

UKD 622.333: 622.624.044: 622.2-045.43

Funkcje aproksymujące przeciętny przebieg wskaźników deformacji dla wyznaczania parametrów rozproszenia losowego pogórnich przemieszczeń i deformacji powierzchni terenu

Functions approximating the average course of deformation indicators for the determination of the random dispersion parameters of the post-mining dislocations and land surface deformations



*Dr inż. Tomasz Stoch**



*Dr hab. inż. Zygmunt Niedojadło -
prof. AGH**



*Dr inż. Paweł Sopata**



*Mgr inż. Szczepan Moskala***

Treść: W artykule przedstawiono zagadnienie rozproszenia losowego procesu przemieszczeń i deformacji powierzchni terenu w aspekcie wyznaczania przeciętnych przebiegów wskaźników deformacji oraz wpływu metody aproksymacji na uzyskiwane wartości parametrów rozproszenia procesu. Porównano metody estymacji oparte na krzywych splajnowych, wielomianach ortogonalnych, funkcjach teorii Knothe oraz ich zmodyfikowanych wersjach o zwiększonej „elastyczności”. Przydatność do aproksymacji zobrazowano na kilku praktycznych przykładach obserwacji procesu deformacji metodami geodezyjnymi w liniach obserwacyjnych dla różnych warunków prowadzenia eksploatacji górniczej. Uzyskane wyniki pozwoliły na sformułowanie wniosków na temat przydatności poszczególnych funkcji, a także określenie optymalnego modelu nieliniowego dla aproksymacji przeciętnych przebiegów wskaźników deformacji.

Abstract: This paper presents the issue of random dispersion of the process of dislocations and deformations of land surface in the aspect of the determination of deformation indicators' average courses and effects of the approximation method on the obtained dispersion process parameter values. It compares methods of estimation based on splines, orthogonal polynomials, the Knothe theory functions and their modified versions of increased “flexibility”. The suitability for approximation was illustrated on the basis of several practical examples of selected deformation process observations by use of geodetic methods in observation lines for various mining conditions. The obtained results allowed to draw up conclusions regarding the usability of given functions and to determine an optimum non-linear model for the approximation of the average courses of deformation indicators

*) AGH w Krakowie **) MGGP S.A.

Słowa kluczowe:

wpływy eksploatacji górniczej, proces deformacji powierzchni terenu, wskaźniki deformacji, rozproszenie losowe wskaźników deformacji

Key words:

influences of mining exploitation, land surface deformation process, deformation indicators, random dispersion of deformation indicators

1. Wprowadzenie

Badania deformacji na terenach górniczych kopalń opierają się w większości na metodach geodezyjnych. Pomiaru prowadzone są głównie na punktach linii obserwacyjnych oraz sieciach punktów rozproszonych, a zatem klasycznie. Wyniki takich pomiarów obejmują nierzadko okres wielu lat. Z tego względu zakłady górnicze, rejestrując długoterminowy stan deformacji, pozostają przy dotychczasowych metodach obserwacji skutków prowadzenia eksploatacji górniczej.

Wyniki prowadzonych obserwacji pozwalają na obliczenie wartości wskaźników deformacji opisujących bieżący stan deformacji powierzchni terenu. Wyznaczone wzdłuż linii obserwacyjnych przebiegi wskaźników deformacji odbiegają od tych, które prezentują zależności teoretyczne, m.in. w zakresie ich regularności. Jest to spowodowane przez wpływ wielu czynników naturalnych kształtujących proces deformacji, z tego względu można ich wpływ uznać za losowy [7].

W związku ze stwierdzonym losowym charakterem procesu deformacji [5,3,7] wykorzystywanie deterministycznych wartości wskaźników deformacji do oceny zagrożenia terenu górniczego jest niepełne. W takim przypadku należy brać pod uwagę również wartości parametrów rozproszenia losowego i to możliwie wyznaczone lokalnie.

Rozproszenie losowe może mieć różny wpływ na obserwowane wartości wskaźników deformacji. Obserwowane są zarówno bardzo zaburzone losowo przebiegi wskaźników deformacji, jak i stosunkowo regularne. Wpływ rozproszenia losowego, w świetle dotychczas przeprowadzonych badań [7, 9] w największym stopniu zależy od:

- budowy litologicznej górotworu charakteryzowanej m.in. przez jego zwięzłość,
- grubości nadkładu luźnego,
- długości bazy pomiarowej, czyli średniej odległości pomiędzy punktami linii obserwacyjnej.

Ze względu na różny wpływ czynników na wielkość rozproszenia losowego zalecane jest wyznaczanie jego podstawowych parametrów w danych warunkach geologiczno-górnicych, w jakich proces zachodzi. W tym celu należy zastosować procedurę aproksymacji przeciętnego przebiegu wskaźnika deformacji, czyli wolego od udziału czynników losowych. Uzyskuje się to poprzez estymację nieliniową funkcją optymalnie opisującą nielosową postać analizowanego wskaźnika deformacji. Wybór odpowiedniego modelu estymacji może mieć wpływ na wartości uzyskiwanych parametrów rozproszenia losowego ze względu na charakterystykę losowych odchyłek wartości obserwowanych wskaźnika deformacji od jego wartości przeciętnych. Odchyłki te definiują podstawowe parametry rozproszenia losowego procesu deformacji.

2. Parametry losowego rozproszenia wskaźników deformacji

Do analizy rozproszenia losowego poszczególnych wskaźników deformacji przyjmuje się odchylenie standardowe, które wyznacza się według wzoru

$$\sigma_D = \sqrt{E(\delta_i)^2} = \sqrt{E[D(x_i) - \bar{D}(x_i)]^2} \quad (1)$$

gdzie:

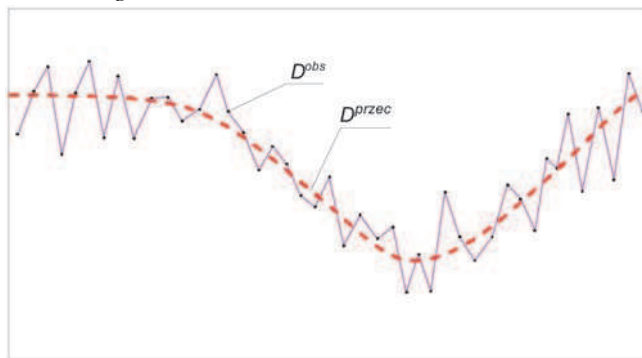
$D(x_i)$ – zaobserwowany przebieg wskaźnika deformacji D^{obs} jako zmienna losowa (rys. 1),

$\bar{D}(x_i)$ – przeciętny przebieg wskaźnika deformacji jako D^{przec} wartość oczekiwana zmiennej losowej (rys. 1),

$\delta_i = D(x_i) - \bar{D}(x_i)$, gdzie $t = 1, 2, 3, \dots, n$,

n – liczba punktów lub odcinków linii obserwacyjnej podlegających analizie.

Wartości odchylenia standardowego wskaźników deformacji różnią się, tak jak różnie przebiega proces deformacji w zależności od specyfiki warunków geologiczno-górnicych. Z tego względu, aby możliwe było porównanie rozproszenia losowego dla zmiennych warunków prowadzenia eksploatacji, wykorzystuje się tzw. współczynnik zmienności M_D , który normuje σ_D wartością maksymalnej wartości wskaźnika.



Rys. 1. Obserwowany (D^{obs}) i przeciętny (D^{przec}) przebieg wskaźnika deformacji

Fig. 1. Observed (D^{obs}) and average (D^{przec}) course of deformation indicator

$$M_D = \frac{\sigma_D}{|D_{max}^{przec}|} \quad (2)$$

gdzie:

$|D_{max}^{przec}|$ – bezwzględna, maksymalna wartość przeciętnego przebiegu wskaźnika deformacji D^{przec}

Z racji tego, że badane funkcje w różnym stopniu mogą opisywać wyniki obserwacji, możliwe jest sprawdzenie dobroci dopasowania poprzez analizę współczynnika determinacji R^2 . Jest on jedną z podstawowych miar jakości dopasowania modelu i stwierdza, jaka część zmienności zmiennej zależnej została wyjaśniona przez model.

3. Aproksymacja przeciętnego przebiegu wskaźników deformacji

Teoria aproksymacji jest bardzo rozbudowana, Obejmuje szereg zagadnień związanych z zastąpieniem pewnej funkcji lub określonej tablicy wartości poprzez inną funkcję (funkcję aproksymującą).

Bardzo ważny jest odpowiedni dobór metody i funkcji aproksymującej, który związany jest z występowaniem błędów przybliżenia opisu. Z reguły stosuje się przybliżenie średniokwadratowe (MKN). Zaletą tej metody jest to, że ukazuje przebieg danego zjawiska praktycznie wolny od udziału czynnika losowego. Należy przy tym przyjąć pewne założenie, że pojedyncza obserwacja zjawiska jest wielokrotną realizacją procesu w poszczególnych punktach jego obserwacji, co odpowiada założeniu o jednorodności ośrodka.

Procedura aproksymacji oraz ocena jej dokładności polega na ustaleniu modelu aproksymującego, czyli postaci nieliniowej funkcji przybliżającej przeciętny przebieg wskaźnika deformacji, np k-parametrową funkcją

$$y = G(X) = G(x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) \quad (3)$$

gdzie:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ – parametry funkcji aproksymującej $G(X)$

Aproksymację wykonujemy metodą najmniejszych kwadratów poprzez minimalizację funkcji straty

$$G(x, a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^n [D(X_i) - \bar{D}(X_i)]^2 \quad (4)$$

gdzie:

n – liczba obserwacji,

$D(X_i)$ – obserwowana wartość wskaźnika deformacji w i -tym punkcie,

$\bar{D}(X_i)$ – wartość funkcji aproksymującej przebieg danego wskaźnika deformacji w i -tym punkcie.

Kolejnym krokiem po osiągnięciu minimum funkcji straty jest wyznaczenie estymatora odchylenia standardowego dla analizowanego wskaźnika deformacji z n -elementowej próby za pomocą wzoru

$$\sigma_D^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^n [D(X_i) - \bar{D}(X_i)]^2 \quad (5)$$

gdzie:

k – liczba parametrów funkcji aproksymującej,

σ_D – estymator odchylenia standardowego dowolnego wskaźnika (np. obniżenia, $D=w$).

4. Funkcje aproksymujące

Model matematyczny opisujący przeciętny przebieg wskaźnika deformacji powinien spełniać pewne założenia, aby otrzymany efekt końcowy można było uznać za przybliżenie nielosowej postaci wskaźnika deformacji zaobserwowanego w warunkach rzeczywistych. Funkcja taka powinna cechować się przede wszystkim odpowiednią elastycznością, aby mogła dopasować się do obserwowanego przebiegu wskaźnika deformacji, a także odpowiednio oddać charakterystyczne jego cechy, tak by możliwe było, podobnie jak w teorii, przedstawienie fizycznego sensu uzyskanego wyniku. Z tego względu dobór odpowiednich funkcji aproksymacyjnych nie jest łatwy.

W artykule podjęto problem doboru optymalnych funkcji dla estymacji przeciętnego przebiegu wskaźników deformacji, kierując się przedstawionymi kryteriami. Dla realizacji zamierzonego celu przyjęto kilka funkcji nieliniowych, takich jak: krzywe splajnowe, wielomiany ortogonalne, funkcje opisujące wskaźniki deformacji w teorii Knothea oraz ich zmodyfikowane wersje o zwiększonej elastyczności. Przydatność do aproksymacji zobrazowano na kilku praktycznych przykładach obserwacji procesu deformacji metodami geodezyjnymi w liniach obserwacyjnych dla różnych wa-

runków prowadzenia eksploatacji górniczej. Rozpatrywano wskaźniki deformacji najczęściej wykorzystywane do oceny zagrożenia terenu górniczego, tj. obniżenia, nachylenia oraz odkształcenia poziome.

4.1. Funkcje sklejjane

Przez funkcję sklejjaną rozumie się każdą funkcję przedziałami wielomianową. Przybliżenie pewnej nieznanej funkcji za pomocą funkcji sklejjanych, polega na tym, że dokonuje się interpolacji przedziałowo, wielomianami niskiego stopnia, sklejjonymi w taki sposób, aby globalnie uzyskać pewien określony stopień gładkości [10]. Dla przedziału $[a, b]$ zawierającego $n+1$ węzłów interpolacyjnych tworzy się m przedziałów:

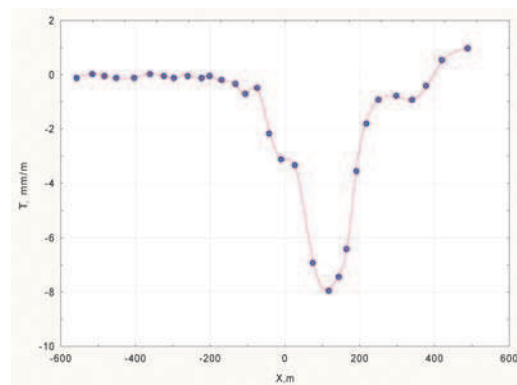
$$\begin{matrix} t_0 \dots t_1 \\ t_1 \dots t_2 \\ \dots \\ t_{m-1} \dots t_m \end{matrix}$$

takich, że $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$

W każdym z tych przedziałów interpoluje się funkcję wielomianem niskiego stopnia, a następnie łączy się je tworząc funkcję sklejjaną zwaną też splajnem. Funkcja sklejjana S jest funkcją interpolującą funkcję F , jeżeli

$F(x_i) = S(x_i)$ dla $x_i \in 0, 1, \dots, n$ będącymi węzłami interpolacyjnymi funkcji F

Z tej zależności wynika, że splajn przebiega dokładnie przez punkty reprezentujące przybliżoną funkcję, zatem różnice pomiędzy zaobserwowanym a przeciętnym (wyinterpolowanym) przebiegiem wskaźnika w tych punktach wynoszą zero. Wartość wyznaczonego odchylenia standardowego w takim przypadku również będzie wynosić zero. Błędnie można zatem zinterpretować taki przypadek, jako brak rozproszenia losowego. Doskonale obrazuje to rysunek przedstawiający wpasowanie funkcji sklejjanej w przypadku obserwowanych wartości nachylenia profilu niecki obniżeniowej.



Rys. 2. Wynik aproksymacji przeciętnego przebiegu nachylenia za pomocą krzywych sklejjanych

Fig. 2. Result of average inclination course approximation by use of splines

Z własności krzywych sklejjanych wynika, że nie są przydatne do opisywanego w pracy zagadnienia. W dalszej części pracy skupiono się na pozostałych funkcjach nieliniowych wytypowanych do aproksymacji wskaźników deformacji.

4.2. Wielomiany ortogonalne

Wielomiany ortogonalne znalazły zastosowanie m.in. do uzyskania gładkiej funkcji opisującej przebieg wskaźników deformacji w ustalonym zakresie na podstawie danych obserwacyjnych. W pracy [1], przedstawiono metodę wyznaczania wartości współczynnika przemieszczeń poziomych „B” w oparciu o aproksymację przebiegu przemieszczeń poziomych i nachyleń za pomocą wielomianu n-tego stopnia.

Wielomiany stopnia m aproksymujące przebiegi wskaźników deformacji są postaci

$$D(x) = D_0 + D_1 \cdot x + D_2 \cdot x^2 + \dots + D_m \cdot x^m \quad (6)$$

gdzie:

m – stopień wielomianu aproksymującego,
 D_0, D_1, \dots, D_m – współczynniki rzeczywiste wielomianu

W celu uzyskania dopasowania wielomianu, stosuje się średniokwadratowe kryterium minimalizacji odległości pomiędzy funkcją aproksymującą a dyskretnym zbiorem danych. Podstawowym problemem jest w takim przypadku ustalenie optymalnego stopnia wielomianu dla danego wskaźnika deformacji. Niestety nie ma obiektywnej metody jego wyboru. W pracy [2] autorzy zaproponowali przykładowo użycie następującego kryterium

$$p = \min_{j=0,1,\dots,m(j)} m_D(j+1) - m_D(j) \leq S_D \cdot m_D(0) \quad (7)$$

gdzie:

p – optymalny stopień wielomianu aproksymującego,
 $m_D(j)$ – średni błąd aproksymacji wskaźnika D wielomianem stopnia j ,
 S_D – współczynnik opisujący zmienność wskaźnika deformacji D .

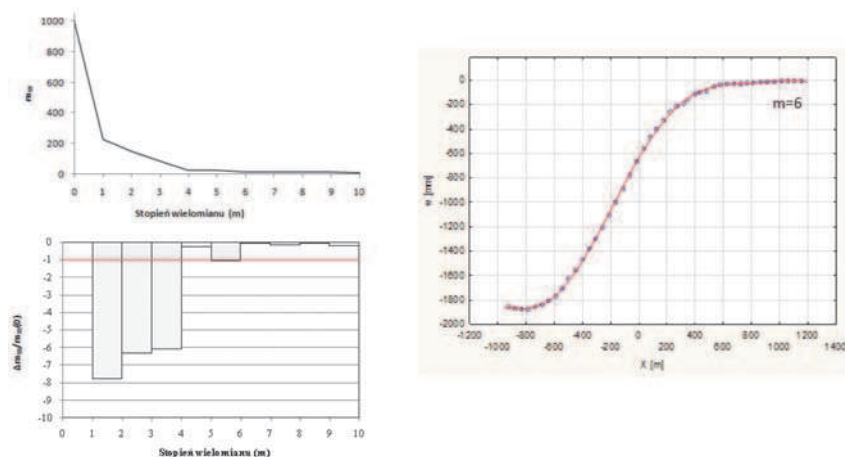
Analiza dopasowań wykazała, że:

- wraz ze wzrostem stopnia wielomianu maleje wartość funkcji straty,
- od pewnego stopnia wielomianu następuje ustabilizowanie wartości błędu aproksymacji, a wykresy funkcji aproksymujących mają zbliżony przebieg,
- w obrębie danego wskaźnika deformacji optymalny stopień wielomianu dla różnych linii pomiarowych może nie być identyczny.

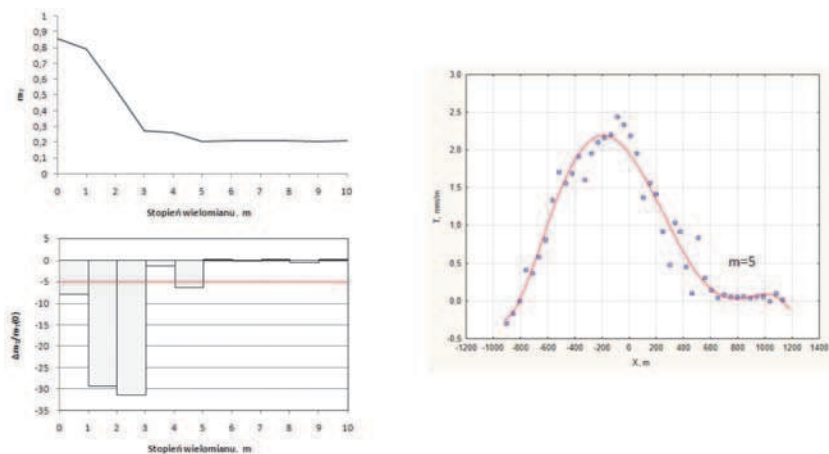
Wartość wskaźnika związana jest z rozproszeniem losowym procesu dla poszczególnych wskaźników deformacji. Przyjęto następujące wartości współczynnika :

- dla obniżeń 1%,
- dla nachyleń 5%,
- dla odkształceń poziomych 25%.

Na rys. 3 i rys. 4 przedstawiono przykładowy wybór odpowiedniego stopnia wielomianu dla obniżeń oraz nachyleń w przykładzie NR4.



Rys. 3. Wybór stopnia wielomianu dla obniżeń, przykład nr 4
 Fig. 3. Selection of polynomial degree for subsidence, example no. 4



Rys. 4. Wybór stopnia wielomianu dla nachyleń, przykład nr 4
 Fig. 4. Selection of polynomial degree for inclinations, example no. 4

W celu miarodajnego porównania wyników aproksymacji wielomianami z pozostałymi funkcjami należało ujedynolicić stopień wielomianu dla danego wskaźnika deformacji. Przyjęto największy stopień wielomianu spośród wszystkich optymalnych wartości dla poszczególnych fragmentów analizowanych niecek obniżeniowych. Wybór stopnia wielomianu zaprezentowano w tabeli 1.

Tabela 1. Ustalenie stopnia wielomianu dla poszczególnych przykładów

Table 1. Determining the polynomial degree for the particular examples

Nr przykładu	Część niecki obniżeniowej	Wskaźnik deformacji/stopień wielomianu			
		w	T	ε(+)	ε(-)
1	lewa	7	7	-	-
	prawa	7	5	-	-
2	lewa	7	7	5	5
	prawa	7	6	6	5
3	lewa	7	6	6	4
	prawa	6	6	4	5
4	prawa	6	5	3	5
5	lewa	6	7	5	4
	Przyjęty stopień w.	7	7	6	5

4.3. Funkcje teorii Knothego

Klasyczne funkcje opisujące wskaźniki deformacji w teorii Knothego można z góry uznać za właściwe do aproksymacji przeciętnego przebiegu wskaźników deformacji ze względu na genezę teorii, którą zalicza się do modeli stochastycznych. Rozkłady wskaźników deformacji, jakimi zajmujemy się przy aproksymacji przeciętnego ich przebiegu można określić jako dwuwymiarowe i determinowane przebiegiem linii obserwacyjnej. Przy założeniu, że zajmujemy się wpływem dużego pola eksploatacji oraz ustalonymi stanami deformacji, można zapisać postaci funkcji aproksymujących dla poszczególnych wskaźników deformacji wprost z teorii Knothego (Knothe 1953):

a) obniżenia

$$w(x; w_{max}, r) = \frac{w_{max}}{r} \int_x^\infty e^{-\pi \frac{x^2}{r^2}} dx \tag{8}$$

b) nachylenia

$$T(x; w_{max}, r) = -w_{max} \frac{1}{r} e^{-\pi \frac{x^2}{r^2}} \tag{9}$$

c) odkształcenia poziome

$$\varepsilon(x; w_{max}, r) = \pm \frac{w_{max} \cdot \sqrt{2\pi}}{r^2} \cdot x e^{-\pi \frac{x^2}{r^2}} \tag{10}$$

przyjmując współczynnik $B = \frac{r}{\sqrt{2\pi}}$ (możliwe jest również przyjęcie wartości $B=0,32r$ [8]).

Przedstawione funkcje są dwuparametrowe z parametrami w_{max} i r . Ze względu na wieloletnie doświadczenia w prognozowaniu wpływów eksploatacji z wykorzystaniem teorii Knothego oraz wyznaczania jej parametrów przyjęto do aproksymacji w niniejszej pracy również postaci zmodyfikowane funkcji teorii, które mogą oferować większą elastyczność.

4.4. Zmodyfikowane funkcje teorii Knothego

Modyfikacja funkcji Knothego w celu dostosowania ich do potrzeb estymacji przeciętnego przebiegu wskaźników deformacji polega na tym, że do znanych funkcji wprowadza się dodatkowe parametry nadające funkcjom większą elastyczność. Po raz pierwszy taką modyfikację i wykorzystanie zmodyfikowanych funkcji wprowadził Popiołek [7]. Dodatkowymi parametrami wprowadzonymi do zależności funkcyjnych teorii Knothego są:

- parametr c opisujący przesunięcie rzeczywistego punktu $\frac{w_{max}}{2}$ stosunku do krawędzi pola eksploatacyjnego,
- parametr b - kształtu funkcji aproksymującej (w miejsce wykładnika potęgi funkcji wpływów; w teorii Knothego $b=2$).

Postaci funkcji aproksymujących obniżenia, nachylenia oraz odkształcenia zostały przedstawione szczegółowo w pracy [9]. Dla obniżenia ogólna postać funkcji aproksymującej jest następująca

$$w(x; r, c, b, w_{max}) = \frac{w_{max}}{r} \int_x^\infty e^{-\pi \left| \frac{x-c}{r} \right|^b} dx \tag{11}$$

Wprowadzając dodatkowe parametry i przekształcając funkcje teorii, należy zachować podstawowe cechy modelu, pozwoli to na bardziej intuicyjne korzystanie z tych funkcji przy aproksymacji przeciętnych przebiegów wskaźników deformacji. Istotne jest w tym przypadku, że uzyskiwane w procesie aproksymacji wartości parametrów modelu nieliniowego będą miały fizyczne znaczenie, co ułatwi przeprowadzenie samej procedury estymacji. Postaci funkcji dla pozostałych wskaźników deformacji są rzecz jasna pochodnymi funkcji obniżenia.

Analizę statystyczną można przeprowadzić w programie „STATISTICA”, lecz wtedy konieczne jest przekształcenie kolejnych funkcji aproksymujących w taki sposób, aby były w postaci zrozumiałej dla algorytmów obliczeniowych programu [9].

5. Materiał badawczy

Przy wyborze danych obserwacyjnych zwracano uwagę na to, żeby badane próbki dotyczyły różnych warunków prowadzenia eksploatacji górniczej, dzięki czemu uzyskane wyniki będą bardziej wiarygodne. Przy doborze materiału badawczego ustalono następujące kryteria:

- pole eksploatacji powinno być duże w stosunku do głębokości eksploatacji, w celu możliwości powiązania teorii Knothego z danymi obserwacyjnymi,
- usytuowanie linii pomiarowych powinno umożliwić badanie zjawiska tam, gdzie występują maksymalne wpływy górnicze, czyli prostopadle do krawędzi pola eksploatacji oraz możliwie w jego osi,
- długości baz pomiarowych powinny być odpowiednio długie, tak aby spełniony był warunek jednorodności procesu (zbyt długie bazy powodują błędy wynikające z uśredniania odkształceń, a zbyt krótkie powodują duże rozproszenie losowe, powodując brak przydatności materiału do analizy),
- pomiary powinny zostać przeprowadzone starannie i dokładnie, tak aby uniknąć błędów grubych i systematycznych,
- wartości wskaźników deformacji są wartościami asymptotycznymi (końcowymi), obrazującymi stan ustabilizowanej niecki obniżeniowej.

5.1. Charakterystyka danych pomiarowych

Do analizy zastosowania wybranych funkcji nieliniowych do aproksymacji przeciętnych wskaźników deformacji wybrano dane z pięciu rejonów eksploatacji. Dwa z nich należą do rejonu eksploatacji rud miedzi, a trzy pozostałe to rejon eksploatacji węgla kamiennego.

Podstawowe informacje na temat wykorzystanych danych obserwacyjnych zostały zestawione w tabeli 2. Dane obserwacyjne dotyczą dwóch eksploatacji głębokich (od 300 do 600 m) oraz trzech bardzo głębokich (powyżej 600 m).

Omawiane rejon obserwacji wykazują również zróżnicowanie w zakresie technologii wydobywania. W analizowanych danych z kopalni węgla kamiennego występuje system eksploatacji ścianowy z zawalem stropu. Z kolei w kopalniach miedzianych wydobywanie prowadzi się systemem filarowo-komorowym z zawalem stropu lub ugięciem stropu. Wielkość furt eksploatacyjnych wahają się od 1.9 do 3.2 m. Upad złoże wskazuje na trzy przykłady pokładów poziomych lub prawie poziomych oraz dwóch słabo nachylonych.

6. Uzyskane wyniki aproksymacji

W wyniku przeprowadzonych obliczeń uzyskano parametry funkcji aproksymacyjnych, dzięki czemu możliwe było wyznaczenie przeciętnego przebiegu danego wskaźnika deformacji $\bar{D}(x)$, a także maksymalnej przeciętnej wartości funkcji \bar{D}^{max} opisującej jego przebieg. Ponadto zebrano dane dotyczące odchyłań standardowych we wszystkich analizowanych przypadkach oraz obliczono współczynniki zmienności M_D , informujące o względnym rozproszeniu losowym wskaźników dla badanych przykładów obserwacyjnych. Przedstawiono także wyniki analiz w rozbiciu na rodzaj funkcji aproksymującej oraz badany wskaźnik deformacji. Prezentowane wyniki przedstawiają końcowe wartości średnie

uzyskanych statystyk, aby w sposób syntetyczny możliwe było wyciągnięcie wniosków z przeprowadzonych prac.

W tabeli 3 przedstawiono wartości parametrów rozproszenia losowego wskaźników deformacji wraz ze współczynnikami determinacji dla wyników aproksymacji wielomianami ortogonalnymi, klasycznymi funkcjami teorii Knothe'go oraz zmodyfikowanymi czteroparametrowymi funkcjami wywodzącymi się z teorii Knothe'go.

Analizując wartości współczynników zmienności, można stwierdzić istotną zależność uzyskanego wyniku od rodzaju funkcji aproksymującej. Zdecydowanie od pozostałych odbiegają wyniki osiągnięte w aproksymacji klasycznymi funkcjami teorii Knothe'go. Wartości M_D dla wielomianów oraz funkcji czteroparametrowych różnią się nieznacznie, co może prowadzić do wniosku, że obydwa rodzaje funkcji w równym stopniu nadają się jako nieliniowe modele przeciętnych przebiegów wskaźników deformacji.

Należy jednak przeanalizować również jakość dopasowania, którą obrazuje współczynnik determinacji R^2 . Wartości zawarte w tabeli 3 wskazują, że nieco lepsze rezultaty uzyskuje się w przypadku funkcji czteroparametrowych, choć nie są one również tak dalece różne od wyników uzyskanych wielomianami.

W celu stwierdzenia czy też wyboru optymalnego modelu aproksymacyjnego dla wskaźników deformacji należy dodatkowo przyrzeć się poszczególnym dopasowaniom uzyskanym dla analizowanych przykładów.

7. Wybór optymalnej funkcji nieliniowej dla aproksymacji wskaźników deformacji

Najważniejszą kwestią podjętą w artykule był wybór optymalnej funkcji nieliniowej aproksymującej przebieg przeciętnych wskaźników deformacji. W celu wyłonienia najlepszej z nich przyjęto do analizy następujące kryteria:

Tabela 2. Zestawienie podstawowych danych dla poszczególnych przykładów obserwacji procesu deformacji

Table 2. Summary of basic data for the particular examples of the deformation process observation

NR	System eksploatacji	Średnia głębokość ekspl. m	Grubość pokładu m	Nachylenie pokładu [°]	Grubość nadkładu luźnego m	Średnia długość bazy pom. m	W_{max} mm	T_{max} mm/m	$\epsilon_{max}(+)$ mm/m	$\epsilon_{max}(-)$ mm/m
1	Ścianowy z zawalem stropu	638	1,9	6	65	39,0	1575	-7,92	-	-
2	Ścianowy z zawalem stropu	512	2,8	3-11	27	45,6	1462	6,31	2,59	-2,47
3	Komorowo-filarowy z zawalem stropu	740	3,1	5	58	48,0	1871	6,63	1,91	-2,73
4	Komorowo-filarowy z ugięciem stropu	894	3,2	3	93	48,0	1875	2,44	1,70	-1,64
5	Ścianowy z zawalem stropu	460	2,0	1	40	28,4	1543	-7,32	2,73	-3,30

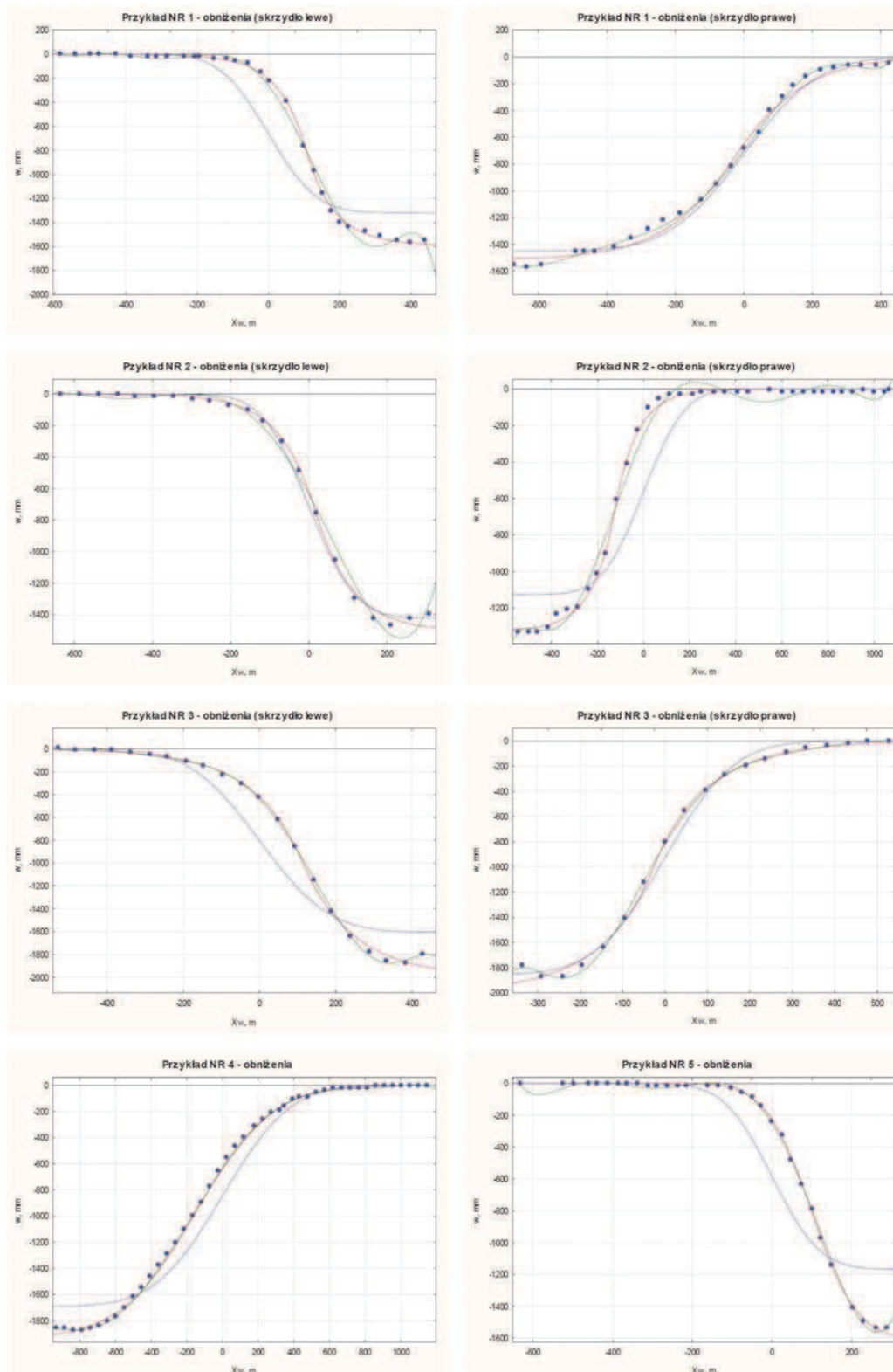
Tabela 3. Zestawienie wyników aproksymacji wielomianami ortogonalnymi dla poszczególnych wskaźników deformacji

Table 3. Results of the orthogonal polynomial approximation for the particular deformation indicators

L.p.	Wskaźnik deformacji		Wielomiany ortogonalne		Klasyczne funkcje teorii Knothe'go		Zmodyfikowane funkcje t. Knothe'go	
			M_D	R^2	M_D	R^2	M_D	R^2
1	Obniżenie terenu	w	±1,7 %	0,99	±9,8 %	0,94	±1,7 %	0,99
2	Nachylenie terenu	T	±12,3 %	0,91	±29,9 %	0,62	±7,7 %	0,94
3	Odkształcenie poziome rozciągające	$\epsilon(+)$	±10,0 %	0,94	±29,9 %	0,56	±7,7 %	0,96
4	Odkształcenie poziome ściskające	$\epsilon(-)$	±8,0 %	0,98	±25,1 %	0,73	±8,9 %	0,96

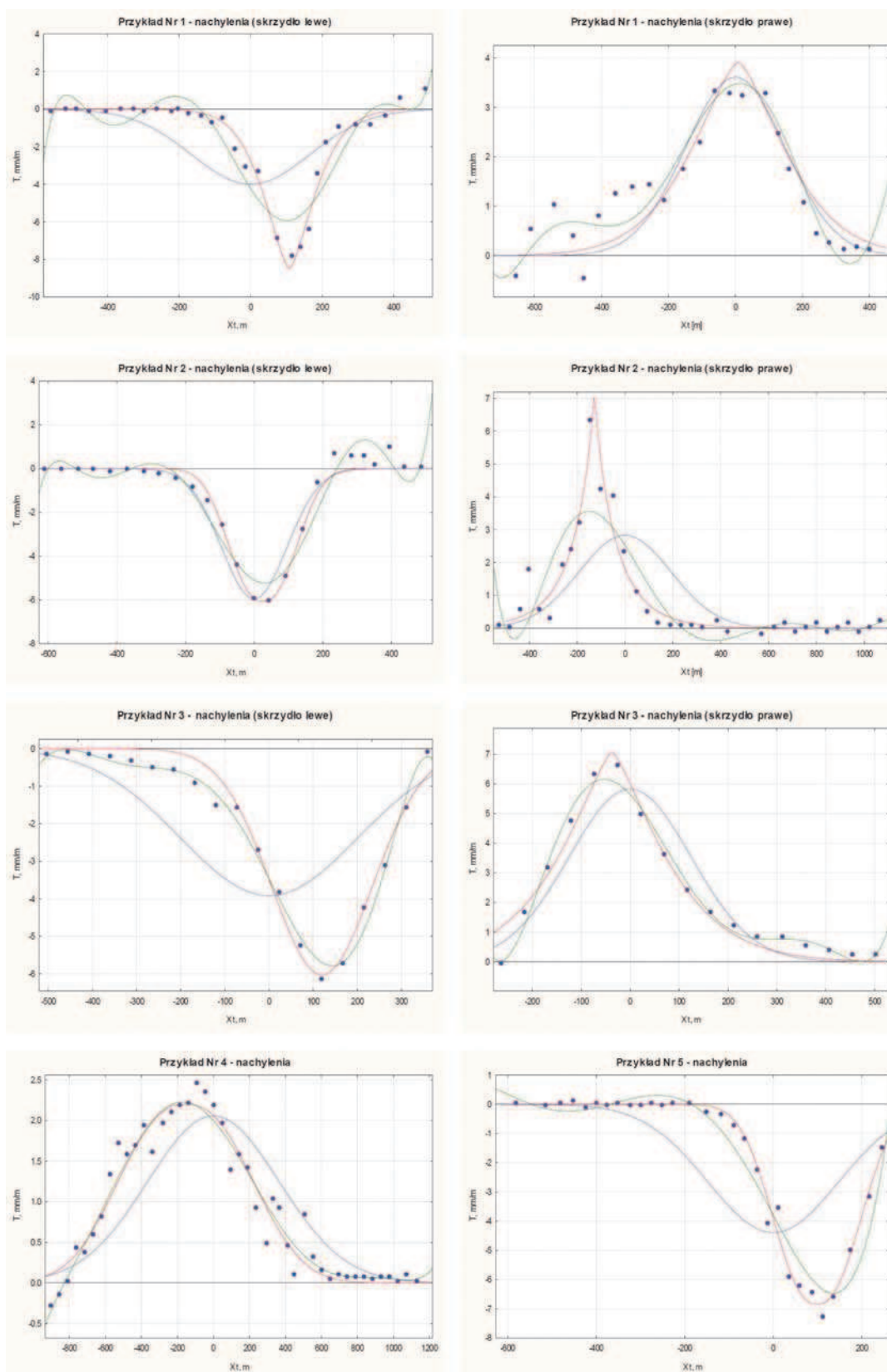
- najmniejsza spośród analizowanych funkcji, wartość odchylenia standardowego,
- najmniejsza spośród analizowanych funkcji, wartość współczynnika zmienności,
- największa spośród analizowanych funkcji, wartość współczynnika determinacji,
- przebieg funkcji aproksymującej w stosunku do punktów pomiarowych – ocena wizualna.

Pierwsze trzy kryteria nie przysparzają trudności interpretacyjnych. Wynikają wprost z przeprowadzonych obliczeń. Z kolei do oceny przebiegu funkcji aproksymującej w stosunku do obserwowanych wartości wskaźników deformacji należało opracować kryterium takiej oceny [6]. W tym celu ustalono istotne warunki jakie powinno spełniać dopasowanie i określano pozytywne lub negatywne wypełnienie danego warunku. Najważniejsze kryteria podlegające ocenie:



Rys. 5. Wyniki aproksymacji przeciętnego przebiegu obniżenia
 Fig. 5. Results of the average subsidence course approximation

- pozytywny wynik aproksymacji funkcją modelową,
- małe fluktuacje w przebiegu funkcji w początkowej i końcowej części wykresu w stosunku do obserwowanych wartości wskaźnika (peryferyjne strefy rejestrowanych wartości wskaźników deformacji),
- małe odchyłki przebiegu funkcji w środkowej części wykresu w stosunku do wyników pomiarów (strefy maksymalnych wartości wskaźników deformacji).

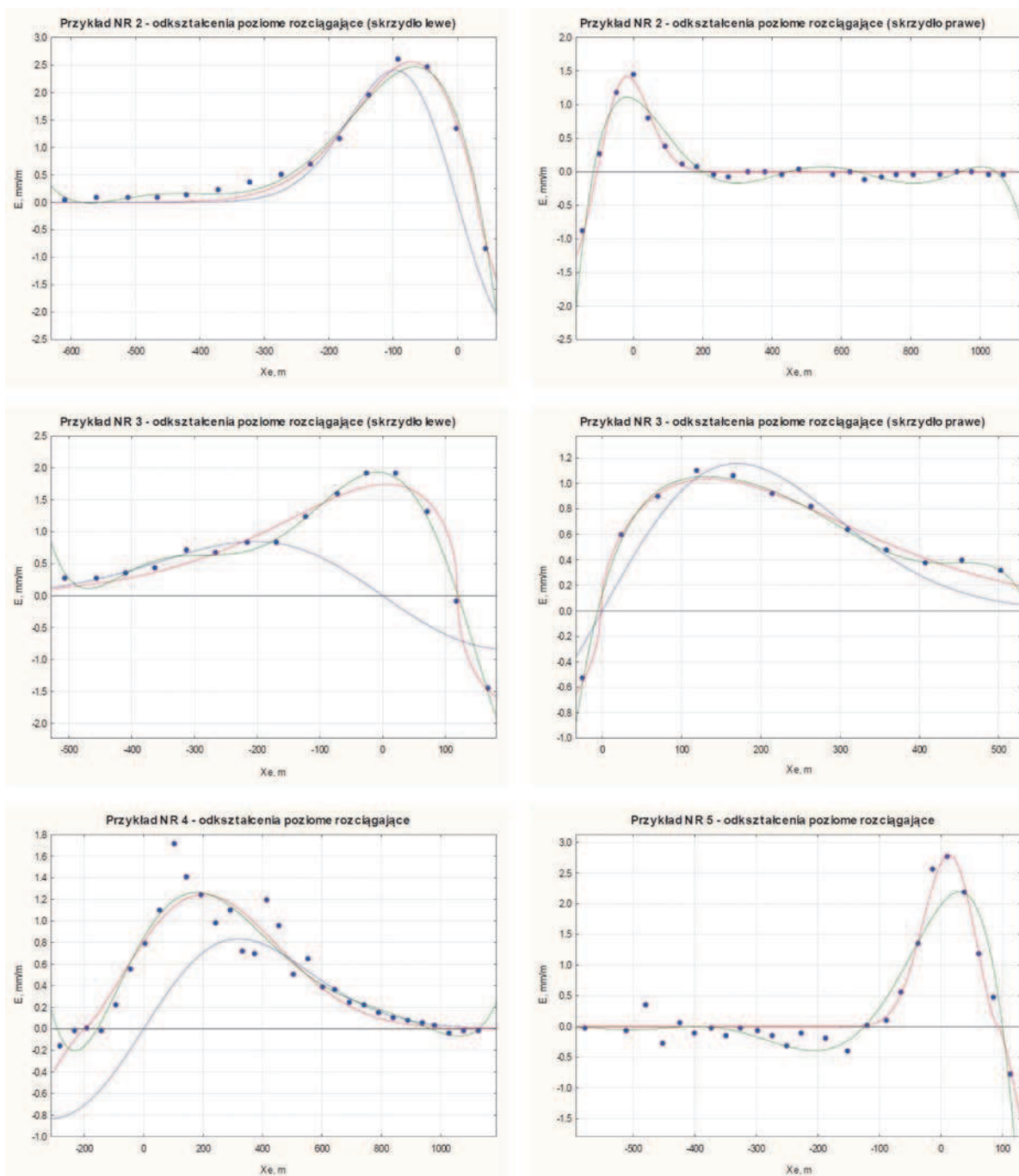


Rys. 6. Wyniki aproksymacji przeciętnego przebiegu nachyleń
 Fig. 6. Results of the average inclination course approximation

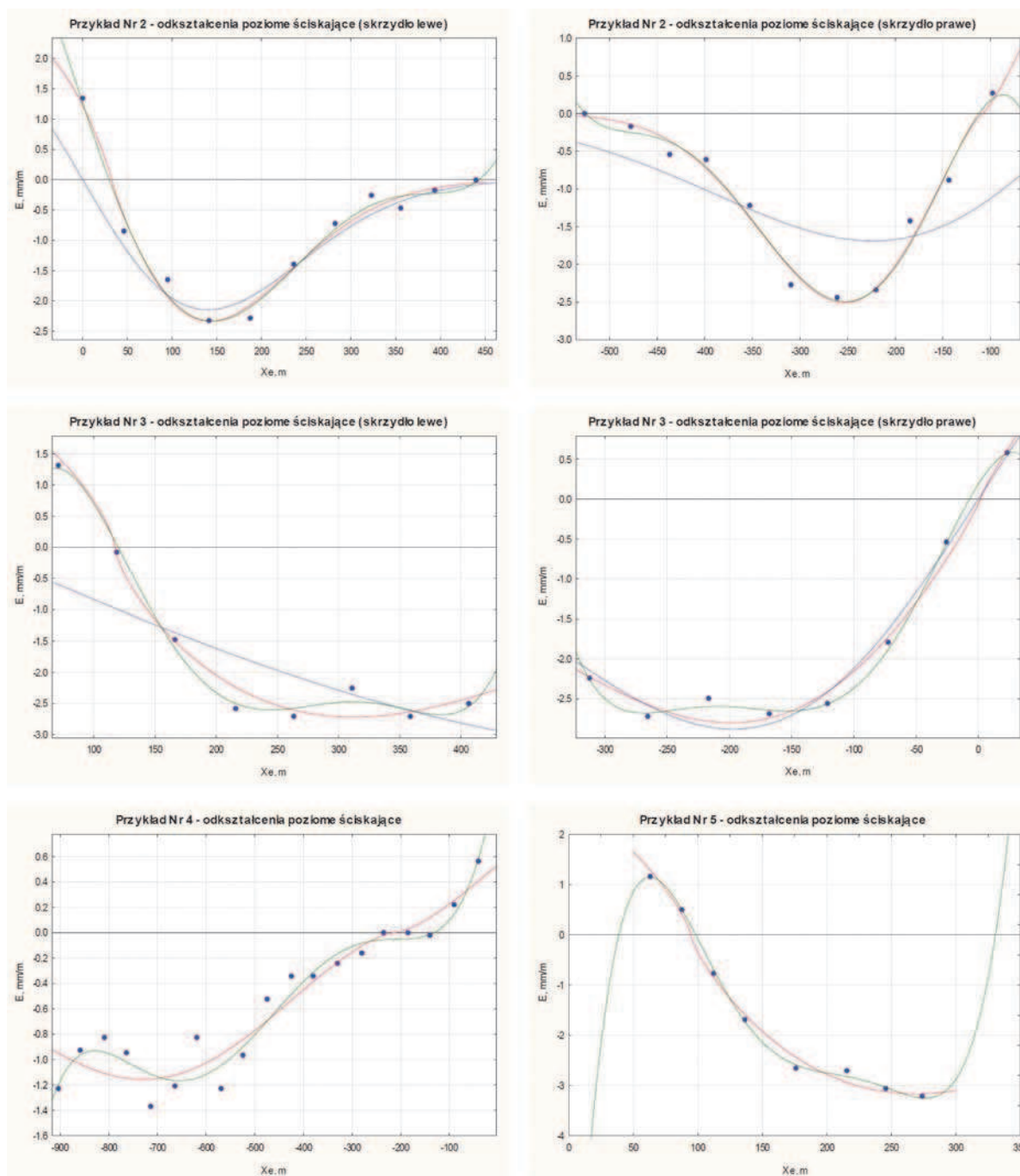
Uzyskane dla poszczególnych przykładów aproksymowane przebiegi wskaźników deformacji prezentują rysunki 5, 6, 7, 8 (odpowiednio dla obniżeń, nachyleń odkształceń poziomych rozciągających oraz ściskających, gdzie kolorem niebieskim oznaczono dopasowanie funkcjami Knothego, kolorem czerwonym funkcjami czteroparametrowymi oraz kolorem zielonym funkcjami wielomianowymi). W wyniku przeprowadzonych analiz poniższych dopasowań możliwe były następujące stwierdzenia:

1) Do aproksymacji przeciętnego przebiegu obniżeń w równym stopniu nadaje się czteroparametrowa funkcja Knothego oraz wielomian siódmego stopnia, przy czym zmodyfikowana funkcja Knothego daje lepsze rezultaty dla dużej ilości punktów o niewielkich wartościach obniżeń,

z kolei wielomian bardzo dobrze oddaje kształt niecki obniżeniowej w przypadkach widocznej asymetrii niecki.
 2) Do aproksymacji przeciętnego przebiegu nachyleń bardziej nadaje się funkcja czteroparametrowa (w każdym z badanych przypadków aproksymacja jest porównywalna, bądź lepsza od aproksymacji wielomianem siódmego stopnia).
 3) Do aproksymacji przeciętnego przebiegu odkształceń rozciągających nieznacznie lepsza jest funkcja czteroparametrowa w porównaniu z wielomianem szóstego stopnia.
 4) Do aproksymacji przeciętnego przebiegu odkształceń ściskających przy małej liczności próbek również lepsze rezultaty osiąga się dla zmodyfikowanej funkcji Knothego, chociaż wraz ze wzrostem liczności próbek nieco lepsze parametry uzyskujemy dla wielomianu piątego stopnia.



Rys. 7. Wyniki aproksymacji przeciętnego przebiegu odkształceń poziomych rozciągających
 Fig. 7. Results of the average tensile strain course approximation



Rys. 8. Wyniki aproksymacji przeciętnego przebiegu odkształceń poziomych ściskających
 Fig. 8. Results of the average compressive strain course approximation

8. Podsumowanie

Przeprowadzone analizy statystyczne, a przede wszystkim uzyskane wartości odchylenia standardowego, współczynnika zmienności oraz współczynnika korelacji, a także ocena wizualna uzyskanych dopasowań pozwoliły na sformułowanie następujących wniosków dotyczących głównych rezultatów pracy:

1. Klasyczne funkcje Knothego posiadają istotne ograniczenia, aby mogły być wykorzystywane do aproksymacji przeciętnych wskaźników deformacji. Jest to spowodowane małą elastycznością funkcji, a dokładnie brakiem możliwości przesunięcia położenia punktu $\frac{w_{max}}{2}$ oraz zmiany kształtu funkcji.
2. Funkcje sklejane ze względu na swoje właściwości nie mogą być stosowane do aproksymacji przeciętnego przebiegu wskaźników deformacji.
3. Do aproksymacji wielomianem ortogonalnym można przyjmować następujące stopnie wielomianów:
 - a) osiadania – 7 stopień,
 - b) nachylenia – 7 stopień,
 - c) odkształcenia rozciągające – 6 stopień,
 - d) odkształcenia ściskające – 5 stopień.
4. Wynik aproksymacji wielomianem może dawać nieznacznie lepsze rezultaty od aproksymacji czteroparametrowymi funkcjami Knothego przy większej liczności próbek oraz przy niewielkiej ilości danych o wartościach bliskich zeru.

5. Najbardziej optymalne dla zbiorów danych o deformacji powierzchni uzyskiwanych w różnych warunkach geologiczno-górnictwa wydaje się być zastosowanie funkcji czteroparametrowych ze względu na większą intuicyjność funkcji modelowych oraz uzyskiwane wyniki modelowania.
6. W każdym przypadku aproksymacji przeciętnego przebiegu dowolnego wskaźnika deformacji należy być świadomym, że jest to tylko przybliżenie tego przebiegu, a wyznaczone w oparciu o wynik aproksymacji parametry rozproszenia losowego należy traktować jako pewne przybliżenie.

Literatura

1. *Hejmanowski R., Kwinta A.*: Determining the coefficient of horizontal displacements with the use of orthogonal polynomials, Archives of Mining Sciences, Vol. 54 (2009), No 3, 2009, p. 441–454.
2. *Hejmanowski R. i inni.* Opracowanie metodyki wyznaczania lokalnych wartości współczynnika przemieszczeń poziomych „B” na podstawie aktualnych danych pomiarowych deformacji terenu, Stowarzyszenie Naukowe im. Stanisława Staszica, Kraków 2008.
3. *Klein G.*: Badanie fluktuacji losowych niejednorodnych pól przemieszczeń w ośrodku rozdrobnionym, „Archiwum Górnictwa” 1978, t. 23 z. 3.
4. *Knothe S.*: Równanie profilu ostatecznie wykształconej niecki osiadania, „Archiwum Górnictwa i Hutnictwa” 1953, t. 1, z. 1.
5. *Litwiniszyn J.*: Przemieszczenia górotworu jako pewien proces losowy, W: Ochrona powierzchni przed szkodami górnictwami [Praca zbiorowa] cz.1, Wydawnictwo „Śląsk”, Katowice 1980, s. 252-262.
6. *Moskala Sz.*: Zastosowanie wybranych funkcji nieliniowych do aproksymacji przeciętnych wskaźników deformacji, praca dyplomowa (niepublikowana), Kraków 2013.
7. *Popiołek E.*: Rozproszenia losowe odkształceń poziomych terenu w świetle geodezyjnych obserwacji skutków eksploatacji górnictwa, „Zeszyty Naukowe AGH” Nr 594, „Geodezja” Kraków 1976, z. 44.
8. *Popiołek E., Ostrowski J.*: Zależność między nachyleniami a przemieszczeniami poziomymi terenu w ostatecznie wykształconych nieckach obniżeniowych, „Ochrona Terenów Górniczych” 1978, Nr 46.
9. *Stoch T.*: Wpływ warunków geologiczno-górnictwa eksploatacji złoża na losowość procesu przemieszczeń i deformacji powierzchni terenu, rozprawa doktorska (niepublikowana), AGH, Kraków 2005.
10. *Kincaid D., Cheney W.*: *Analiza numeryczna*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2006.