MINUT 2019 (1), s. 36–41
ISSN 2719-3063

Bartłomiej PAWLIK

Instytut Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Liczba chromatyczna Thue'go

Streszczenie. W artykule przedstawione jest pojęcie ciągu niepowtarzalnego wraz z klasycznym twierdzeniem Axela Thue'go. Tematyka ciągów niepowtarzalnych w połączenia z pewnymi aspektami teorii grafów doprowadziła do powstania pojęcia tzw. liczby chromatycznej Thue'go grafu. Ma ona kilka nieoczywistych własności, które zostały zaprezentowane w drugiej części tekstu.

Słowa kluczowe: teoria grafów, liczba chromatyczna, liczba chromatyczna Thue'go, ciągi niepowtarzalne.

1. Wstęp

Podobno ostatnim naukowcem, który głęboko rozumiał każdy istotny aspekt matematyki swoich czasów był David Hilbert. W ciągu ostatnich stu lat nastąpił tak gwałtowny rozwój tej dyscypliny, że nawet najlepsi współcześni matematycy nie są w stanie powtórzyć jego osiągnięcia. Gałęzie matematyki są tak bogate i różnorodne, że badanie tylko jednej z nich może być fascynującym zajęciem, na które można poświęcić całe swoje naukowe życie. Czasami jednak pojawiają się zaskakujące połączenia między dwoma (bardziej lub mniej) odległymi teoriami matematycznymi, co prowadzi do powstawania ciekawych wniosków. Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie pojęcia liczby chromatycznej Thue'go — zagadnienia z pogranicza kombinatoryki i teorii grafów.

2. Ciągi niepowtarzalne

Skończony ciąg (a_n) o wyrazach a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots, a_m$ będziemy zapisywać w postaci

$$a_1a_2a_3a_4\ldots a_m.$$

Długością ciągu nazywamy liczbę jego elementów.

Powtórzeniem w ciągu (a_n) nazywamy podciąg złożony z dwóch identycznych sekwencji występujących zaraz po sobie. Bardziej formalnie, jest to podciąg

$$a_ka_{k+1}\ldots a_{k+j-1}a_{k+j}a_{k+j+1}\ldots a_{k+2j-1},$$

Autor korespondencyjny: B. Pawlik (bpawlik@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 10.04.2019 r.

w którym $j \geq 1$ oraz dla każdego $i \in \{0, j-1\}$ zachodzi

$$a_{k+i} = a_{k+j+i}.$$

Ciąg, który nie zawiera powtórzeń nazywamy **ciągiem niepowtarzalnym**.

Przykładowo, ciąg

81717041255412

zawiera powtórzenia 1717 oraz 55, natomiast ciąg

12012

jest ciągiem niepowtarzalnym.

Rozważmy sytuację, w której elementami ciągu mogą być tylko liczby 0 i 1. Nietrudno zauważyć, że mając do dyspozycji tylko te dwie liczby, nie da się skonstruować ciągu niepowtarzalnego o długości większej niż 3. Co się zmieni, gdy zwiększymy liczbę dostępnych elementów? Nieoczywistą odpowiedź na to pytanie daje tzw. **twierdzenie Thue'go**:

Można skonstruować dowolnie długi ciąg niepowtarzalny o wyrazach ze zbioru trójelementowego.

Powyższy wynik został opracowany ponad sto lat temu przez norweskiego matematyka Axela Thue'go [5]. Pomysł Thue'go polegał na zwiększaniu długości danego ciągu niepowtarzalnego poprzez zastępowanie każdego z jego elementów pewnym ciągiem niepowtarzalnym.

Niech będzie dany zbiór $X = \{1, 2, 3\}$ oraz skończony ciąg (a_n) o elementach ze zbioru X. Każdy element ciągu (a_n) zastąpmy pewnym ciągiem zgodnie z zasadą

$$1 \to 12312,$$
$$2 \to 131232,$$
$$3 \to 1323132.$$

W ten sposób otrzymujemy nowy (dłuższy!) ciąg. Thue udowodnił, że jeżeli tak przekształcimy ciąg niepowtarzalny, to otrzymamy ciąg który również jest niepowtarzalny.

Dla zobrazowania tej metody rozważmy niepowtarzalny ciąg 12. Stosując powyższe podstawienie, otrzymujemy

$$12 \to 12312\,131232,$$

zatem z niepowtarzalnego ciągu o długości 2 otrzymaliśmy niepowtarzalny ciąg o długości 11. Warto tutaj dodać, że z niepowtarzalnego ciągu dowolnej długości można w prosty sposób otrzymać krótsze ciągi tego typu. Zatem dysponując ciągiem długości 11, automatycznie otrzymujemy ciągi długości 10, 9, 8 itd.

Ponownie stosując powyższe podstawienie, otrzymujemy

$$12312131232 \to$$
$$\to 12312\,131232\,1323132\,12312\,131232\,12312\,1323132\,12312\,131232\,1323132\,131232,$$

więc z niepowtarzalnego ciągu o długości 11 otrzymaliśmy niepowtarzalny ciąg o długości 65.

Zatem, powtarzając podstawianie na ciągach niepowtarzalnych, można otrzymywać dowolnie długie ciągi o tej własności.

3. Liczba chromatyczna Thue'go

Relatywnie niedawno zagadnienie ciągów niepowtarzalnych zostało zaadaptowane do teorii grafów, co poskutkowało kilkoma zaskakującymi wynikami oraz hipotezami, na które do dziś nie znamy odpowiedzi. Zanim jednak o nich opowiemy, musimy przypomnieć kilka podstawowych zagadnień związanych z teorią grafów.

Grafem Γ nazywamy parę $(V(\Gamma), E(\Gamma))$, gdzie

$$V(\Gamma) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

to tak zwany **zbiór wierzchołków**, natomiast

$$E(\Gamma) \subset \Big\{\{v_i, v_j\} : i, j \in \{1, \ldots, n\},\ i \neq j\Big\}$$

to **zbiór krawędzi** grafu Γ. W dalszej części artykułu krawędź $\{v_i, v_j\}$ będziemy oznaczali przez $v_i v_j$. Jeżeli do grafu Γ należy krawędź $v_i v_j$, to wierzchołki v_i i v_j nazywamy **sąsiednimi**.

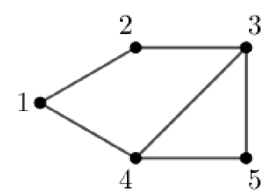
Stopniem $\mathrm{st}(v)$ wierzchołka v nazywamy liczbę wierzchołków sąsiednich z wierzchołkiem v.

Ścieżką w grafie nazywamy ciąg wierzchołków $(v_1, \ldots, v_k)$ taki, że dla każdego $i \in \{1, \ldots, k-1\}$ istnieje krawędź $v_i v_{i+1}$. Jeżeli wszystkie wierzchołki w ścieżce są różne, to nazywamy ją **drogą**, a jeżeli $v_1 = v_k$ i wszystkie pozostałe wierzchołki są różne, to nazywamy ją **cyklem**.

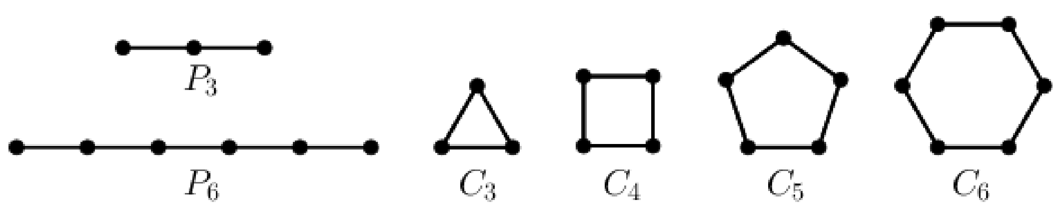
Grafem spójnym nazywamy graf w którym każde dwa wierzchołki można połączyć ścieżką.

Wygodną formą przedstawiania grafu jest jego reprezentacja graficzna, czyli rysunek, na którym wierzchołki są punktami, a linie je łączące — krawędziami.

Obok znajduje się rysunek przykładowego grafu Φ takiego, że $V(\Phi) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ oraz $E(\Phi) = \{12, 14, 23, 34, 35, 45\}$. Zauważmy, że $\mathrm{st}(1) = \mathrm{st}(2) = \mathrm{st}(5) = 2$ oraz $\mathrm{st}(3) = \mathrm{st}(4) = 3$.



Jednymi z podstawowych typów grafów są cykle i drogi. Przez P_n oznaczamy drogę o n wierzchołkach. Dla $n \geq 3$ przez C_n oznaczamy cykl o n wierzchołkach.



Kolorowaniem grafu Γ nazywamy funkcję $f : V(\Gamma) \to C$, która dla każdych dwóch sąsiednich wierzchołków przyjmuje różne wartości. Zbiór C nazywamy **zbiorem kolorów**, natomiast jego elementy **kolorami**.

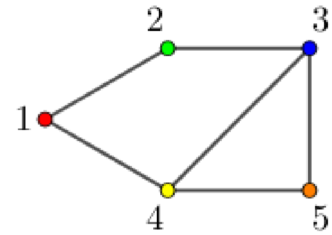
Każdy graf da się pokolorować. Wystarczy, że każdemu jego wierzchołkowi przypisany zostanie inny kolor — wtedy warunek różnych kolorów dla sąsiednich wierzchołków będzie spełniony.

Rozpatrzmy ponownie graf Φ oraz funkcję

$$f : V(\Phi) \to \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{yellow}\bullet}, {\color{orange}\bullet}\}$$

taką, że

$$f(1)={\color{red}\bullet}, \qquad f(2)={\color{green}\bullet},\quad f(4)={\color{yellow}\bullet}, \qquad f(3)={\color{blue}\bullet},\quad f(5)={\color{orange}\bullet}.$$



Z teoretycznego punktu widzenia w powyższym „naiwnym" kolorowaniu grafu (każdy punkt ma inny kolor) poza walorami estetycznymi nie ma nic ciekawego. Zagadnienie kolorowania staje się bardziej interesujące, gdy wymagamy od funkcji f spełniania pewnych dodatkowych warunków.

Liczbą chromatyczną $\chi(\Gamma)$ nazywamy *najmniejszą* liczbę kolorów potrzebną do pokolorowania grafu Γ. Zauważmy, że dla każdego grafu Γ liczba chromatyczna jest *nie większa* niż liczba jego wierzchołków:

$$\chi(\Gamma) \le |V(\Gamma)|.$$

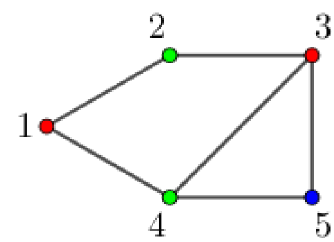
Równość zachodzi tylko w przypadku grafów, w których każda para wierzchołków jest połączona krawędzią (tzw. *grafy pełne*).

Graf Φ pokolorujmy teraz funkcją

$$g : V(\Phi) \to \{{\color{red}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{blue}\bullet}\}$$

taką, że

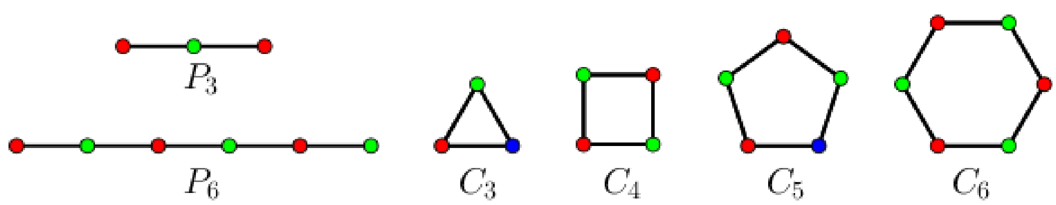
$$g(1)={\color{red}\bullet}, \qquad g(2)={\color{green}\bullet},\quad g(4)={\color{green}\bullet}, \qquad g(3)={\color{red}\bullet},\quad g(5)={\color{blue}\bullet}.$$



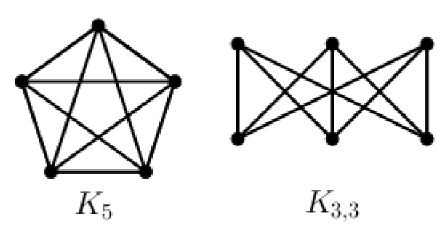
Nietrudno zauważyć, że grafu Φ nie da się pokolorować za pomocą tylko dwóch kolorów. Zatem $\chi(\Phi) = 3$.

Prostym ćwiczeniem jest określenie liczby chromatycznej dla dróg i cykli. Oczywiście

$$\chi(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1 \\ 2 & \text{dla } n \ge 2 \end{cases} \qquad \text{oraz} \qquad \chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ 3 & \text{dla } n \text{ nieparzystych.} \end{cases}$$



Grafem planarnym nazywamy graf, który można narysować na płaszczyźnie tak, aby żadne dwie krawędzie się nie przecinały. Oczywiście nie każdy graf jest grafem planarnym. Najprostszymi przypadkami grafów nieplanarnych są grafy, tradycyjnie oznaczane jako K_5 oraz $K_{3,3}$, przedstawione na rysunku obok.



Wszystkie drogi i cykle są grafami planarnymi.

Jednym z najdonioślejszych wyników dotyczących liczby chromatycznej jest **twierdzenie o czterech barwach**:

$$\textit{Jeżeli } \Gamma \textit{ jest grafem planarnym, to } \chi(\Gamma) \leq 4.$$

Tematyka kolorowania grafów po raz pierwszy została powiązana z twierdzeniem Thue'go w artykule [1], w którym pierwotnie rozpatrywano kolorowanie *krawędzi* grafu. W wielu późniejszych pracach zaczęto jednak się skupiać przede wszystkim na kolorowaniu *wierzchołków* (na przykład w przeglądowej pracy [4]).

Kolorowanie grafu nazywamy *niepowtarzalnym*, jeżeli ciąg kolorów każdej drogi w tym grafie jest ciągiem niepowtarzalnym.

Liczbą chromatyczną Thue'go $\pi(\Gamma)$ nazywamy najmniejszą liczbę kolorów potrzebnych do niepowtarzalnego pokolorowania grafu Γ.

Oczywiście liczba chromatyczna Thue'go jest dla każdego grafu nie mniejsza od liczby chromatycznej tego grafu, a zarazem nie większa niż liczba wierzchołków grafu:

$$\chi(\Gamma) \leq \pi(\Gamma) \leq |V(\Gamma)|.$$

Ile wynosi liczba chromatyczna Thue'go dla ścieżek i cykli? O ile dla grafów P_n odpowiedź wynika wprost z twierdzenia Thue'go, o tyle w przypadku grafów C_n już wcale nie jest taka oczywista.

Aby pokolorować ścieżkę P_n w sposób niepowtarzalny, wystarczy skorzystać z niepowtarzalnego ciągu długości n. Rozpatrzmy ścieżkę P_{10} oraz ciąg 1231213123. Każdej liczbie występującej w tym ciągu przypiszmy kolor zgodnie z regułą: $1 \to$ ●, $2 \to$ ● oraz $3 \to$ ●, a następnie pokolorujmy kolejne wierzchołki grafu P_{10} zgodnie z kolejnymi elementami danego ciągu:

Powyższe kolorowanie jest oczywiście kolorowaniem niepowtarzalnym.

Zatem z twierdzenia Thue'go wynika, że minimalna liczba kolorów niezbędna do pokolorowania każdej ścieżki o długości nie mniejszej niż 4 wynosi 3. Istotnie

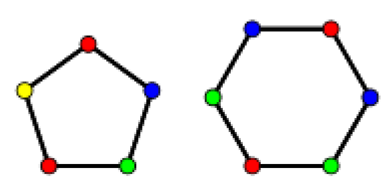
$$\pi(P_n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1 \\ 2 & \text{dla } n \in \{2,3\} \\ 3 & \text{dla } n \geq 4. \end{cases}$$

Zauważmy, że w przypadku grafu C_n można uzyskać niepowtarzalne kolorowanie w następujący sposób: $n-1$ wierzchołków kolorujemy trzema kolorami w sposób niepowtarzalny (w sposób analogiczny do przedstawionego powyżej), a ostatni wierzchołek — dodatkowym czwartym kolorem. Zatem

$$\pi(C_n) \leq 4$$

dla każdego n.

Rozpatrując kilka przypadków, można szybko dojść do wniosku, że trzy kolory nie wystarczają do niepowtarzalnego pokolorowania grafu C_5, natomiast do pokolorowania C_6 już tak (przykładowe kolorowania na rysunku obok).

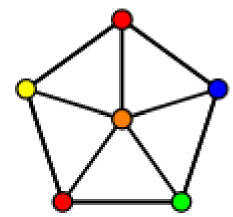


Co ciekawe, równość $\pi(C_n) = 4$ zachodzi wyłącznie dla $n \in \{5, 7, 9, 10, 11, 14, 17\}$, a w pozostałych przypadkach $\pi(C_n) = 3$, co zostało udowodnione w [2].

Podczas rozważań na temat liczby chromatycznej Thue'go naturalnie nasuwa się pytanie, czy można sformułować dla niej odpowiednik twierdzenia o czterech barwach:

Czy istnieje stała C taka, że dla każdego grafu planarnego Γ zachodzi nierówność $\pi(\Gamma) \leq C$?

Pamiętamy, że dla klasycznej liczby chromatycznej ta stała wynosi 4. Możemy w prosty sposób skonstruować graf planarny o większej liczbie chromatycznej Thue'go: do grafu C_5 dodajmy wierzchołek połączony krawędziami z wszystkimi pozostałymi. Oczywiście ten wierzchołek musi mieć kolor inny niż reszta wierzchołków — w związku z tym otrzymany graf ma liczbę chromatyczną Thue'go równą 5 (rysunek obok).



Na chwilę obecną najlepszym wynikiem częściowym jest logarytmiczne ograniczenie górne względem liczby wierzchołków planarnego grafu Γ:

$$\pi(\Gamma) \leq 8\left(1 + \log_{3/2}|V(\Gamma)|\right),$$

zaprezentowane w pracy [3]. Do dzisiaj nie wiadomo, czy stała C w ogóle istnieje.

Literatura

1. N. Alon, J. Grytczuk, M. Hałuszczak, O. Riordan, *Non-repetitive colorings of graphs*, Random Structures Algorithms 21 (2002) pp. 336–346.
2. J.D. Currie, *There are ternary circular square-free words of length n for $n \geq 18$*, Electron. J. Combin. 9 (2002), N10, 7 pp.
3. V. Dujmović, G. Joret, F. Frati, D. Wood, *Nonrepetitive Colouring of Planar Graphs with $O(\log n)$ Colours*, The Electronic Journal of Combinatorics, 20/1, P51, (2013).
4. J. Grytczuk, *Nonrepetitive colorings of graphs—a survey*, Int. J. Math. Math. Sci. (2007), Art. ID 74639, 10 pp.
5. A. Thue, *Über unendliche Zeichenreihen*, Norske Vid. Selsk. Skr., I Mat. Nat. Kl., Christiana 7 (1906), pp. 1-22.