Prof. dr hab. inż. Henryk Tomaszek

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych,
ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa,
E-mail: henryk.tomaszek@itwl.pl, tel. +48 22 685 19 56

Dr inż. Michał Jasztal

Wojskowa Akademia Techniczna,
ul. Kaliskiego 2, 00-908 Warszawa,
E-mail: mjasztal@wat.edu.pl, tel. +48 22 683 77 89

Dr inż. Mariusz Zieja

Instytut Techniczny Wojsk Lotniczych,
ul. Księcia Bolesława 6, 01-494 Warszawa,
E-mail: mariusz.zieja@itwl.pl, tel. +48 22 685 16 53

Uproszczona metoda szacowania niezawodności i trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcji statku powietrznego z wykorzystaniem wzoru Parisa dla m=2 i zmiennego widma obciążenia

Słowa kluczowe: *zmęczenie konstrukcji, niezawodność, trwałość zmęczeniowa, losowe widmo obciążenia*

Streszczenie: Prezentowany artykuł jest uzupełnieniem pracy [17] w której przedstawiono metodę oceny trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji dla zmiennego widma obciążenia z wykorzystaniem wzoru Parisa dla $m \neq 2$. Ze względu na odmienność postaci analitycznych rozwiązań dla wykładnika równania Parisa $m = 2$, ten szczególny przypadek rozwiązań został przedstawiony w niniejszym opracowaniu. Podobnie jak w pracy [17] pokazany został sposób przekształcenia widma rzeczywistego o zmiennych wartościach cykli w widmo jednorodne o cyklach ważonych. Wykorzystując widmo przekształcone opracowano metodę oceny trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego z początkowym pęknięciem. Do modelowania przyrostu długości pęknięcia wykorzystano równanie różnicowe, z którego po przekształceniu otrzymano równanie różniczkowe cząstkowe typu Fokkera-Plancka. Rozwiązaniem szczególnym tego równania jest funkcja gęstości długości pęknięcia elementu. Wykorzystując następnie funkcję gęstości długości pęknięcia określono niezawodność i trwałość zmęczeniową elementu konstrukcji dla pęknięcia narastającego do wartości dopuszczalnej l_d mniejszej od wartości krytycznej l_{kr}.

1. Wprowadzenie

Ocena trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji „pracującego” pod wpływem zmiennego widma obciążenia przysparza trudności przy formułowaniu zależności analitycznych. Z tego powodu jest tematem wielu opracowań naukowych [1-6, 16, 18]. Jednak z uwagi na jej decydujące znaczenie w procesie zarządzania bezpieczeństwem lotów zarówno cywilnych jak i wojskowych statków powietrznych istnieje potrzeba poszukiwania uproszczonych rozwiązań o praktycznym wymiarze dla transportu lotniczego [7, 9, 13-15, 18]. Zatem, w niniejszym artykule wykorzystano uproszczoną metodę przedstawioną pracy [17]. Zastosowane uproszczenie polega na przekształceniu zmiennego widma obciążenia w widmo jednorodne o cyklach ważonych.

Niniejszy artykuł jest uzupełnieniem pracy [17], w której podana została uproszczona metoda oceny trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji statku powietrznego dla zmiennego widma obciążenia z wykorzystaniem wzoru Parisa dla $m \neq 2$. Postacie rozwiązań analitycznych różnią się w zależności od wartości wykładników równania Parisa tj. $m \neq 2$ i $m = 2$. Z tego względu w niniejszym opracowaniu rozpatruje się przypadek, gdy wykładnik wzoru Parisa ma wartość $m = 2$.

Przyjmuje się, że początkowe pęknięcie w elemencie konstrukcji wynosi l_0, które pod wpływem obciążenia o zmiennym widmie wzrasta do długości dopuszczalnej l_d (bezpiecznej) mniejszej od długości krytycznej l_{kr}. Przyjmuje się, że prędkość narastania pęknięcia w ujęciu deterministycznym opisana jest zależnością Parisa [8]:

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^m, \tag{1}$$

gdzie:
ΔK - zakres zmian współczynnika intensywności naprężeń,
C, m – stałe materiałowe,
N – zmienna oznaczająca liczbę cykli obciążenia elementu konstrukcji.

Wzór (1) w rozpatrywanym przypadku $m = 2$ przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C(\Delta K)^2. \tag{2}$$

2. Wyznaczenie prędkości pękania dla $m = 2$ oraz przekształconego widma obciążenia elementu

W przekształceniu widma rzeczywistego o zmiennych wartościach obciążenia w widmo jednorodne o cyklach ważonych przyjmuje się następujące ustalenia:

1) Element konstrukcji statku powietrznego pracuje w czasie wykonywania zadań pod zmiennym obciążeniem;
2) Dysponujemy widmem obciążenia w czasie trwania standardowego lotu statku powietrznego. Obciążenie jest wielokrotnością cyklu standardowego;
3) Zakładamy, że posiadane standardowe widmo pozwala wyznaczyć:
   - całkowitą liczbę cykli obciążenia N_c w czasie trwania jednego lotu,
   - w widmie jest L progów o maksymalnej wartości obciążenia $\sigma_1^{max}, \sigma_2^{max}, \dots, \sigma_L^{max}$;
4) Liczba powtórzeń maksymalnych wartości progowych w przyjętym widmie jest następująca:
   σ_1^{max} występuje n_1 razy, σ_2^{max} występuje n_2 razy, …, σ_L^{max} występuje n_L razy;
   Liczba powtórzeń określonych wartości progowych obciążenia w jednym locie wynosi $N_c = \sum_{i=1}^{L} n_i$;
5) Wartość minimalną w progach określa się według zależności:

   $$\sigma_{i,śr}^{min} = \frac{\sigma_{i,1}^{min} + \sigma_{i,2}^{min} + \dots + \sigma_{i,n_i}^{min}}{n_i}, \text{ gdzie } i = 1,2, \dots, L.$$

6) Zestawienie maksymalnych σ_i^{max} i minimalnych $\sigma_{i,śr}^{min}$ wartości naprężeń w cyklach oraz częstości ich występowania P_i zostało przedstawione w tabeli 1.

Tabela 1. Zestawienie maksymalnych σ_i^{max} i minimalnych $\sigma_{i,śr}^{min}$ wartości naprężeń w cyklach oraz częstości ich występowania P_i

σ_i^{max}	σ_1^{max}	σ_2^{max}	$\dots$	σ_i^{max}	$\dots$	σ_L^{max}
$\sigma_{i,śr}^{min}$	$\sigma_{1,śr}^{min}$	$\sigma_{2,śr}^{min}$	$\dots$	$\sigma_{i,śr}^{min}$	$\dots$	$\sigma_{L,śr}^{min}$
P_i	$P_1 = \frac{n_1}{N_c}$	$P_2 = \frac{n_2}{N_c}$	$\dots$	$P_i = \frac{n_i}{N_c}$	$\dots$	$P_L = \frac{n_L}{N_c}$

7) Ustalenie współczynników asymetrii cykli zestawione zostało w tabeli 2.

Tabela 2. Zestawienie współczynników asymetrii cyklu $\hat{R}_i$ oraz współczynników U_i uwzględniających ich wpływ na prędkość pękania

$cykl\ i$	1	2	$\dots$	i	$\dots$	L
$\hat{R}_i$	$\hat{R}_1$	$\hat{R}_2$	$\dots$	$\hat{R}_i$	$\dots$	$\hat{R}_L$
U_i	U_1	U_2	$\dots$	U_i	$\dots$	U_L

Gdzie:

$\hat{R}_i = \frac{\sigma_{i,śr}^{min}}{\sigma_i^{max}}$, $U_i = \propto_1 + \propto_2 \hat{R}_i + \propto_3 \hat{R}_i^{\ 2}$; $\propto_1$, $\propto_2$, $\propto_3$ – współczynniki empiryczne [11, 12].

8) Ustalenie zakresu zmian naprężenia zestawione zostało w tabeli 3.

$$\Delta\sigma_i = \sigma_i^{max} - \sigma_{i,śr}^{min}$$

Tabela 3. Zestawienie wartości zakresu zmian naprężeń $\Delta\sigma_i$ oraz częstości ich występowania P_i

$typy\ cykli$	1	2	$\dots$	i	$\dots$	L
$\Delta\sigma_i$	$\Delta\sigma_1$	$\Delta\sigma_2$	$\dots$	$\Delta\sigma_i$	$\dots$	$\Delta\sigma_L$
P_i	P_1	P_2	$\dots$	P_i	$\dots$	P_L

9) Uwzględnienie wpływu cykli przeciążeniowych na wzrost pęknięcia (tabela 4):

$$\Delta\sigma_{i,ef} = C_i^P \Delta\sigma_i,$$

gdzie:

C_i^P – współczynnik spowolnienia wzrostu pęknięcia po wystąpieniu cykli przeciążeniowych [10].

Tabela 4. Zestawienie wartości zakresu zmian naprężeń efektywnych $\Delta\sigma_{i,ef}$ uwzględniających występowanie cykli przeciążających

$typy\ cykli$	1	2	$\dots$	i	$\dots$	L
$współczynniki$	C_1^P	C_2^P	$\dots$	C_i^P	$\dots$	C_L^P
$\Delta\sigma_{i,ef}$	$\Delta\sigma_{1,ef}$	$\Delta\sigma_{2,ef}$	$\dots$	$\Delta\sigma_{i,ef}$	$\dots$	$\Delta\sigma_{L,ef}$

Dla przyjętych wyżej ustaleń zależność (1) na prędkość pękania przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C\pi^{\frac{m}{2}}\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i \left(\Delta\sigma_{i,ef}\right)^m\right) M_k^m l^{\frac{m}{2}}, \tag{3}$$

gdzie:

M_k - wielkość określająca wpływ położenia pęknięcia w elemencie konstrukcyjnym oraz jego wymiarów w stosunku do wymiarów całego elementu [8].

Zależność (3) po uwzględnieniu wszystkich typów cykli obciążeniowych przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dN} = C\pi M_k^2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l, \tag{4}$$

gdzie $i = 1,2,\dots,L$.

Zależność (4) można wyrazić w funkcji czasu lub dokładniej w funkcji nalotu statku powietrznego. W tym celu przyjmujemy:

$$N = \lambda t, \tag{5}$$

gdzie:

λ – intensywność pojawiania się cykli obciążenia elementu konstrukcji;

N – liczba cykli obciążenia;

t – nalot statku powietrznego.

W naszym przypadku $\lambda = 1/\Delta t$ gdzie Δt jest czasem trwania zmęczeniowego cyklu obciążenia elementu. W celu określenia Δt można skorzystać z następującej zależności:

$$\Delta t = \frac{T}{N_c}, \tag{6}$$

gdzie:

T – średni czas trwania lotu standardowego statku powietrznego przy ustalaniu widma obciążenia,

N_c – liczba cykli w standardowym widmie obciążenia.

Po tych przekształceniach wzór (4) przyjmuje postać:

$$\frac{dl}{dt} = \lambda C\pi M_k^2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l. \tag{7}$$

Wzór (7) charakteryzuje prędkość narastania pęknięcia dla widma jednorodnego z cyklami ważonymi jednego typu.

3. Określenie funkcji gęstości długości pęknięcia elementu w funkcji czasu (nalotu)

Niech $U_{l,t}$ oznacza prawdopodobieństwo, że dla nalotu statku równego t długość pęknięcia elementu wynosi l. Równanie różnicowe dla powyższych ustaleń przyjmuje postać [7,18]:

$$U_{l,t+\Delta t} = (1 - \lambda\Delta t)U_{l,t} + \lambda\Delta t U_{l-\Delta l,t}, \tag{8}$$

gdzie:

Δl – przyrost pęknięcia w czasie jednego cyklu zastępczego.

Wartość przyrostu długości pęknięcia na podstawie wzoru (7) będzie:

$$\Delta l = \lambda C\pi M_k^2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l\, \Delta t. \tag{9}$$

Równanie (8) w zapisie funkcyjnym przyjmuje postać:

$$U(l, t + \Delta t) = (1 - \lambda\Delta t)U(l,t) + \lambda\Delta t U(l - \Delta l, t)\,, \tag{10}$$

gdzie:

$U(l,t)$ – funkcja gęstości długości pęknięcia po nalocie wynoszącym t określonym w godzinach lotu;

$(1 - \lambda\Delta t)$ – prawdopodobieństwo, że w czasie o długości Δt nie wystąpi zastępczy cykl obciążenia;

$\lambda\Delta t$ – prawdopodobieństwo tego, że w czasie o długości Δt wystąpi zastępczy cykl obciążenia.

Równanie (10) przekształcimy w równanie różniczkowe cząstkowe. W tym celu przyjmujemy następujące przybliżenia:

$$\left.\begin{aligned} U(l, t+\Delta t) &\cong U(l,t) + \frac{\partial U(l,t)}{\partial t}\Delta t \\ U(l-\Delta l, t) &\cong U(l,t) - \frac{\partial U(l,t)}{\partial l}\Delta l + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2}(\Delta l)^2 \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Podstawiając (11) do (10) otrzymujemy:

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial U(l,t)}{\partial l}\Delta l + \frac{1}{2}\lambda(\Delta l)^2\frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2}, \tag{12}$$

gdzie:

$\Delta l = \lambda C\pi\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) M_k^2 l\Delta t.$

Ponieważ, $\lambda\Delta t = 1$, stąd:

$$\Delta l = C\pi\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) M_k^2 l. \tag{13}$$

Niech:

$$C\pi M_k^2 = C_2, \tag{14}$$

$$\Delta l = C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l. \tag{15}$$

Podstawiając zależność (15) do równania (12) otrzymujemy:

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\lambda\frac{\partial U(l,t)}{\partial l}C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l + \frac{1}{2}\lambda\left(C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l\right)^2\frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2}. \tag{16}$$

W równaniu (16) należy za długość pęknięcia l podstawić wynik rozwiązania równania (7):

$$\frac{dl}{dt} = \lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l,$$

$$\int_{l_0}^{l}\frac{dx}{x} = \int_0^t C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) dt,$$

$$l = l_0 e^{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i\left(\Delta\sigma_{i,ef}\right)^2\right)t}. \tag{17}$$

Gdzie zgodnie ze wzorem (14):

$$C_2 = C\pi M_k^2.$$

Uwzględniając (17) to współczynniki równania (16) można zapisać następująco:

$$\alpha(t) = \lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l_0 e^{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i\left(\Delta\sigma_{i,ef}\right)^2\right)t} \tag{18}$$

$$\beta(t) = \lambda\left[C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l_0 e^{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i\left(\Delta\sigma_{i,ef}\right)^2\right)t}\right]^2 =$$

$$= \lambda C_2^2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right)^2 {l_0}^2 e^{2\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i\left(\Delta\sigma_{i,ef}\right)^2\right)t}. \tag{19}$$

Równanie (16) ze współczynnikami w postaci zależności (18) i (19) przyjmuje następującą postać dla $m = 2$:

$$\frac{\partial U(l,t)}{\partial t} = -\alpha(t)\frac{\partial U(l,t)}{\partial l} + \frac{1}{2}\beta(t)\frac{\partial^2 U(l,t)}{\partial l^2}. \quad (20)$$

Rozwiązanie szczególne równania (20) przyjmuje następującą postać [7, 18]:

$$U(l,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi A(t)}} e^{-\frac{(l-B(t))^2}{2A(t)}} \quad (21)$$

gdzie:
$B(t)$ – wartość średnia przyrostu długości pęknięcia dla nalotu t określona zależnością:

$$B(t) = \int_0^t \alpha(t)dt. \quad (22)$$

$A(t)$ – wariancja przyrostu długości pęknięcia dla nalotu t określona zależnością:

$$A(t) = \int_0^t \beta(t)dt. \quad (23)$$

Obliczenie całki (22):

$$B(t) = \int_0^t \alpha(t)dt = \lambda C_2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l_0 \int_0^t e^{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)t} dt =$$
$$= \lambda C_2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right) l_0 \frac{1}{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)} \cdot e^{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)t}\Bigg|_0^t =$$
$$= l_0\big(e^{\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)t} - 1\big). \quad (24)$$

Obliczenie całki (23):

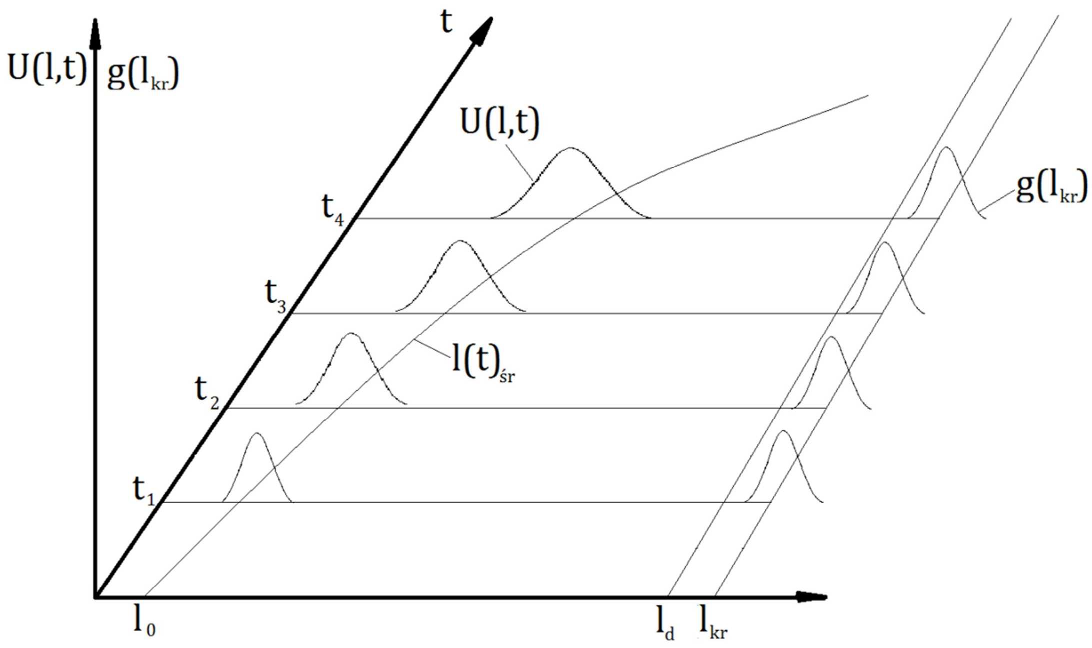
$$A(t) = \int_0^t \beta(t)dt = \lambda C_2^2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right)^2 l_0^2 \int_0^t e^{2\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)t} dt =$$
$$= \frac{\lambda C_2^2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)^2 l_0^2}{2\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)} \cdot e^{2\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)t}\Bigg|_0^t =$$
$$= \frac{1}{2} C_2 l_0^2 \left(\sum_{i=1}^{L} P_i\, U_i\big(\Delta\sigma_{i,ef}\big)^2\right)\big(e^{2\lambda C_2\left(\sum_{i=1}^{L} P_i U_i(\Delta\sigma_{i,ef})^2\right)t} - 1\big). \quad (25)$$

Gdzie zgodnie ze wzorem (14):

$$C_2 = C\pi M_k^2.$$

4. Określenie niezawodności i trwałości zmęczeniowej wybranego elementu konstrukcji statku powietrznego

Schemat narastania zagrożenia katastroficznego pęknięcia elementu konstrukcji pokazany jest na rysunku 1.



Rys.1. Schemat narastania zagrożenia katastroficznego pęknięcia elementu konstrukcji [18]

Element zostanie zniszczony, gdy bieżąca długość pęknięcia l przekroczy wartość długości krytycznej l_{kr} lub będzie równa tej wartości. Czyli:

$$l - l_{kr} \geq 0.$$

Gdzie l i l_{kr} są realizacjami zmiennych losowych $\hat{L}_t$ i L_{kr}. Stąd

$$\varkappa = \hat{L}_t - L_{kr}. \tag{26}$$

Funkcję gęstości zmiennej losowej $\varkappa$ wyznaczamy z zależności:

$$f(\varkappa)_t = \int_0^{\infty} g(l-\varkappa)U(l,t)dl. \tag{27}$$

Prawdopodobieństwo zniszczenia elementu konstrukcji wyraża się zależnością:

$$Q_t' = P\{\hat{L}_t - L_{kr} \geq 0\} = \int_0^{\infty} f(\varkappa)_t\, d\varkappa. \tag{28}$$

Stąd niezawodność elementu będzie:

$$R(t) = 1 - \int_0^{\infty} f(\varkappa)_t\, d\varkappa. \tag{29}$$

Niezawodność elementu konstrukcji można wyznaczyć również w następujący sposób. Krytyczną długość pęknięcia można określić wykorzystując współczynnik intensywności naprężeń w postaci:

$$K = M_k \sigma \sqrt{\pi l}. \tag{30}$$

Współczynnik określony zależnością (30) w przypadku krytycznej długości pęknięcia l_{kr} i krytycznego naprężenia σ_{kr} staje się wielkością krytyczną K_c nazywaną odpornością materiału na pękanie:

$$K_c = M_k \sigma_{kr} \sqrt{\pi l_{kr}}. \tag{31}$$

Stąd:

$$l_{kr} = \frac{K_c^2}{M_k^2 \sigma_{kr}^2 \pi}.$$

Wykorzystując zależność (31) i wprowadzając współczynnik bezpieczeństwa, można wyznaczyć wartość dopuszczalną (bezpieczną) długości pęknięcia:

$$\overline{l_d} = \frac{K_c^2}{k M_k^2 \sigma_{kr}^2 \pi}, \tag{32}$$

gdzie:
k – współczynnik bezpieczeństwa.

Uwzględniając długość pęknięcia początkowego l_0, możemy wyznaczyć dopuszczalny przyrost długości pęknięcia l_d korzystając z następującej zależności:

$$l_d = \overline{l_d} - l_0. \tag{33}$$

Wykorzystując zależność (33) można określić niezawodność elementu konstrukcji w sposób następujący:

$$R(t)_{l_d} = \int_{-\infty}^{l_d} U(l,t)dl \tag{34}$$

Normując podcałkową funkcję w zależności (34) otrzymujemy:

$$R(t)_{l_d} = \int_{-\infty}^{\frac{l_d - B(t)}{\sqrt{A(t)}}} U(z,t)dz, \tag{35}$$

gdzie:

$$z = \frac{l - B(t)}{\sqrt{A(t)}},$$

natomiast $B(t)\ i\ A(t)$ określone są zależnościami (24) i (25).

Dla przyjętego poziomu niezawodności odczytujemy z tablic rozkładu normalnego wartości górnej granicy całki (35). Stąd otrzymujemy zależność:

$$Q_{l_d} = \frac{l_d - B(t)}{\sqrt{A(t)}} \tag{36}$$

gdzie:
Q_{l_d} – wartość górnej granicy całki (35) dla której wartość całki będzie równa $R(t)_{l_d}$.

Rozwiązując otrzymane równanie z zależności (36) znajdujemy wartość nalotu (poszukiwaną trwałość elementu konstrukcji) dla którego spełniony jest przyjęty poziom niezawodności.

5. Uwagi końcowe wraz z przykładem liczbowym

W celu zilustrowania opracowanej metody przedstawiono przykład obliczeniowy prędkości wzrostu średniej długości pęknięcia w elemencie wykonanym ze stali o określonych własnościach materiałowych, poddanego oddziaływaniu rzeczywistego widma obciążenia. Obliczenia prowadzono dla przekształconego w sposób podany w punkcie 2 widma obciążeń zmiennoamplitudowych, które reprezentuje rzeczywiste widmo obciążenia elementu [7]. Wielkości charakteryzujące przekształcone widmo obciążeń zastosowane w badaniach zostało przedstawione w poniższej tabeli 5.

Tabela 5. Wielkości charakteryzujące przekształcone widmo obciążeń

Stopień obciążenia i	1	2	3	4	5	6	7
Liczba cykli	1	5	4	10	30	50	140
σ_i^{max} [MPa]	186	159	141	129	112	93	72
$\sigma_{i,śr}^{min}$ [MPa]	-28	-13	8	17	23	27	27
Współczynnik $\hat{R}_i$	-0,1505	-0,0818	0,0567	0,1317	0,2053	0,2903	0,375
Zakres naprężenia $\Delta\sigma_{i,ef}$ [MPa]	214	172	133	112	89	66	45
Współczynnik U_i	0,5030	0,5238	0,5691	0,5955	0,6228	0,6559	0,6906
Udział stopnia w widmie (częstość występowania) P_i	0,0042	0,0208	0,0167	0,0417	0,125	0,2083	0,5833

Tabela 5 zawiera wartości zakresów zmian naprężeń w cyklu $\Delta\sigma_i$ w przyjętych stopniach obciążenia i oraz ich częstości występowania P_i a także współczynniki uwzględniające wpływ asymetrii cyklu na rozwój pęknięcia.

Dla określonego materiału elementu modelowego, do obliczeń przyjęto następujące wartości współczynników materiałowych:

$$m = 2,$$

$$C = 5 \cdot 10^{-9}.$$

W prezentowanym przykładzie do obliczeń przyjęto początkową długość pęknięcia elementu $l_0 = 10mm$, natomiast dopuszczalną długość pęknięcia wyznaczono wykorzystując zależność (32) i wynosi ona $\overline{l_d} = 25mm$. Do obliczeń założono również, że współczynnik spowolnienia wzrostu pęknięcia po wystąpieniu cykli przeciążeniowych $C_i^P = 1$, natomiast współczynnik uwzględniający wpływ asymetrii cyklu na rozwój pęknięcia określony jest empirycznym równaniem $U_i = 0{,}55 + 0{,}33\hat{R}_i + 0{,}12\hat{R}_i^{\,2}$. Zmiana wartości współczynnika M_k w trakcie rozwoju pęknięcia uwzględniona została w procesie obliczeń numerycznych zgodnie z zależnością:

$$M_k = 1 + 0{,}128\left(\frac{l}{b}\right) - 0{,}288\left(\frac{l}{b}\right)^2 + 1{,}525\left(\frac{l}{b}\right)^3, \tag{37}$$

gdzie:

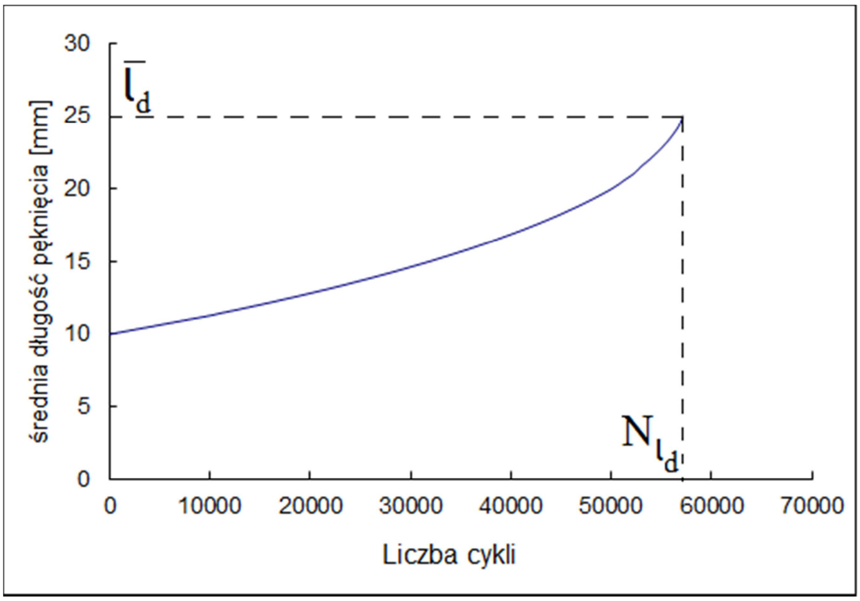
l – bieżąca długość pęknięcia;

b – szerokość elementu w kierunku wzrostu pęknięcia.

Następnie wykorzystano przekształcone równanie (24) na średnią długość pęknięcia uzależniając ją na podstawie równania (5) od liczby cykli obciążenia N:

$$B(N) = l_0 \cdot \left(e^{C\cdot\pi\cdot M_k^2\cdot\left(\sum_{i=1}^{L} P_i\cdot U_i\cdot\left(\Delta\sigma_{i,ef}\right)^2\right)\cdot N} - 1\right). \tag{38}$$

Na podstawie powyższej zależności wyznaczono przyrost średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia N od długości początkowej $l_0 = 10mm$ do długości dopuszczalnej $\overline{l_d} = 25mm$. Zmiana średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia została przedstawiona na rys. 2.



Rys. 2. Przyrost średniej długości pęknięcia w funkcji liczby cykli obciążenia

Bazując jedynie na obliczeniach wzrostu średniej długości pęknięcia zmęczeniowego $B(N)$, można stwierdzić, iż długość dopuszczalna pęknięcia $\overline{l_d} = 25mm$ zostanie osiągnięta po $N_{l_d} = 57115$ cyklach obciążenia. Jednakże, aby wyznaczyć trwałość zmęczeniową badanego elementu w ujęciu probabilistycznym należy dodatkowo uwzględnić opisaną wzorem (25) wartość wariancji długości pęknięcia $A(N)$. W tym celu korzystamy z równania (36) uzależniając go na podstawie równania (5) od liczby cykli obciążenia N:

$$Q_{l_d} = \frac{l_d - B(N)}{\sqrt{A(N)}} \tag{39}$$

Dla przyjętego poziomu niezawodności $R(N)_{l_d}{}^{*} = 0{,}99958$ odczytujemy z tablic rozkładu normalnego standardowego wartość górnej granicy całki (35) $Q_{l_d} = 3{,}34$. Rozwiązując powyższe równanie otrzymujemy liczbę cykli obciążenia $N_{l_d} = 56750$, która jest trwałością zmęczeniową badanego elementu w ujęciu probabilistycznym.

Zaletą prezentowanej metody jest fakt, że uwzględnia ona zjawiska fizyczne towarzyszące występowaniu zmiennego widma obciążenia. Należy pamiętać, iż w niniejszym opracowaniu przedstawiono metodę użyteczną w przypadku, gdy materiał elementu konstrukcji posiada odpowiednie cechy w postaci przyjętego umownie jako stała materiałowa wykładnika wzoru Parisa o wartość $m = 2$. Wartości występujących w tej metodzie stałych materiałowych (poza przyjętą wielkością $m = 2$), można określić doświadczalnie lub oszacować wykorzystując dane eksploatacyjne rozwoju pęknięć z zastosowaniem metody momentów lub funkcji wiarogodności (np. współczynnik C równania Parisa). W przypadku szacowania trwałości zmęczeniowej elementu konstrukcji dla którego właściwym jest przyjęcie wykładnika równania Parisa $m \neq 2$ należy wykorzystać metodę przedstawioną w pracy [17].

Literatura

1. Bolotin V, Belousov I. Early fatigue crack growth as the damage accumulation process. J Probabilist Eng Mech 2001; 16: 279–87.

2. Castiglioni C. A stochastic model for estimating the fatigue life of structural steel details. J Construct Steel Res 1991; 18: 111–38.

3. Castillo E, Fernández-Canteli A, Castillo C, Mozos C. A new probabilistic model for crack propagation under fatigue loads and its connection with Wöhler fields. Int J Fatigue 2010; 32(4): 744–53.

4. Ghonem H, Provan W. Micromechanics theory of fatigue crack initiation and propagation. Eng Fract Mech 1988; 13: 963–977.

5. Kim Jung-Kyu, Shim Dong Suk. Probabilistic analysis on variability of fatigue crack growth using the Markov chain. J Mech Sci Technol 1998;12(6): 1135–1142.

6. Kocańda D, Kocańda S, Tomaszek H. Probabilistic description of fatigue crack growth in a titanium alloy under complex stress state. In: Blom AF, editor. Proc. Eighth Int. Fatigue Congress, EMAS, Sweden; 2002: 1299–306.

7. Kocańda D., Tomaszek H., Jasztal M. Predicting fatigue crack growth and fatigue life under variable amplitude loading, Fatigue of Aircraft Structures - Monographic Series Issue 2010, Institute of Aviation Scientific Publications, Warsaw 2010: 37–51.

8. Kocańda S., Szala J. Podstawy obliczeń zmęczeniowych, PWN, Warszawa 1985.

9. Liu Y, Mahadevan S. Stochastic fatigue damage modeling under variable amplitude loading. Int J Fatigue 2007; 29:1149–61.

10. Rama Chandra Murthy A., Palani, Nagesh R. Iyer G.S., An improved Wheeler model for remaining life prediction of cracked plate panels under tensile-compressive overloading, SID, 1 No 3 (2005): 203-213.

11. Schijve J., The significance of fractography for investigations of fatigue crack growth under variable-amplitude loading, Fatigue Fract Eng Mater Struct 22 (1999): 87–99.

12. Schijve J., Skorupa M., Skorupa A., Machniewicz T., Gruszczyński P. Fatigue crack growth in aluminium alloy D16 under constant and variable amplitude loading, Int. J. Fatigue, 26 (2004): 1–15.

13. Skorupa M. Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading – a literature review. Part I. Empirical trends. Fatigue Fract Eng Mater Struct 1998; 21:987–1006.

14. Skorupa M. Load interaction effects during fatigue crack growth under variable amplitude loading – a literature review. Part II. Qualitative interpretation. Fatigue Fract Eng Mater Struct 1999; 22: 905–926.

15. Sobczyk K, Trębicki J. Cumulative jump-correlated model for random fatigue. J Eng Fract Mech 1991; 40: 201–210.

16. Tang J, Spencer BF. Reliability solution for the stochastic fatigue crack growth problem. J Eng Fract Mech 1989; 12(2): 419–433.

17. Tomaszek H, Jasztal M, Zieja M. A simplified method to assess fatigue life of selected structural components of an aircraft for a variable load spectrum. Eksploatacja i Niezawodnosc - Maintenance and Reliability 2011; 4: 29-34.

18. Tomaszek H., Żurek J., Jasztal M. Prognozowanie uszkodzeń zagrażających bezpieczeństwu lotów statków powietrznych, Wydawnictwo Naukowe ITE-PIB, Radom 2008.