jest przedstawiony na rys. 4.



Rys. 4. Schemat układu sterowania w obwodzie szeregowym
Fig. 4. Schematic of the control system in a serial circuit

Warunek rozkładu naturalnego, na podstawie zależności (33) przyjmuje postać:

$$\frac{C_1}{g_1} = \frac{C_2}{g_2} \quad (44)$$

i oznacza on równość stałych czasowych w poszczególnych gałęziach szeregowych.

Przykład 2

W przypadku, gdy admitancyjne operatory poszczególnych gałęzi mają pojedyncze bieguny rzeczywiste, tj. :

$$Y(s)_1 = \frac{a_1}{b_1 + s} \quad \text{przy } a_1, a_2 > 0 \quad (45)$$

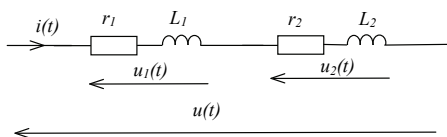
$$Y(s)_2 = \frac{a_2}{b_2 + s} \quad b_1, b_2 > 0$$

wówczas operatory stratności czynnej są dyspersyjne (zależą od s):

$$G_1(s) = \frac{a_1 b_1}{b^2 - s^2} \quad (46)$$

$$G_2(s) = \frac{a_2 b_2}{b^2 - s^2} \quad (47)$$

Przykładem obwodu, którego impedancje gałęziowe są określone zależnościami (45) może być układ pokazany na rys. 5.



Rys. 5. Szeregowy obwód rezystancyjno-indukcyjny
Fig. 5. The serial resistive-inductive circuit

Operator sterowania $C^Y(s)$ na podstawie (30) może być przedstawiony w postaci:

$$C^Y(s) = \frac{1}{2} \frac{Y_1(s)Y_2(-s) - Y_1(-s)Y_2(s)}{G_1(s) + G_2(s)} = \frac{as}{b^2 - s^2} \quad (48)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$G_1(s) + G_2(s) = \frac{b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 + b_1) - (a_1 b_1 + a_2 + b_2) s^2}{(b_1^2 - s^2)(b_2^2 - s^2)} \quad (49)$$

oraz

$$\frac{1}{2} (Y_1(s)Y_2(-s) - Y_1(-s)Y_2(s)) = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{(b_1^2 - s^2)(b_2^2 - s^2)} s \quad (50)$$

otrzymuje się operator sterowania w postaci:

$$C^Y(s) = \frac{as}{b^2 - s^2} \quad (51)$$

gdzie:

$$b^2 = \frac{b_1 b_2 (a_1 b_2 + a_2 b_1)}{a_1 b_1 + a_2 b_2} \quad a = \frac{a_1 a_2 (b_1 - b_2)}{a_1 b_1 + a_2 b_2} \quad (52)$$

Dokonując rozkładu operatora sterowania $C^Y(s)$ na ułamki proste otrzymuje się postać czasową operatora sterowania, zawierającą składniki: przyczynowy i antyprzyczynowy:

$$C^Y(s) = \left[\frac{as}{(b-s)(b+s)} \right] \Leftrightarrow -\frac{a}{2} e^{-bt} \mathbf{1}(t) + \frac{a}{2} e^{bt} \mathbf{1}(-t) \in L^1 \quad (53)$$

$\mathbf{1}(t)$ - skok jednostkowy.

Stąd wynika funkcja impulsowa operatora sterowania $C^Y(s)$ w postaci

$$C^Y(t) = \frac{1}{2} [C(t) - C^*(t)] \quad (54)$$

gdzie:

$$C(t) = -ae^{-bt} \mathbf{1}(t) \quad (55)$$

a operator $C^*(t)$ jest operatorem sprzężonym względem operatora $C(t)$. Można wykazać, że w przestrzeni L^1 -impulsów $C^*(t) = C(-t)$ [5, 6].

Dokonując periodycznego powielenia operatora $C(t)$ według zależności (2) otrzymuje się:

$$\tilde{C}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} C(t + pT) = -\frac{ae^{-bt}}{1 - e^{-bT}} \quad \text{dla } t \in [0, T) \quad (56)$$

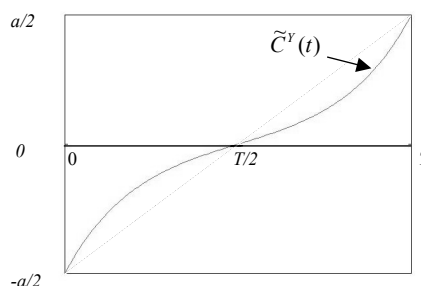
skąd, wyrażenie na operator sterowania w przestrzeni P^T przyjmuje postać:

$$\tilde{C}^Y(t) = \frac{1}{2} [\tilde{C}(t) - \tilde{C}(T-t)] = \frac{1}{2} a \frac{e^{b(t-\frac{T}{2})} - e^{-b(t-\frac{T}{2})}}{e^{\frac{bT}{2}} - e^{-\frac{bT}{2}}} \quad (57)$$

Ostatecznie, cykliczną funkcję impulsową operatora sterowania określa wzór:

$$\tilde{C}^Y(t) = \frac{1}{2} a \frac{\text{sh}b(t - \frac{T}{2})}{\text{sh}b\frac{T}{2}}, \quad \text{dla } t \in [0, T) \quad (58)$$

a jej przebieg przedstawia wykres na rys. 6.



Rys. 6. Przebieg funkcji operatora $\tilde{C}^Y(t)$ w przedziale czasu $t \in [0, T)$
Fig. 6. The graph of operator function $\tilde{C}^Y(t)$ in the time interval $t \in [0, T)$

Signal wydajności źródła prądowego w przestrzeni P^T wyrażony jest zależnością:

$$\tilde{i}(t) = \int_0^T \tilde{C}^Y(t-t') i(t') dt' = \int_0^t \tilde{C}^Y(t-t') i(t') dt' + \int_t^T \tilde{C}^Y(t-t'+T) i(t') dt' \quad \text{dla } t \in [0, T) \quad (59)$$

Operatory rozdziału optymalnego napięć wynoszą:

$$\rho_1^u(s) = \frac{R_2(s)}{R_1(s) + R_2(s)} = \gamma_1 \frac{b_1^2 - s^2}{b^2 - s^2} \quad (60)$$

$$\rho_2^u(s) = \frac{R_1(s)}{R_1(s) + R_2(s)} = \gamma_2 \frac{b_2^2 - s^2}{b^2 - s^2} \quad (61)$$

gdzie

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}} \quad \gamma_2 = \frac{\frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}}{1 + \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}} \Rightarrow \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \quad (62)$$

Rozkładając operatory $\rho_1^u(s)$, $\rho_2^u(s)$ na ułamki proste otrzymuje się:

$$\rho_1^u(s) = \gamma_1 \left[1 + \frac{b_1^2 - b^2}{2b} \left(\frac{1}{b+s} + \frac{1}{b-s} \right) \right] \quad (63)$$

$$\rho_2^u(s) = \gamma_2 \left[1 + \frac{b_2^2 - b^2}{2b} \left(\frac{1}{b+s} + \frac{1}{b-s} \right) \right] \quad (64)$$

W przestrzeni L_1 operatory ρ_1^u , ρ_2^u przyjmują postać:

$$\rho_{1,2}^u(t) = \gamma_{1,2} \left[\delta(t) + \frac{b_{1,2}^2 - b^2}{2b} (\rho(t) + \rho^*(t)) \right] \quad (65)$$

$$\rho(t) = e^{-bt} \mathbf{1}(t)$$

$\delta(t)$ - impuls Diraca.

Dokonując periodycznego rozprzestrzenienia operatora $\rho(t)$ otrzymuje się:

$$\tilde{\rho}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} e^{-b(t+T)} = \frac{e^{-bt}}{1 - e^{-bT}} \quad t \in [0, T) \quad (66)$$

skąd, wyrażenie (63) w przestrzeni P^T przyjmuje postać:

$$\tilde{\rho}_{1,2}^u(t) = \gamma_{1,2} \left[\delta(t) + \frac{b_{1,2}^2 - b^2}{2b} (\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(T-t)) \right] \quad (67)$$

Można wykazać, że:

$$\tilde{\rho}(t) + \tilde{\rho}(T-t) = \frac{e^{-bt} + e^{-b(T-t)}}{1 - e^{-bT}} = \frac{e^{\frac{b}{2}(T-t)} + e^{-\frac{b}{2}(T-t)}}{e^{\frac{bT}{2}} - e^{-\frac{bT}{2}}} = \frac{chb \left(\frac{T-t}{2} \right)}{shb \frac{T}{2}} \quad (68)$$

Zatem operatory optymalnego rozdziału przyjmują ostatecznie postać:

$$\tilde{\rho}_{1,2}^u(t) = \gamma_{1,2} \left[\delta(t) + \frac{b_{1,2}^2 - b^2}{2b} \frac{chb \left(\frac{T-t}{2} \right)}{shb \frac{T}{2}} \right] \quad \text{dla } t \in [0, T) \quad (69)$$

Zgodnie z zależnością (48) warunek rozplywu naturalnego jest spełniony, gdy:

$$Y_1(s)Y_2(-s) = Y_1(-s)Y_2(s) \quad (70)$$

skąd

$$\frac{a_1}{b_1 + s} \frac{a_2}{b_2 - s} = \frac{a_1}{b_1 - s} \frac{a_2}{b_2 + s} \quad (71)$$

albo:

$$(b_1 + s)(b_2 - s) = (b_1 - s)(b_2 + s) \quad (72)$$

skąd $b_1 = b_2$, czyli bieguny admittancji Y_1 i Y_2 muszą być takie same.

W takim przypadku sterowanie nie jest potrzebne – optymalny rozplyw prądów jest spełniony w sposób naturalny.

4. Wnioski

W artykule w ogólny sposób przedstawiono rozdział sygnału napięcia na dwie lub więcej gałęzi szeregowych w taki sposób, aby zminimalizować całkowite straty energii w obwodzie. Sygnał napięciowy podlegający optymalnemu rozdziałowi może mieć przebieg impulsowy, albo okresowy i w zależności od tego jest zakwalifikowany albo do przestrzeni funkcyjnej L^1 , albo do generowanej przez nią przestrzeni liniowej P^T . Natomiast gałęzie składowe obwodu są scharakteryzowane liniowymi, czasowo niezmienniczymi operatorami typu admittancyjnego. Na ogół operatory te zadane są funkcjami wymiernymi zmiennej zespolonej w taki sposób, aby spełniały warunki stawiane gałęziom pasywnym RLC.

W artykule wykazano, że optymalny w sensie minimum strat energii rozkład napięć nie jest naturalny lecz uzyskiwany jest za pomocą napięciowo-prądowego sterowania, które na ogół jest zrealizowane za pomocą pasywnego, źródła prądu sterowanego napięciowo, lub zespołu takich źródeł.

W artykule wyznaczono antyhermitowski (pasywny) operator sterowania dla takiego źródła. Okazuje się jednak, że w pewnych szczególnych przypadkach optymalny rozdział napięcia jest możliwy bez udziału sterowań napięciowo-prądowych.

Przypadek ten zachodzi gdy spełniony jest warunek naturalnego dopasowania gałęzi składowych (33), który można też zapisać w postaci: $\frac{Y_1(s)}{Y_2(s)} = \frac{Y_1(-s)}{Y_2(-s)}$ w szczególności ma to miejsce gdy:

$Y_{1,2}(-s) = Y_{1,2}(s)$ lub $Y_{1,2}(-s) = -Y_{1,2}(s)$ co sprawia, że w rozkładach $Y(s) = G(s) + X(s)$ funkcje $B_{1,2}(s) = 0$ lub $G_{1,2}(s) = 0$ i co jednocześnie oznacza, że w pierwszym przypadku gałęzie są czysto rezystancyjne, a w drugim przypadku czysto reaktancyjne.

5. Literatura

- [1] Desoer C. A.: The maximum power transfer theorem for n-ports. IEEE Trans. Vol. CT-20, 1979, pp. 228-230.
- [2] Rohrer R. A.: Optimal matching: A new approach to the matching problem for real invariant one port networks. IEEE Trans. Vol. CT-15, 1968, pp. 118-124.
- [3] Siwczyński M., Drwał A., Żaba S.: Minimalno – energetyczny rozkład sygnałów sinusoidalnych w obwodach elektrycznych. Wiadomości Elektrotechniczne 9/2014.
- [4] Siwczyński M., Jaraczewski M.: The L1 –impulse method as an alternative to the Fourier series in the power theory of continuous time systems. Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie. vol. 57, No 1.2009, pp.79-85.
- [5] Siwczyński M., Jaraczewski M.: Application of L1 –impulse method to the optimization problems in power theory. Bull. of the Polish Acad. of Science, Techn. Scie. vol. 58, No 1.2010.
- [6] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny w dziedzinie czasu – obwody jednofazowe. Przegląd Elektrotechniczny 6/2010 ss. 196-201.
- [7] Siwczyński M.: Rozkłady: prąd aktywny, prąd rozrzutu, prąd bierny, prąd niesymetrii w dziedzinie czasu – obwody trójfazowe. Przegląd Elektrotechniczny 8/2010 ss. 210-213.
- [8] Siwczyński M.: Energetyczna teoria obwodów. Wydawnictwo Instytutu Gospodarki Surowcami Mineralnymi i Energią PAN, Kraków 2003.