

Jan PURCZYŃSKI\*

## WYBRANE PROBLEMY WYZNACZANIA WIDMA AMPLITUDOWEGO SYGNAŁU OKRESOWEGO

W pracy rozpatrzono błąd wartości amplitudy sygnału okresowego wyznaczonej za pomocą DFT wywołany próbkowaniem niekoherentnym oraz nieznanym przesunięciem fazowym w chwili próbkowania. Błąd ten jest dwuwymiarową zmienną losową zależną od współczynnika desynchronizacji  $a \in (-0.5, 0.5)$  oraz przesunięcia  $t_0 \in (0, T)$  gdzie  $T$  - okres sygnału. Przeprowadzono symulacje komputerowe (4 mln. powtórzeń) wykonując uśrednianie względem poszczególnych zmiennych losowych i wyznaczając rozkłady brzegowe. Ponadto, porównano błąd amplitudy wynikający z zastosowania klasycznego okna Dirichleta z błędem zastosowania symetrycznego okna Dirichleta [2]. W tym ostatnim przypadku wyznaczono postać analityczną błędu.

### 1. WSTĘP

Algorytmy wykorzystywane w analizie częstotliwościowej sygnałów okresowych wymagają zastosowania okna czasowego mającego na celu ograniczenia liczby próbek. W pracy zostanie porównane okno Dirichleta:

$$w(n) = 1 \quad \text{dla } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (1)$$

z tzw. symetrycznym oknem Dirichleta [2] :

$$ws(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 1, 2, \dots, N-1 \\ 0.5 & \text{dla } n = 0 \text{ oraz } n = N \end{cases} \quad (2)$$

Zakłada się, że celem analizy częstotliwościowej sygnału okresowego jest wyznaczenie wartości amplitud poszczególnych harmonicznych oraz odpowiadające im wartości częstotliwości. Stosowanym narzędziem jest dyskretna transformata Fouriera. W praktyce okres sygnału  $T$  nie jest znany – próbkowanie jest niekoherentne. Zależność pomiędzy okresem próbkowania  $T_s$  a nieznanym okresem sygnału  $T$  opisuje wzór [2]:

$$NT_s = (M + a)T \quad (3)$$

gdzie:  $M, N$  – liczby naturalne.

Współczynnik desynchronizacji  $a$  jest zmienną losową o wartościach  $a \in (-0.5, 0.5)$ . Proces próbkowania sygnału związany jest również z

\* Zachodniopomorski Uniwersytet Technologiczny w Szczecinie.

występowaniem nieznanego przesunięcia fazowego pomiędzy chwilą rozpoczęcia próbkowania a fazą analizowanego sygnału. Wartości tego przesunięcia odpowiada zmienna losowa  $t_0 \in (0, T)$ .

W pracy, dla sygnału harmonicznego o znanych parametrach, wykonano badania symulacyjne mające na celu określenia błędu amplitudy kolejnych harmonicznnych. Błąd ten jest zmienną losową określoną na płaszczyźnie ( $a$  i  $t_0$ ). W celu wizualizacji błędu, w pracy [1] wykonano uśrednianie względem zmiennej  $t_0$  i zamieszczono histogram błędu w zależności od parametru  $a \in (-0.5, 0.5)$ .

W niniejszej pracy rozpatrzono inną kolejność uśredniania, co prowadzi do histogramu błędu w funkcji zmiennej losowej

$$t_0 \in (0, T) \quad (4)$$

Ponadto, porównano błąd amplitudy wynikający z zastosowania okna Dirichleta (1) z błędem zastosowania symetrycznego okna Dirichleta (2).

## 2. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Jako przykład rozpatrzony zostanie spróbkowany sygnał harmoniczny:

$$y(n) = \sin(\omega \cdot t_n + \psi) \quad (5)$$

Uwzględniając:

$$t_n = t_0 + n \cdot T_s; \quad \omega = \frac{2\pi}{T}; \quad M=1$$

oraz wzory (3) i (4), zależność (5) przyjmuje postać:

$$x(n) = \sin(2\pi \tau + 2\pi(1+a)\frac{n}{N} + \psi) \quad (6)$$

gdzie:  $\tau = \frac{t_0}{T}$ ;  $\tau \in (0, 1)$ .

Dla sygnału (6) zostanie wyznaczona dyskretna transformata Fouriera (DFT):

$$X_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right); \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} \quad (7)$$

gdzie:  $k$  – numer kolejnej harmonicznnej.

Ze wzorów (6) i (7), uzyskuje się:

$$X_k = \frac{\sin(\pi a)}{N} \frac{\cos\left(A - \frac{2\pi(1+a)}{N}\right) - \cos(A) \cos\left(\frac{2\pi k}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cos(A)}{\sin\left(\frac{\pi(1+a-k)}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi(1+a+k)}{N}\right)} \quad (8)$$

gdzie:  $A = 2\pi\tau + \pi a + \psi$ .

W przypadku symetrycznego okna Dirichleta, DFT wyznacza się ze wzoru:

$$XS_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^N ws(n)x(n) \exp\left(\frac{j2\pi kn}{N}\right) ; k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$$

uzyskując

$$XS_k = \frac{\sin(\pi a)}{N} \frac{\sin(A) \sin\left(\frac{2\pi(1+a)}{N}\right) + j \sin\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \cos(A)}{\sin\left(\frac{\pi(1+a-k)}{N}\right) \sin\left(\frac{\pi(1+a+k)}{N}\right)} \quad (9)$$

gdzie: A określa wzór (8).

### 3. WYNIKI SYMULACJI KOMPUTEROWYCH

Stosując generatory liczb losowych o rozkładzie równomiernym wykonano 4 mln. powtórzeń sygnału (6) generując  $M=2000$  wartości współczynnika  $a$  oraz  $M=2000$  wartości względnego czasu  $\tau$ . Zgodnie ze wzorem (8) wyznaczono DFT a następnie określono błędy amplitud poszczególnych harmoniczných:

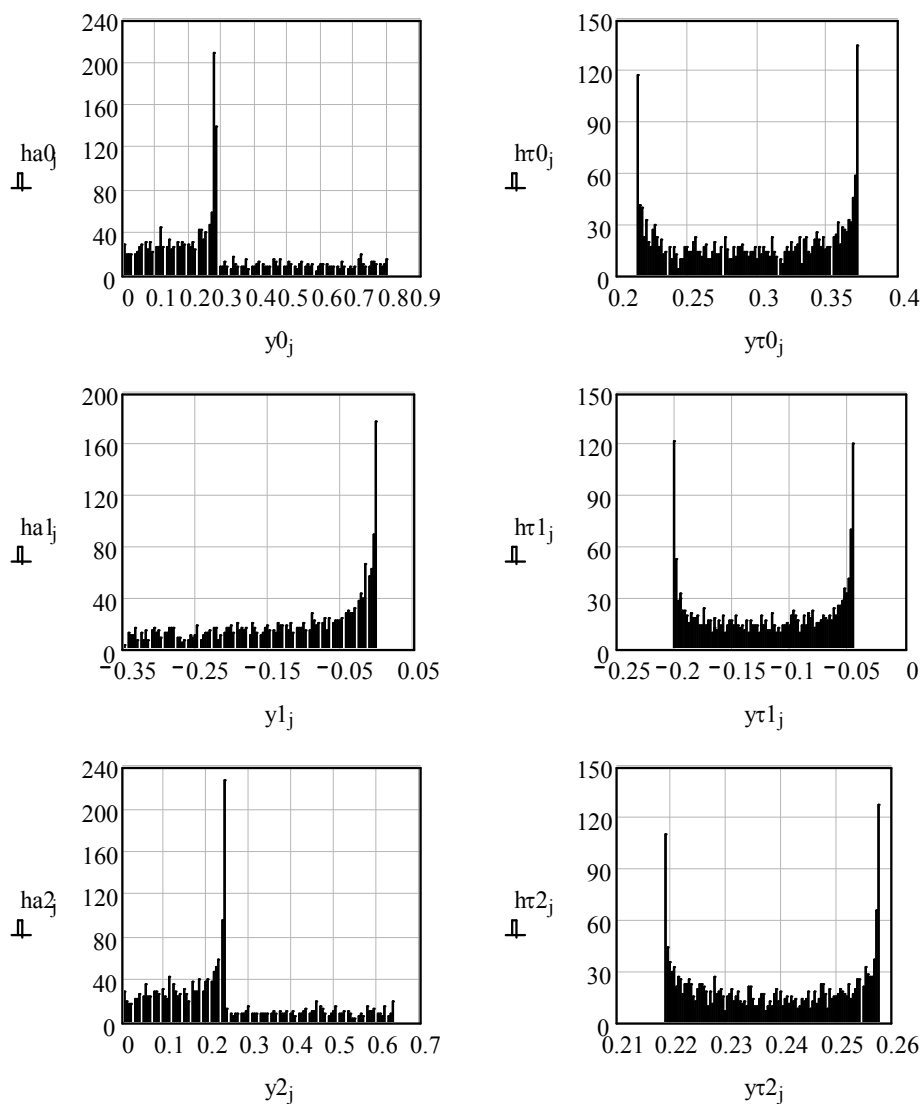
$$b(a, \tau)_k = \begin{cases} |X_k| & \text{dla } k \neq 1 \\ |X_k| - 1 & \text{dla } k = 1 \end{cases} \quad (10)$$

Błąd  $b(a, \tau)_k$  jest dwuwymiarową zmienną losową określoną na płaszczyźnie  $(a, \tau)$  gdzie:  $a \in (-0.5, 0.5)$ ;  $\tau \in (0, 1)$ . Wykonując uśrednianie względem  $a$  ( $\tau$ ) uzyskuje się rozkłady brzegowe – jednowymiarowe zmienne losowe.

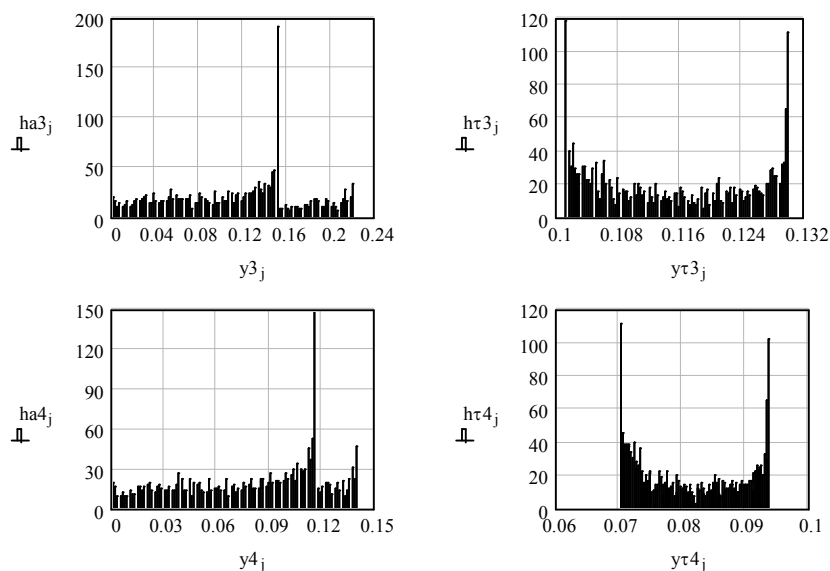
Na Rys.1 przedstawiono histogramy wartości błędu amplitudy  $h_0$  (wartość średnia),  $h_1$  (pierwsza harmoniczna),  $h_2$  (druga harmoniczna)- wyniki odnoszą się do okna o długości  $N = 16$ . Histogramy  $h_a$  odnoszą się do zmiennego współczynnika desynchronizacji  $a$  – wartości  $b(a, \tau)_k$  zostały wstępnie uśrednione względem czasu  $\tau$ . Histogramy  $h_\tau$  odpowiadają zmiennym wartościom czasu  $\tau$  - uśrednianie względem współczynnika  $a$ .

Z rysunku 1 wynikają istotne różnice pomiędzy histogramami  $h_a$  oraz  $h_\tau$ . Histogram  $h_\tau$  jest symetryczny i stanowi przeskalowany rozkład gęstości sygnału harmonicznego z przypadkową fazą [3, 4]. Na uwagę zasługuje różnica w długości przedziałów w których zawiera się błąd (wartości  $y$ ). W przypadku histogramu  $h_a$  jest to znacznie dłuższy przedział niż dla histogramu  $h_\tau$ , szczególnie widoczne dla składowej stałej oraz drugiej harmonicznej.

Rysunek 2 stanowi kontynuację rysunku 1, przy czym odnosi się do trzeciej i czwartej harmonicznej. Z rys.2 wynikają identyczne wnioski jak dla rys.1.



Rys.1. Histogramy błędu wartości amplitudy:  $ha$  wyznaczone dla zmieniającego się współczynnika  $a$ ;  $h\tau$  obliczone dla zmiennego czasu  $\tau$ . Wyniki DFT dla okna Dirichleta (wartość średnia, pierwsza i druga harmoniczna)



Rys. 2. Histogramy błędu wartości amplitudy:  $ha$  wyznaczone dla zmieniającego się współczynnika  $a$ ;  $h\tau$  obliczone dla zmiennego czasu  $\tau$ . Wyniki DFT dla okna Dirichleta (trzecia i czwarta harmoniczna)

Analogiczne obliczenia wykonano dla symetrycznego okna Dirichleta:

$$bs(a, \tau)_k = \begin{cases} |XS_k| & \text{dla } k \neq 1 \\ |XS_k| - 1 & \text{dla } k = 1 \end{cases} \quad (11)$$

W przypadku symetrycznego okna Dirichleta uzyskano histogramy zbliżone do przedstawionych na rysunku 1. Różnice odnotowano w stosunku do rysunku 2, tzn. dla trzeciej i czwartej harmonicznej. W przypadku histogramu  $ha$  różnice nie są zbyt istotne i przejawiają się węższym przedziałem zmienności wartości błędu dla histogramu  $hsa4$  ( $y4 < 0.12$ ), niż dla  $ha4$  ( $y4 < 0.141$ ). W przypadku histogramu  $h\tau$  przedziały zawierające wartości dla błędów różnią się istotnie: dla  $h\tau4$  zachodzi  $0,070 < y\tau4 < 0.094$ , podczas gdy: dla  $hs\tau4$  zachodzi  $0,054 < y\tau4 < 0.073$ .

#### 4. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

Korzystając z postaci analitycznej błędu wartości amplitudy wyznaczonej metodą DFT (wzór (8) i (10)), wyznaczono wartości brzegowe błędu:

$$B(a)_k = \int_0^1 b(a, \tau)_k d\tau \quad ; \quad BS(a)_k = \int_0^1 bs(a, \tau)_k d\tau \quad (12)$$

$$B'(\tau)_k = \int_{-0,5}^{0,5} b(a, \tau)_k da \quad ; \quad BS'(\tau)_k = \int_{-0,5}^{0,5} bs(a, \tau)_k da \quad (13)$$

Uwzględniając, że długość przedziału całkowania wynosi 1, wzory (12) i (13) określają uśrednioną wartość błędu względem jednego z parametrów (a lub  $\tau$ ).

Na rysunku 3 zamieszczono wartości tych błędów wyznaczone za pomocą procedury całkowania numerycznego programu MathCad.

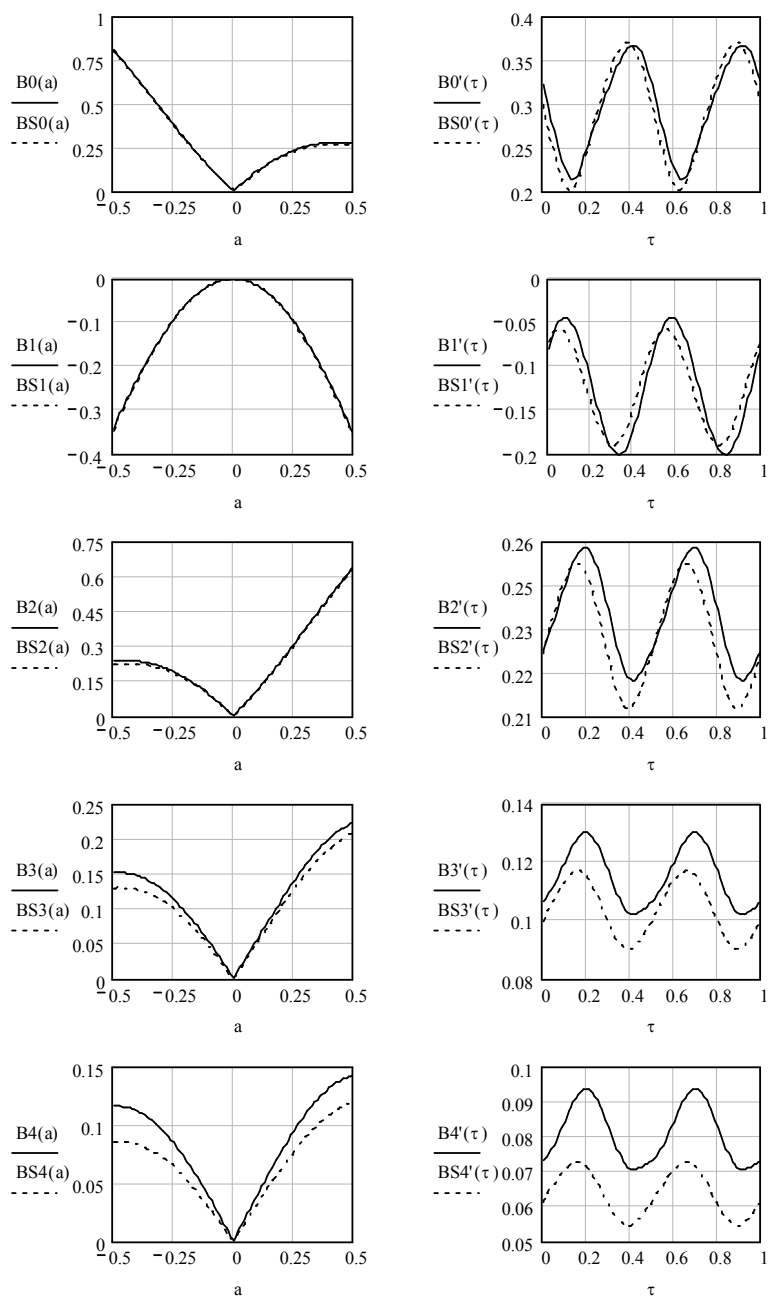
Z rysunku wynika rosnący charakter błędu  $B(a)$  wraz ze wzrostem wartości bezwzględnej współczynnika desynchronizacji  $|a|$ . Porównując krzywe  $B(a)$  i  $BS(a)$  stwierdza się porównywalne wyniki dla  $k = 0, 1, 2$  (składowa zerowa, pierwsza i druga harmoniczna). Dla trzeciej i czwartej harmonicznej zachodzi  $BS(a) < B(a)$ , co oznacza, że symetryczne okno Dirichleta prowadzi do mniejszych wartości błędu amplitudy.

Odnosnie błędów  $B'(\tau)$  i  $BS'(\tau)$  stwierdza się, że zawierają składową stałą oraz składową zmienną, którą w przybliżeniu można opisać sinusoidą o podwojonej częstotliwości – przedziałowi  $\tau \in (0, 1)$  odpowiadają dwa okresy sinusoidy. Należy zauważyć znacznie mniejszy przedział zmienności błędu  $B'(\tau)$  ( $BS'(\tau)$ ), niż dla błędu  $B(a)$  ( $BS(a)$ ). Porównując wartości błędów  $B'(\tau)$  i  $BS'(\tau)$  stwierdza się porównywalne wartości dla  $k=0$  i  $k=1$ . Natomiast, dla  $k=2, 3, 4$  zachodzi  $BS'(\tau) < B'(\tau)$ , co oznacza mniejsze wartości błędu amplitudy dla drugiej, trzeciej i czwartej harmonicznej wyznaczonej dla symetrycznego okna Dirichleta.

Wykonując całkowanie błędu  $B(a)_k$  ( $B'(\tau)_k$ ) względem zmiennej a ( $\tau$ ) uzyskuje się całkowity błąd średni  $BT_k$ :

$$BT_k = \int_{-0,5}^{0,5} B(a)_k da = \int_0^1 B'(\tau)_k d\tau \quad (14)$$

$$BST_k = \int_{-0,5}^{0,5} BS(a)_k da = \int_0^1 BS'(\tau)_k d\tau \quad (15)$$

Rys. 3. Wartości błędów amplitud w funkcji współczynnika  $a$  oraz czasu  $\tau$

Wartości błędów  $BT_k$  i  $BST_k$  zamieszczono w Tabeli 1, gdzie porównano je z wartościami wyznaczonymi empirycznie ( $BC_k$  i  $BSC_k$ ) dla 4 milionów powtórzeń symulacji.

Tabela 1. Wartości błędów amplitud kolejnych harmonicznych

Numer harmonicznej	$BC_k$	$BT_k$	$BSC_k$	$BST_k$
0	0,297	0,295	0,292	0,290
1	-0,121	-0,122	-0,123	-0,124
2	0,238	0,239	0,232	0,233
3	0,115	0,115	0,104	0,104
4	0,081	0,081	0,063	0,064

## LITERATURA

- [1] Augustyniak J., Wpływ typu okna czasowego na niepewność wyznaczenia widma amplitudowego sygnału okresowego, Przegląd Elektrotechniczny, Nr1/2010 s.245-248.
- [2] Purczyński J.: Application of trapezoidal integration method in determining discrete windows, Computer Applications in Electrical Engineering Poznań (przyjęte do druku).
- [3] Szabat J., Podstawy teorii sygnałów, WKŁ, Warszawa, 1990.
- [4] Wojnar A. Teoria sygnałów, WNT, Warszawa, 1980.

### SELECTED ASPECTS OF DETERMINING THE AMPLITUDE SPECTRUM OF A PERIODIC SIGNAL

The paper examines the error - of periodic signal amplitude value determined using DFT – induced both by incoherent sampling and unknown phase shift at the moment of sampling. The error is a two-dimensional random variable dependent on the desynchronization coefficient  $a \in (-0.5, 0.5)$  and the shift  $t_0 \in (0, T)$  where  $T$ - period of the signal. Computer simulations were conducted (4 m. iterations) performing averaging in relation to particular random variables and determining marginal distributions. Furthermore, the comparison was made between the amplitude error resulting from application of a classical Dirichlet window and the error of applying a symmetric Dirichlet window [2]. In the latter case the analytic form of the error was determined.