www.biswbis.pb.edu.pl
CIVIL AND ENVIRONMENTAL ENGINEERING 6 (2015) ISSN: 2081-3279 BUDOWNICTWO I INŻYNIERIA ŚRODOWISKA

OBLICZANIE DŁUGOŚCI UZWOJENIA W SŁUPACH ŻELBETOWYCH

Ryszard J. GRABOWSKI*

Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska, Politechnika Białostocka, ul. Wiejska 45A, 15-351 Białystok

Streszczenie: Opracowano sposoby obliczania długości uzwojenia w słupach żelbetowych o przekroju prostokątnym, kołowym i eliptycznym. Problem ten jest dość ogólnikowo ujęty w literaturze i w zaleceniach normowych. Przedstawione w pracy sposoby obliczeń mogą być zastosowane w praktyce.

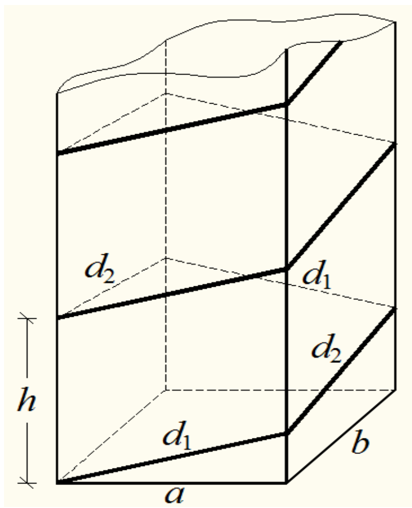
Słowa kluczowe: słupy żelbetowe, długość uzwojenia, zbrojenie spiralne.

1. Wprowadzenie

Obliczenia długości zastosowanego zbrojenia w konstrukcjach żelbetowych, jest zagadnieniem łatwym do zrealizowania jeśli elementy użyte w postaci prętów stalowych mają kształt liniowy. W przypadku innych stosowanych kształtów, głównie spiralnych, zagadnienie jest niekiedy bardziej skomplikowane. Najczęściej elementami żelbetowymi, w których wykorzystuje się zbrojenie spiralne, są słupy żelbetowe. Warto zaznaczyć, że w badaniach doświadczalnych wykazano, że elementy ściskane z uzwojeniem spiralnym mają większą nośność niż elementy ze strzemionami (Knauff, 2012; Korzeniowski, 2003; Łapko, 2003). Z tych względów uzwojenia tego typu mają ważne znaczenie w budownictwie. W niniejszych rozważaniach, uwaga zostanie poświęcona obliczeniom długości uzwojenia w słupach żelbetowych o przekroju prostokątnym, kołowym i eliptycznym. Szczegółowe rozważania dotyczące obliczania nośności słupów uzwojonych można znaleźć przykładowo w pracy Korzeniowskiego (2003).

2. Zbrojenie spiralne słupa o przekroju prostokątnym

Nośność słupów o przekroju kwadratowym można obliczać jak w przypadku uzwojonych rdzeni o przekroju kołowym, wpisanym w kwadratowy obrys przekroju słupów. W takich słupach zbrojenie poprzeczne stanowi pręt w kształcie spirali okalającej pręty zbrojenia głównego. W słupach o przekroju prostokątnym zbrojenie poprzeczne stanowi pręt w kształcie spirali okalającej pręty zbrojenia głównego. W słupach o przekroju prostokątnym zbrojenie poprzeczne tradycyjnie realizuje się w postaci zamkniętych strzemion. Można także wykonywać zbrojenie poprzeczne w postaci spirali, ale wtedy nośność oblicza się jak dla słupów nieuzwojonych. Schemat zbrojenia spiralnego w słupie o przekroju prostokątnym przedstawiono na rysunku 1.



Rys. 1. Zbrojenie spiralne na słupie prostopadłościennym

Wyznaczmy długość zbrojenia nawiniętego na słupie o podstawie prostokąta o wymiarze boków a i b i skoku h. Długość uzwojenia d na odcinku słupa h (jednego zwoju) składa się z czterech segmentów $d = d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 2d_1 + 2d_2$, ponieważ nawinięcia na dłuższym boku prostokąta $d_1 = d_3$, i na krótszym $d_2 = d_4$.

Przyjmując podstawę słupa jako poziom zerowy, wysokości kolejnych wierzchołków nawinięcia na krawędziach prostopadłościanu wyniosą $a/(2a + 2b)\cdot h$, $(a + b)/(2a + 2b)\cdot h$, $(2a + b)/(2a + 2b)\cdot h$, h. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa otrzymamy

$$d_1 = a\sqrt{1+\left(\frac{h}{2a+2b}\right)^2}$$

* Autor odpowiedzialny za korespondencję. E-mail: r.grabowski@pb.edu.pl

oraz

$$d_2 = b\sqrt{1+\left(\frac{h}{2a+2b}\right)^2}\ .$$

Zatem długość jednego zwoju liczona w osi pręta wyniesie

$$d = (2a+2b)\ \sqrt{1+\left(\frac{h}{2a+2b}\right)^2} = \sqrt{(2a+2b)^2+h^2} \qquad (1)$$

lub ze wzoru przybliżonego

$$d\ \approx (2a+2b)\ \left[1+\frac{1}{8}\left(\frac{h}{a+b}\right)^2\right] \qquad (2)$$

gdzie $h\,/\,(a+b) \le 2$.

Przykład 1. Obliczmy długość jednego zwoju dla a = 60 cm, b = 40 cm i h = 30 cm. Ze wzoru (1) mamy d = 202,24 cm, zaś zastosowanie wzoru przybliżonego (2) daje wynik d = 202,25 cm. Należy zauważyć, że długość jednego zwoju o skoku h = 30 cm w stosunku do obwodu prostokąta jest większa o 2,2 cm.

W przypadku zastosowania pręta stalowego o średnicy $2r_0$, należy uwzględnić jeszcze jego grubość, to znaczy należy dodać do boków prostokąta $2r_0$, wtedy

$$d\ = \sqrt{(2a+2b+8r_o)^2+h^2} \qquad (3)$$

W praktyce zamiast uwzględniać średnicę pręta, wygodniej jest zwiększyć boki prostokąta – a i b o $2r_0$ i zastosować wzór (1).

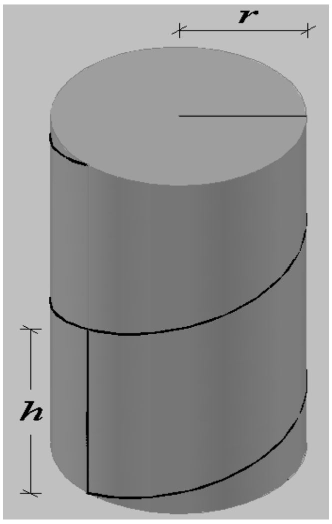
Wzór (1) dla słupa o przekroju kwadratowym o boku a, przyjmie postać

$$d = 4a\sqrt{1+\left(\frac{h}{4a}\right)^2} = \sqrt{16a^2+h^2} \qquad (4)$$

Przykład 2. Obliczymy długość pojedynczego zwoju w słupie o przekroju kwadratowym o boku a = 50 cm i skoku h = 40 cm. Stosując wzór (4) otrzymamy, d = 203,96 cm, a zatem wydłużenie spirali na prostopadłościanie, względem obwodu prostokąta wynosi 4 cm.

3. Zbrojenie spiralne słupa o przekroju kołowym

Przekrój kołowy słupów uzwojonych jest najbardziej racjonalny w porównaniu z innymi kształtami przekrojów, gdyż poza otuliną zbrojenia pozostały przekrój betonu słupa jest uwzględniony podczas określania nośności słupa. Schemat zbrojenia spiralnego na powierzchni rdzenia słupa o przekroju kołowym przedstawiono na rysunku 2. Zbrojenie spiralne tworzy linię śrubową.



Rys. 2. Zbrojenie spiralne na słupie o przekroju kołowym

Jeżeli przyjmiemy promień walca o promieniu r i skoku spirali h, to równanie parametryczne tej krzywej można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} x &= r\cos t \\ y &= r\sin t \\ z &= h\,t \end{aligned} \qquad (5)$$

gdzie parametr $t \in \langle 0,\ \pi \rangle$ dla jednego pełnego zwoju. Jeżeli skok h pojedynczego zwoju ustalony jest jako określona długość, to trzecie równanie w (5) należy rozumieć jako $z = (h\,t)\ /\ 2\pi$, gdzie t jest wyrażone w mierze łukowej. Długość krzywej w układzie współrzędnych <u>xyz</u> wyznacza się według wzoru

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \qquad (6)$$

w którym uwzględniając (5) otrzymamy

$$s_r = \sqrt{r^2+h^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{r^2+h^2} \qquad (7)$$

Jeżeli założymy stałą wartość promienia, to dla różnych skoków nawinięcia można obliczyć jego długość ze wzoru

$$s_r = 2\pi\ r\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2} \qquad (8)$$

Korzystając z rozwinięcia funkcji w szereg potęgowy

$$\sqrt{1+\left(\frac{h}{r}\right)^2}$$

dla $(h\ /\ r)^2 \le 1$, to jest dla $h \le r$ szereg jest zbieżny, otrzyma się wzór przybliżony

$$s_r \approx \pi\ \frac{2r^2+h^2}{r} = \pi\ r\left[2+\left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \qquad (9)$$

Zakładając grubość pręta spirali o promieniu r_0, długość jednego zwoju liczona wzdłuż jego osi wyniesie

$$s_r = 2\pi\sqrt{(r+r_0)^2 + h^2} \approx \pi\frac{2(r+r_0)^2 + h^2}{r+r_0} \qquad (10)$$

Z tablicy 1 wynika, że przy zachowaniu stałego stosunku skoku spirali do promienia pręta (h/r), wzrost jego długości o ustaloną wartość, powoduje stały wzrost długości pojedynczego zwoju. Ustalenie tego wzrostu dla dwóch promieni r i $r + \Delta$ (gdzie Δ oznacza dowolny obrany przyrost promienia) pozwala w prosty sposób obliczyć długość pojedynczego nawinięcia dla dowolnego promienia $r + n\Delta$, ze wzoru

$$s_{r+n\,\Delta} = s_{r+\Delta} + (n-1)\,(s_{r+\Delta} - s_r)$$

gdzie $n \geq 2$. Opisana zależność wynika ze wzoru (8), przy zachowaniu stałej wartości ilorazu h/r.

Łatwo zauważyć, porównując w tabeli 1 długości w nawiasach obliczone ze wzoru przybliżonego i bez nawiasów wyznaczone ze wzoru ścisłego, że różnice te rosną w miarę zwiększania promienia słupa. Przy wymaganej dokładności co najmniej 2 cm nie jest wskazane korzystanie ze wzoru przybliżonego, dla $h/r > ½$ i $r > 50$ cm.

Aby uzyskać pełniejszą odpowiedź na zastępowalność wzoru ścisłego wzorem przybliżonym należy obliczyć

$$s_{przybl} - s_r = s_m = \pi\, r\left[2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2 - 2\sqrt{1 + \left(\frac{h}{r}\right)^2}\right] \approx \frac{\pi\, r}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^4\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^2\right] \qquad (11)$$

przy $(h/r)^2 \leq 1$.

Dla założonej dokładności s_m i przyjętym ilorazie h/r, można wyznaczyć promień słupa, który wymaganą dokładność s_m zabezpiecza

$$r = \frac{4s_m}{\pi\left(\frac{h}{r}\right)^4\left[1 - \frac{1}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^2\right]} \qquad (12)$$

W tablicy 1 podano wartości s_m dla krańcowego dopuszczalnego przypadku $h/r = 1$.

4. Zbrojenie spiralne słupa o przekroju eliptycznym

Rozpatrzmy nawinięcie pręta stalowego na słup o przekroju elipsy o półosiach: dużej o długości a i małej o długości b, ze skokiem stałym h.

Równanie kanoniczne elipsy ma postać

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (13)$$

zaś jej równanie parametryczne

$$\begin{aligned} x &= a\sin t \\ y &= b\cos t \end{aligned} \qquad (14)$$

gdzie $t \in <0,\ 2\pi>$. Równanie spirali eliptycznej będzie miało postać

$$\begin{aligned} x &= a\sin t \\ y &= b\cos t \\ z &= h\,t \end{aligned} \qquad (15)$$

Wykorzystując wzór (6) oraz (15) otrzymuje się całkę eliptyczną zupełną drugiego rodzaju

$$\begin{aligned} s_e &= \int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t + h^2}\,dt \\ &= \sqrt{a^2+h^2}\int_0^{2\pi}\sqrt{1 - \frac{a^2-b^2}{a^2+h^2}\sin^2 t}\;dt \\ &= 4\sqrt{a^2+h^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2 t}\;dt \end{aligned} \qquad (16)$$

przy czym

$$k = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+h^2}}\ ,\ \ (|k| \leq 1)\ .$$

Tab. 1. Długość pojedynczego zwoju (w cm) dla $r_0 = 0$

Promień słupa r [cm]	$h = \frac{1}{4}r$	$h = \frac{1}{2}r$	$h = \frac{3}{4}r$	$h = r$	s_m dla $\frac{h}{r} = 1$
10	64,76 (65,80)	70,25 (70,69)	78,54 (80,50)	88,86 (94,25)	5,89
20	129,53(129,59)	140,50(141,37)	157,08(161,01)	177,72(188,50)	11,78
30	194,30(194,39)	210,74(212,06)	235,62(241,51)	266,57(282,74)	17,67
40	259,06(259,18)	280,99(282,74)	314,16(322,01)	355,43(376,99)	23,56
50	323,83(323,98)	351,24(353,43)	392,70(402,52)	444,29(471,24)	29,45

Warunek ten jest spełniony, gdy $b \geq h$, to znaczy skok spirali nie powinien być większy od b – małej półosi elipsy. Aby przeanalizować osiągane praktyczne wartości współczynnika k, rozważmy jego zmienność w zależności od wartości a, b i h. W tablicy 2 podano zakres zmienności k dla przyjętych wartości b i h spełniającego warunek $0 \leq h \leq b$.

Tab. 2. Zakres zmienności k dla przyjętych wartości b

b	$0{,}9a$	$0{,}8a$	$0{,}7a$	$0{,}6a$	$0{,}5a$
k max.	0,44	0,60	0,71	0,80	0,87
k min.	0,32	0,46	0,59	0,69	0,65

Zmieniając zmienną całkowania poprzez podstawienie

$$u = \sin t, \quad \left(du = \cos t \, dt = \sqrt{1-\sin^2 t} \, dt = \sqrt{1-u^2} \, dt\right)$$

wzór (16) wyrazić można także w postaci

$$s_e = 4\sqrt{a^2+h^2} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} \, du = 4\sqrt{a^2+h^2} \; E(k) \qquad (17)$$

gdzie $k = \sin \alpha$. W tablicy 3 zestawiono, wykorzystując (Bronsztejn i Siemiendiajew, 2015), wartości całki $E(k)$ dla podstawowego zakresu stosowalności $k \in$ <sin 16º, sin 60º>.

Łatwo zauważyć, porównując wzory (7) i (16), że różnica długości jednego zwoju na słupie o przekroju koła, jest większa niż w przekroju elipsy, przy $r = a$ i tym samym skoku spirali h. Wynosi ona

$$\Delta s = s_r - s_e = 2\sqrt{a^2+h^2}\,(\pi - 2\,E) \qquad (18)$$

Stąd wynika, że długość pojedynczego zwoju eliptycznego można obliczyć ze wzoru

$$\begin{aligned} s_e &= s_r - \Delta s = s_r \frac{2\,E}{\pi} \\ &= 2\pi\sqrt{a^2+h^2}\,\frac{2\,E}{\pi} = 4\sqrt{a^2+h^2}\;E \end{aligned} \qquad (19)$$

Zatem przy stałej wartości promienia okręgu a (półoś duża elipsy) i tym samym skoku h w obu przekrojach, można długość jednego zwoju dla okręgu (długość linii śrubowej) pomnożyć przez współczynnik korygujący $2E / \pi$, aby otrzymać długość tego zwoju dla przekroju eliptycznego.

Przykład 3. Rozważmy słup żelbetowy o przekroju kołowym, o promieniu $r = a$ =40 cm i skoku spirali h = 30 cm, wtedy długość jednego zwoju zgodnie ze wzorem (7) wyniesie $s_r = s_a$ = 314,16 cm, (obwód okręgu wynosi 251,33 cm), zaś dla słupa o przekroju elipsy a = 40 cm, $b = 0{,}8a$ = 32 cm i h = 30 cm, obliczamy najpierw współczynnik.

$$k = \sqrt{\frac{40^2 - 32^2}{40^2 + 30^2}} = 0{,}48$$

Odpowiada to kątowi w podziale stopniowym 28,6854, którego sinus wynosi 0,48. Dla obliczonego k, wykorzystując tabelę 3, po wykonaniu interpolacji otrzymamy E = 1,4760 · ($2E / \pi$) = 0,93965. Zatem długość jednego zwoju eliptycznego wyniesie s_e = 314,159 · 0,93965 = 295,20 cm. Wykorzystanie wzoru (16) daje oczywiście ten sam wynik.

Warto zwrócić uwagę, że jeżeli $b \to 0$, to w granicy obwód zwoju bez uwzględnienia skoku (h = 0) wyniesie $4a$, co wynika także ze wzoru (16). Jeżeli uwzględni się skok spirali h, przy $b \to 0$, to długość graniczna jednego pełnego zwoju wyniesie

$$2\sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{16a^2 + h^2}\,.$$

Tab. 3. Wartość całki eliptycznej dla różnych wartości k

αº $k = \sin \alpha$	E	$2E/\pi$	αº $k = \sin \alpha$	E	$2E/\pi$	αº $k = \sin \alpha$	E	$2E/\pi$
0	1,5708	1,0000						
(15) 0,25882	1,5442	0,9831	(30) 0,50000	1,4675	0,4392	(45) 0,70711	1,3506	0,8598
(16) 0,27564	1,5405	0,9807	(31) 0,51504	1,4608	0,9300	(46) 0,71934	1,3418	0,8542
(17) 0,29237	1,5367	0,9783	(32) 0,52992	1,4539	0,9256	(47) 0,73135	1,3329	0,8486
(18) 0,30902	1,5326	0,9757	(33) 0,54464	1,4469	0,9211	(48) 0,74314	1,3238	0,8428
(19) 0,32557	1,5283	0,9729	(34) 0,55919	1,4397	0,9165	(49) 0,75471	1,3147	0,8370
(20) 0,34202	1,5238	0,9701	(35) 0,57358	1,4323	0,9118	(50) 0,76604	1,3055	0,8311
(21) 0,35837	1,5191	0,9671	(36) 0,58779	1,4248	0,9071	(51) 0,77715	1,2963	0,8253
(22) 0,37461	1,5141	0,9639	(37) 0,60182	1,4171	0,9022	(52) 0,78801	1,2870	0,8193
(23) 0,39073	1,5090	0,9607	(38) 0,61566	1,4092	0,8971	(53) 0,79864	1,2776	0,8133
(24) 0,40674	1,5037	0,9573	(39) 0,62932	1,4013	0,8921	(54) 0,80902	1,2681	0,8073
(25) 0,42262	1,4981	0,9537	(40) 0,64278	1,3931	0,8869	(55) 0,81915	1,2587	0,8013
(26) 0,43837	1,4924	0,9501	(41) 0,65606	1,3849	0,8817	(56) 0,82904	1,2492	0,7953
(27) 0,45990	1,4864	0,9463	(42) 0,66913	1,3765	0,8763	(57) 0,83867	1,2397	0,7892
(28) 0,46947	1,4803	0,9424	(43) 0,68200	1,3680	0,8709	(58) 0,84805	1,2301	0,7831
(29) 0,48481	1,4740	0,9384	(44) 0,69466	1,3594	0,8654	(59) 0,85717	1,2206	0,7771
(30) 0,50000	1,4675	0,9342	(45) 0,70711	1,3506	0,8598	(60) 0,86603	1,2111	0,7710

5. Podsumowanie

Obliczenia długości zbrojenia krzywoliniowego słupów można łatwo wyznaczyć stosując odpowiednie formuły matematyczne odpowiadające właściwej formie spirali. Oczywistym jest, że całkowita długość krzywoliniowej spirali w słupie, równa jest iloczynowi długości pojedynczego zwoju oraz ilości pełnych zwojów (przy założeniu braku resztówek). W powyższych rozważaniach pominięto zalecenia normowe dotyczące zbrojenia podłużnego i poprzecznego. Zgodnie z Eurokodem 2 – EN 1992-1-1:2008 *Projektowanie konstrukcji z betonu – Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków*, pręty podłużne powinny mieć średnicę nie mniejszą niż zlecana w normie. Liczba prętów podłużnych w słupie o przekroju kołowym nie powinna być mniejsza od czterech, zaś średnica uzbrojenia poprzecznego nie powinna być mniejsza od 6 mm i od jednej czwartej maksymalnej średnicy prętów podłużnych. Skok linii śrubowej uzwojenia może spełniać warunki podane w normie PN-B-03624:2002 *Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone – obliczenia statyczne i projektowanie*. W normach technicznych strona obliczenia długości uzwojenia jest potraktowana dość ogólnikowo. Nierzadko spotykamy się z pytaniem jak należy je obliczyć samodzielnie. W tym świetle rozważania, przeprowadzone w jednolitym ujęciu, mogą być bardzo pomocne w praktyce.

Literatura

Bronsztejn I. N., Siemiendiajew K. A. (2015). Matematyka, Poradnik matematyczny. *PWN*, wyd. 20, Warszawa.

Knauff M. (2012). Obliczanie konstrukcji żelbetowych według Eurokodu 2. *PWN*, Warszawa.

Korzeniowski P. (2003). Słupy uzwojone. Komentarz naukowy do PN-B-03264:2002, Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprzężone, tom I. *Instytut Techniki Budowlanej*, Warszawa.

Łapko A. (2003). Projektowanie konstrukcji żelbetowych. *Wyd. Arkady*, Warszawa.

CALCULATION OF THE WINDING LENGTH IN THE REINFORCED CONCRETE POLES

Abstract: The ways of calculating the length of the winding in the reinforced concrete poles with rectangular, circular and elliptical section were developed. This problem is quite generally described in literature and standard recommendations. The presented methods of calculation may be used in practice.