

Grzegorz ŚWIRNIAK, Dariusz WYSOCZAŃSKI, Janusz MROCZKA
KATEDRA METROLOGII ELEKTRONICZNEJ I FOTONICZNEJ, POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Rozproszenie światła na włóknie cylindrycznym w ujęciu optyki geometrycznej

mgr inż. Grzegorz ŚWIRNIAK

Grzegorz Świrniak jest absolwentem Wydziału Elektroniki Politechniki Wrocławskiej. Obecnie pracuje jako wykładowca w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej. Problematyka jego rozprawy doktorskiej koncentruje się wokół zagadnień związanych z pomiarem średnicy włókna optycznego z wykorzystaniem własności światła rozproszonego.



e-mail: grzegorz.swirniak@pwr.wroc.pl

dr inż. Dariusz WYSOCZAŃSKI

Dariusz Wysoczański pracuje w Katedrze Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej od 1992r. W 1996r obronił doktorat na Uniwersytecie w Rouen (Francja) dotyczący wykorzystania światła rozproszonego do określania położenia i koncentracji włókien w materiałach kompozytowych. W pracy naukowej zajmuje się wykorzystaniem światła rozproszonego do określania właściwości cząstek.



e-mail: dariusz.wysoczanski@pwr.wroc.pl

prof. dr hab. inż. Janusz MROCZKA

Kierownik Katedry Metrologii Elektronicznej i Fotonicznej Politechniki Wrocławskiej. Zajmuje się metodologią obserwacji i eksperymentu, algorytmizacją problemu odwrotnego, modelowaniem matematycznym pól fizycznych, analizą spektralną i polaryzacyjną promieniowania rozproszonego, reprezentacjami czasowo-częstotliwościowymi w przetwarzaniu danych.

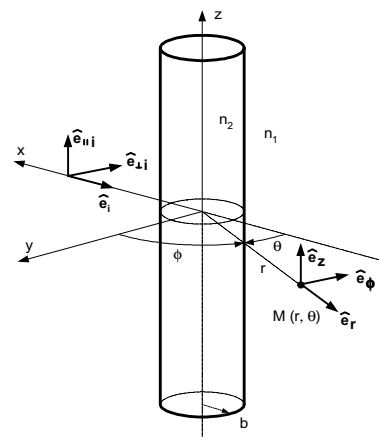


e-mail: janusz.mroczka@pwr.wroc.pl

Precyzyjne, ale złożone modele matematyczne wymagają najczęściej długiego czasu obliczeń, dużej mocy obliczeniowej, co ogranicza ich zastosowanie w aplikacjach wymagających działania w czasie rzeczywistym. Jednym ze sposobów rozwiązania tego problemu jest modelowanie pola rozproszonego w uproszczony sposób, na przykład z wykorzystaniem praw optyki geometrycznej.

2. Modelowanie rozproszenia światła

Geometrię eksperymentu przedstawiono na Rys. 1. Oś symetrii cylindra pokrywa się z osią z kartezjańskiego układu współrzędnych. Zarówno cylinder jak i również ośrodek, w którym jest on umieszczony są liniowo, homogeniczne, izotropowe i bezstratne. Właściwości optyczne ośrodka i cylindra opisują rzeczywiste współczynniki załamania, odpowiednio n_1 i n_2 . Przyjmuje się, że cylinder oświetlony jest liniowo spolaryzowaną falą płaską o pulsacji ω i długości λ , rozchodzącą się wzdłuż osi x i padającą pod kątem prostym względem osi symetrii cylindra.



Rys. 1. Schemat geometrii rozproszenia.

Fig. 1. Scattering geometry.

Wektor natężenia pola elektrycznego fali padającej $\mathbf{E}_i(x, t)$ może być przedstawiony jako suma komponentów równoległego $E_{\parallel i} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i}$ i prostopadłego $E_{\perp i} \hat{\mathbf{e}}_{\perp i}$ względem osi cylindra:

$$\mathbf{E}_i(x, t) = (E_{\parallel i} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel i} + E_{\perp i} \hat{\mathbf{e}}_{\perp i}) e^{i(-k_x x - \omega t)} \quad (1)$$

Streszczenie

W pracy przedstawiono model wykorzystujący prawa optyki geometrycznej do opisu zjawiska rozproszenia fali płaskiej na nieskończenie długim, jednorodnym, szklanym cylindrze. Poprzez graficzne porównanie charakterystyk pola rozproszonego obliczonych za pomocą modelu optyki geometrycznej i modelu falowego Mie dla cylindra, zbadano zakres stosowności oraz przydatność modelu geometrycznego pod kątem możliwości estymacji średnicy włókna cylindrycznego.

Słowa kluczowe: rozproszenie światła, cylinder homogeniczny, optyka geometryczna, particle sizing.

Geometrical-Optics Approximation of Light Scattering by a Cylindrical Fibre

Abstract

The geometrical-optics approach is used to describe plane wave scattering on an infinitely long, right circular, homogeneous, glass fibre. The range of its validity is investigated by graphical comparison of calculated intensity patterns with those obtained from rigorous Mie theory for a cylinder. The applicability of geometrical-optics approach to particle sizing is also discussed.

Keywords: light scattering, glass fibre, geometrical-optics approximation, particle sizing.

1. Wprowadzenie

Złożona dziedzina wiedzy jaką jest *particle-sizing* dysponuje precyzyjnymi narzędziami matematycznymi do opisu zjawiska rozpraszania światła na cząstkach. Analizę pola rozproszonego wokół nieskończonego cylindra umożliwia teoria Mie dla cylindra [1].

Gdzie $k_1 = 2\pi n_1/\lambda$. Punkt obserwacyjny $M(r, \theta)$, którego położenie zdefiniowane jest we współrzędnych cylindrycznych, znajduje się w polu dalekim, dla którego pole rozproszone może być uważane jako prostopadłe, tzn. $\mathbf{E}_s(r, t) \cdot \hat{\mathbf{e}}_s \underset{r \rightarrow \infty}{=} 0$. Wektor natężenia pola elektrycznego fali rozproszonej $\mathbf{E}_s(r, t)$ jest sumą dwóch wzajemnie prostopadłych komponentów $E_{\parallel s} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s}$ i $E_{\perp s} \hat{\mathbf{e}}_{\perp s}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_s(r, t) &= (E_{\parallel s} \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s} + E_{\perp s} \hat{\mathbf{e}}_{\perp s}) e^{i(k_1 r - \omega t)} \\ \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s} &= \hat{\mathbf{e}}_z \quad \hat{\mathbf{e}}_{\perp s} = \hat{\mathbf{e}}_\phi \quad \hat{\mathbf{e}}_{\perp s} \times \hat{\mathbf{e}}_{\parallel s} = \hat{\mathbf{e}}_s \end{aligned} \quad (2)$$

Kąt rozproszenia θ definiuje się jako kąt pomiędzy osią x i kierunkiem rozproszenia $\hat{\mathbf{e}}_s$.

Zależność pomiędzy składowymi pola rozproszonego i pola padającego opisywana jest konwencjonalnie z wykorzystaniem amplitudowej macierzy rozproszenia [1]:

$$\begin{bmatrix} E_{\parallel s} \\ E_{\perp s} \end{bmatrix} = e^{i3\pi/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k_1 r}} \begin{bmatrix} T_1(\theta) & 0 \\ 0 & T_2(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{\parallel i} \\ E_{\perp i} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$T_1(\theta)$ i $T_2(\theta)$ są funkcjami amplitudowymi dla polaryzacji odpowiednio równoległej i prostopadłej. Zagadnienie rozpraszania fali na cząstce sprowadza się faktycznie do obliczenia tych funkcji.

Natężenie w punkcie $M(r, \theta)$ jest definiowane jako amplituda uśrednionych w czasie zmian energii niesionej przez falę elektromagnetyczną:

$$I(r) = \left| \langle \mathbf{S}(r) \rangle \right| \quad (4)$$

$\mathbf{S}(r)$ jest wektorem Poyntinga. Dla fali płaskiej rozchodzącej się w homogenicznym, niemagnetycznym medium o przenikalności magnetycznej μ_0 powyższy wzór przyjmuje postać:

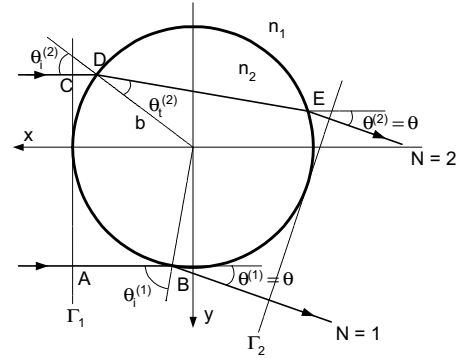
$$\langle \mathbf{S}_s(r) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{E}_s(r) \times \left(\frac{1}{\omega \mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_s(r) \right)^* \right\} = \frac{1}{2\omega \mu_0} E_s E_s^* \mathbf{k} \quad (5)$$

Gdzie: $\mathbf{k} = k_1 \hat{\mathbf{e}}_s$. Współczynnik $k_1/2\omega \mu_0$ będzie w niniejszej pracy pomijany.

2.1. Model optyki geometrycznej

W ujęciu optyki geometrycznej fala płaska rozumiana jest jako równoległa wiązka separowalnych ciągów falowych nazywanych tradycyjnie promieniami. Propagacja każdego z promieni spełnia zasadę Fermata. Na granicy dwóch optycznie różnych ośrodków, kierunek propagującej się wiązki oraz jej parametry amplitudowo – fazowe ulegają zmianie. Kierunek każdego z promieni wyznaczany jest z wykorzystaniem prawa odbicia i prawa załamania, natomiast amplituda i faza wynika z równań Fresnela.

Przyjmuje się, że obraz pola rozproszonego w ujęciu optyki geometrycznej wynika z superpozycji trzech rodzajów promieni: promieni odbitych od powierzchni cylindra i promieni załamanych w cylindrze (Rys. 2), oraz promieni ulegających dyfrakcji (dyfrakcja Fraunhofera). Promienie wielokrotnie załamane w cylindrze, ze względu na niewielką amplitudę względem pozostałych komponentów pola rozproszonego [5], zostały pominięte. Analiza zjawisk towarzyszących rozproszeniu światła na cząstkach wskazuje na powstawanie fal powierzchniowych. Wnioski Hulsta [5] wskazują jednak, że fale powierzchniowe mają niewielki wpływ na obraz pola rozproszonego do przodu dla cząstek niemagnetycznych.



Rys. 2. Przekrój w płaszczyźnie x - y pokazujący bieg promienia odbitego ($N=1$) i załamane ($N=2$).

Fig. 2. Path of reflected ($N=1$) and refracted ($N=2$) ray in the x - y cross-section.

Kąt rozproszenia promienia odbitego i załamane jest taki sam i wynosi θ , ponieważ efekt interferencji wszystkich promieni obserwowany jest w punkcie $M(r, \theta)$ (Rys. 1). Relacje pomiędzy kątem rozproszenia a kątem padania dla każdego z promieni są następujące:

$$\theta^{(1)} = \theta = \pi - 2\theta_i^{(1)} \quad (6)$$

$$\theta^{(2)} = \theta = 2(\theta_i^{(2)} - \theta_i^{(2)}) \quad (7)$$

Kąt załamania $\theta_i^{(2)}$ wynika z prawa Snella: $n_2 \sin \theta_i^{(2)} = n_1 \sin \theta_i^{(2)}$.

W konsekwencji wcześniejszych założeń, funkcje amplitudowe dla rozpatrywanych stanów polaryzacji można uważać jako sumę funkcji amplitudowych promienia odbitego i załamane i funkcji amplitudowej dyfrakcji:

$$T_1(\theta) = T_d(\theta) + T_1^{(1)}(\theta) + T_1^{(2)}(\theta) \quad (8)$$

$$T_2(\theta) = T_d(\theta) + T_2^{(1)}(\theta) + T_2^{(2)}(\theta) \quad (9)$$

Funkcje amplitudowe dla promienia N ($N=1,2$) zdefiniowane są następująco [4]:

$$T_1^{(N)}(\theta) = \sqrt{\frac{\pi k_1 b}{2}} \sqrt{D^{(N)}} \epsilon_{\parallel}^{(N)} e^{i\sigma^{(N)}} \quad (10)$$

$$T_2^{(N)}(\theta) = \sqrt{\frac{\pi k_1 b}{2}} \sqrt{D^{(N)}} \epsilon_{\perp}^{(N)} e^{i\sigma^{(N)}} \quad (11)$$

$\epsilon_j^{(N)}$ jest wypadkowym, amplitudowym współczynnikiem Fresnela, uwzględniającym kolejne odbicia i załamania na drodze biegu promienia N :

$$\epsilon_j^{(1)} = r_j(\theta_i^{(1)}) \quad (12)$$

$$\epsilon_j^{(2)} = 1 - r_j^2(\theta_i^{(2)}) \quad (13)$$

Przy czym $j = \parallel, \perp$. W równaniu (13) wykorzystano zależność Stokesa [2]. Amplitudowe współczynniki odbicia $r_j(\theta_i)$ mają postać [2]:

$$r_{\parallel}(\theta_i) = \frac{\cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{\cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (14)$$

$$r_{\perp}(\theta_i) = \frac{n^2 \cos \theta_i - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}}{n^2 \cos \theta_i + \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_i}} \quad (15)$$

Gdzie: $n = n_2/n_1$.

Współczynnik $\sqrt{D^{(N)}}$ (pierwiastek z dywergencji) wyraża wpływ kształtu cylindra na dyspersję kątową promienia. Wykorzystując zasadę zachowania energii dla promienia padającego na powierzchnię jednostkową cylindra pod kątem $\theta_i^{(N)}$, rozproszonego pod kątem θ , otrzymujemy:

$$\sqrt{D^{(N)}} = \left(\frac{1}{\cos \theta_i^{(N)}} \frac{d\theta}{d\theta_i^{(N)}} \right)^{-\frac{1}{2}} = \left| \frac{1}{\cos \theta_i^{(N)}} \frac{d\theta}{d\theta_i^{(N)}} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{-im\frac{\pi}{2}} \quad (16)$$

Czynnik fazowy $\exp(-im\pi/2)$ wyraża zmianę fazy promienia w kaustyce o $-\pi/2$ (opóźnienie) [3]. W sytuacji gdy promień styczny jest do m kaustyk, wypadkowe przesunięcie fazowe wynosi $m(-\pi/2)$. Czoło fali rozproszonej jest cylindryczne, zatem wiązka załamana tworzy pojedynczą kaustykę, a w konsekwencji jej faza zmienia się o $-\pi/2$ ($m = 1$). Wiązka promieni odbitych jest rozbieżna, a więc nie ma kaustyki ($m = 0$).

Parametr $\sigma^{(N)}$ reprezentuje zmianę fazy danego promienia wzdłuż drogi optycznej pomiędzy płaszczyznami referencyjnymi Γ_1 i Γ_2 (Rys. 2). Przyjmując, że faza obu promieni w obrębie płaszczyzny Γ_1 jest równa zeru, współczynnik ten dla każdego z promieni można wyrazić następująco:

$$\sigma^{(1)} = k_1 \cdot 2\overline{AB} = k_1 \cdot 2b(1 - \cos \theta_i^{(1)}) \quad (17)$$

$$\sigma^{(2)} = k_1 \cdot 2\overline{CD} + k_2 \cdot \overline{DE} = k_1 \cdot 2b(1 - \cos \theta_i^{(2)}) + k_2 \cdot 2b\sqrt{1 - (n^{-1} \sin \theta_i^{(2)})^2} \quad (18)$$

Gdzie: $k_1 = 2\pi n_1/\lambda$, $k_2 = 2\pi n_2/\lambda$.

Funkcja amplitudowa światła, które tworzy obraz dyfrakcyjny może zostać wywnioskowana z wykorzystaniem reguł skalarnej teorii dyfrakcji [1]. Dla cylindra o nieskończonej długości ma ona postać [4]:

$$T_d(\theta) = k_1 b \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right) E(k_1 b \sin \theta) \quad (19)$$

Gdzie: $E(u) = \sin(u)/u$.

Należy zauważyć, że parametry $\varepsilon_j^{(N)}$, $\sqrt{D^{(N)}}$, $\sigma^{(N)}$, dla uproszczenia ich postaci, zostały wyrażone w funkcji kąta padania $\theta_i^{(N)}$. Wykorzystując równania (6) i (7) uzyskuje się wyrażenia będące funkcjami kąta obserwacji θ .

2.2. Model Mie dla cylindra

Szczegółowy opis zjawiska rozproszenia światła na cylindrze daje teoria Mie dla cylindra [1]. Funkcje amplitudowe dla polaryzacji odpowiednio równoległej i prostopadłej mogą być wyrażone następująco [1]:

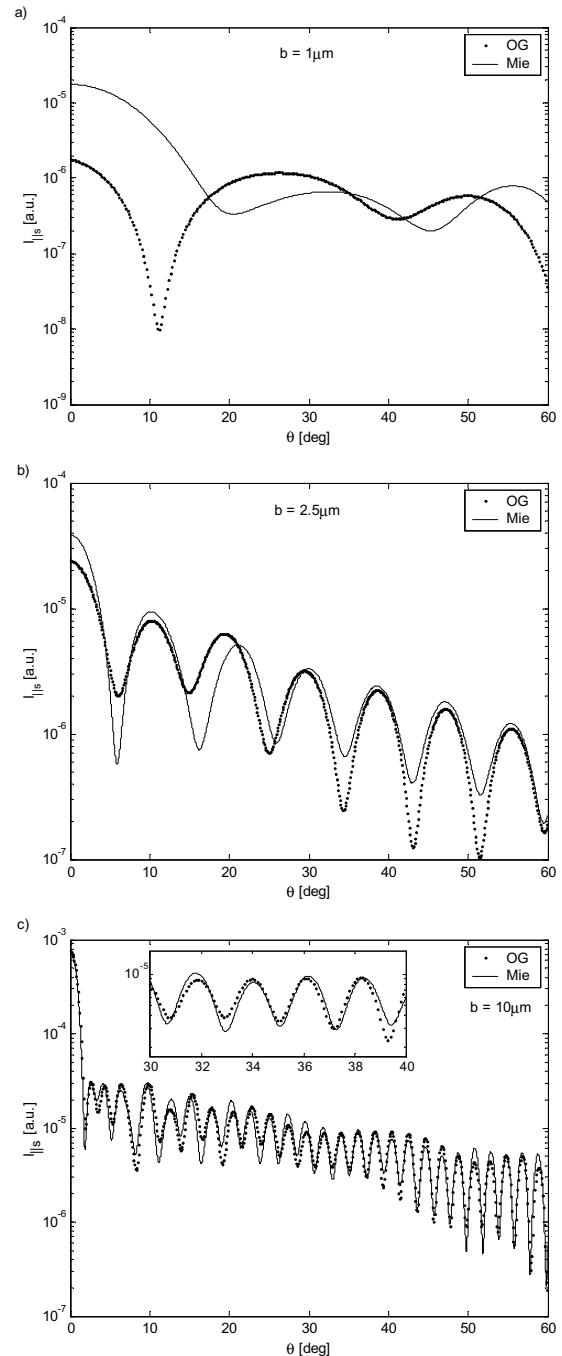
$$T_1(\theta) = b_{0I} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} b_{nI} \cos(n\theta) \quad (20)$$

$$T_2(\theta) = a_{0II} + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} a_{nII} \cos(n\theta) \quad (21)$$

Gdzie b_{nI} , a_{nII} są współczynnikami rozpraszania, które są złożonymi funkcjami właściwości fizycznych cząstki (promień, współczynnik załamania). Wymagają one obliczeń funkcji Hankela i Bessela pierwszego rodzaju i ich pochodnych.

3. Wyniki symulacji i dyskusja

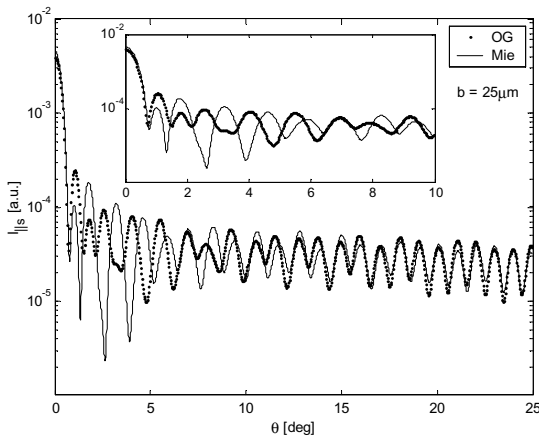
Ogólna weryfikacja modelu optyki geometrycznej została przeprowadzona poprzez graficzne porównanie charakterystyk pola rozproszonego obliczonych za pomocą modelu optyki geometrycznej i modelu falowego Mie dla cylindra. Podstawą analizy są wykresy natężenia składowej równoległej $I_{||s}$ światła rozproszonego w funkcji kąta obserwacji θ (Rys. 3) dla wybranych wartości promienia cylindra (1, 2.5, 10 i 25 μm). Przyjęto, że współczynniki załamania ośrodka oraz cylindra wynoszą odpowiednio $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$. Długość fali światła padającego równa jest 632.8nm.



Rys. 3. Porównanie charakterystyk składowej natężenia $I_{||s}$ światła rozproszonego w funkcji kąta obserwacji θ , wyznaczonych z wykorzystaniem optyki geometrycznej (OG) i teorii Mie dla cylindrów; $b = 1, 2.5$ i $10 \mu\text{m}$.

Fig. 3. Comparison of geometrical optics (OG) results with Mie calculations for the intensity component $I_{||s}$ as a function of scattering angle θ ; $b = 1, 2.5$, and $10 \mu\text{m}$.

Wstępna analiza wykresów pokazuje, że model optyki geometrycznej, w pewnych warunkach, poprawnie aproksymuje model falowy Mie. Relatywnie dobrą zgodność charakterystyk pod względem położenia punktów ekstremalnych a także tendencji zmian amplitudy prążków uzyskano dla cylindra o promieniu $2.5\mu\text{m}$. Próby dla cylindra o mniejszym promieniu ($1\mu\text{m}$) wykazują już dość znaczne rozbieżności. Wynikają one z faktu, że prawa optyki geometrycznej opisują z dobrą dokładnością zjawisko rozproszenia fali tylko wówczas, gdy średnica cząstki jest dużo większa niż długość rozpraszanej fali [5]. Wyniki dla cylindra o promieniu $10\mu\text{m}$ są zbliżone w całym zakresie kątów obserwacji, dla których przeprowadzono obliczenia, chociaż widoczne są pewne różnice w położeniu poszczególnych prążków. Interesujące rezultaty otrzymano dla cylindra o największym promieniu, $25\mu\text{m}$ (Rys. 4).



Rys. 4. Podobnie jak Rys. 3, ale dla $b = 25\mu\text{m}$ i zakresu kąta obserwacji $0+25^\circ$.
Fig. 4. Same as Fig. 3 except diagrams are for $b = 25\mu\text{m}$ and $0+25^\circ$ angular range.

W zakresie kątów rozproszenia od 0° do ok. 10° obserwowane są dość znaczne rozbieżności. Różnice te są wynikiem wpływu promieni wielokrotnie odbitych, które nie zostały uwzględnione w matematycznym opisie zjawiska rozproszenia. Promienie te w pewnych warunkach mogą w istotny sposób kształtować określone fragmenty charakterystyki światła rozproszonego. Uwzględnienie tych promieni w modelu optyki geometrycznej poprawiłoby jego precyzję, co jednak byłoby okupione zwiększeniem jego złożoności matematycznej.

Omawiane interferogramy pokazują, że ilość prążków w arbitralnym zakresie kątów rozpraszania, a także ich położenie jest funkcją promienia cylindra. Konsekwencją równania (5) jest fakt, że natężenie w danym punkcie pola jest funkcją kosinusa różnicy faz interferujących promieni (odbitego i załamane). Oznaczając jako $\Delta\phi(\theta_1)$ różnicę faz promieni w kącie rozproszenia θ_1 i podobnie $\Delta\phi(\theta_2)$ różnicę faz w kącie θ_2 , liczbę maksimum interferencyjnych w przedziale θ_1, θ_2 można wyrazić następująco:

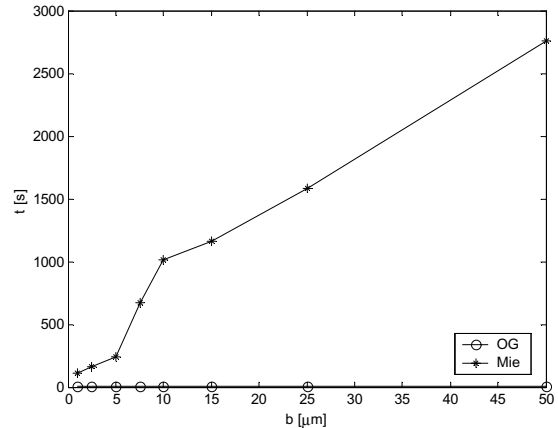
$$N_{lobes}(b) = \frac{|\Delta\phi(\theta_1) - \Delta\phi(\theta_2)|}{2\pi} \quad (22)$$

Wypadkowa faza danego promienia w punkcie obserwacyjnym jest równa sumarycznej zmianie fazy na drodze propagacji tego promienia dla rozpatrywanego stanu polaryzacji. Fazę tą wyraża argument funkcji amplitudowej danego promienia:

$$\phi_{||}^{(N)}(\theta) = \arg\{T_1^{(N)}(\theta)\} \quad (23)$$

$$\phi_{\perp}^{(N)}(\theta) = \arg\{T_2^{(N)}(\theta)\} \quad (24)$$

Uzupełnieniem niniejszej dyskusji jest wykres czasu potrzebnego na obliczenie charakterystyki pola rozproszonego (jak na Rys. 4) dla różnych wartości promienia cylindra. Jak pokazuje Rys. 5, czas ten jest praktycznie niezmienny dla modelu optyki geometrycznej (ok. 0.7s). Z kolei obliczenia dla modelu Mie dla cylindrów są bardzo czasochłonne, co ogranicza możliwość zastosowania modelu Mie w aplikacjach wymagających analizy w czasie rzeczywistym.



Rys. 5. Porównanie czasu obliczeń charakterystyki $I_{||s} = f(\theta)$ jako funkcji promienia cylindra. Czas obliczeń OG jest praktycznie stały i wynosi ok. 0.7s .
Fig. 5. Comparison of time needed for the angular scattering diagram $I_{||s} = f(\theta)$ calculation for different fibre radii. The time consumed by the geometrical optics method (OG) remains about 0.7s .

4. Podsumowanie

Wyniki zaprezentowane w niniejszej pracy wskazują, że złożone zjawisko rozproszenia światła na nieskończenie długim cylindrze może być, w pewnych warunkach, poprawnie aproksymowane uproszczonym opisem z wykorzystaniem praw optyki geometrycznej. Zgodność charakterystyk natężenia pod względem położenia punktów ekstremalnych, a także trendu zmian amplitudy prążków otrzymano już dla cylindra o promieniu $2.5\mu\text{m}$ (dla fali padającej o długości 632.8nm). Pewne fragmenty obrazu interferencyjnego (np. dla włókna o promieniu $25\mu\text{m}$) mogą być jednak znacząco kształtowane przez promienie wielokrotnie rozproszone, których nie uwzględniono w modelu optyki geometrycznej. Fakt ten ogranicza nieco potencjalne zastosowanie tego modelu. Dzięki uproszczonemu modelowaniu rozproszenia fali uzyskano łatwą w interpretacji i zastosowaniu relację pomiędzy średnicą cylindra i ilością prążków interferencyjnych w arbitralnym zakresie kątów rozproszenia.

Pracę wykonano w ramach projektu badawczego KBN 3 T10C 01730.

5. Literatura

- [1] Bohren, C. F., D. R. Huffman: Absorption and Scattering of Light by Small Particles. Wiley, New York, 1983.
- [2] Born, M., E. Wolf: Principles of Optics. Pergamon Press, Oxford, 1980.
- [3] Krawcow, J. A., J. I. Orłow: Optyka Geometryczna Ośrodków Niejednorodnych. WNT, Warszawa, 1993.
- [4] Świrniak, G., D. Wysoczański: Rozproszenie światła na nieskończenie długim, homogenicznym cylindrze w ujęciu optyki geometrycznej. Raport wewnętrzny KMEiF.
- [5] Van de Hulst, H.C.: Light Scattering by Small Particles. Dover Publications, Inc., New York, 1981.