

# MEMBRANOWE PRZEKRYCIA DACHOWE

## Część 1 – projektowanie wstępne

dr inż. Marek Pańtak  
Instytut Materiałów i Konstrukcji Budowlanych  
Politechnika Krakowska

Na etapie projektowania zadaszeń membranowych należy pamiętać, że w projekcie zadaszenia istotny jest nie tylko efekt wizualny, lecz także zapewnienie odpowiedniej nośności konstrukcji oraz jej odporności na dynamiczne efekty oddziaływania środowiska. Zaprojektowana konstrukcja przekrycia musi zapewniać przede wszystkim bezpieczeństwo użytkownika przestrzeni, nad którą została zawieszona.

Konstrukcje membranowe z powodzeniem wykorzystywane są jako przekrycia dachowe zarówno małych przestrzeni, jak i dużych, niekiedy rozległych obszarów. Membrany wykorzystywane są jako zadaszenia w przydomowych ogrodach, zadaszenia tarasów, restauracji, parkingów, placów zabaw, placów handlowych oraz jako przekrycia znacznie większych terenów wystawowych, dworców, amfiteatrów i stadionów.

### Idea i formy konstrukcyjne

Te stwarzające możliwość swobodnego, niemal nieograniczonego kształtowania formy przestrzennej dachu konstrukcje, przeżywają we współczesnej architekturze swój renesans. Oryginalny i niepowtarzalny wygląd zadaszenia membranowego staje się często wyróżnikiem całej inwestycji budowlanej. Zastosowanie

membran nadaje budynkom wrażenie lekkości i często futurystyczny wygląd.

Idea przekryć membranowych oparta jest na kształtowaniu ich struktury przestrzennej w formie powierzchni dwukrzywiznowej antyklasycznej. Powierzchnie tego typu charakteryzują się występowaniem krzywizn przeciwnych znaków w każdym ich punkcie, w dwóch prostopadłych kierunkach. W dowolnym punkcie powierzchni antyklasycznej w kierunku jednej z osi powierzchnia ta jest wypukła, w kierunku drugiej osi – wklęsła.

Takie ukształtowanie zadaszenia membranowego pozwala na skuteczne przenoszenie działających na nie obciążeń. Krzywizny o przeciwnych znakach wzajemnie ograniczają swobodę odkształceń membrany, przyczyniając się do efektywnego przenoszenia przez nią zarówno obciążeń skierowanych ku dołowi (dążących do ściśnię-

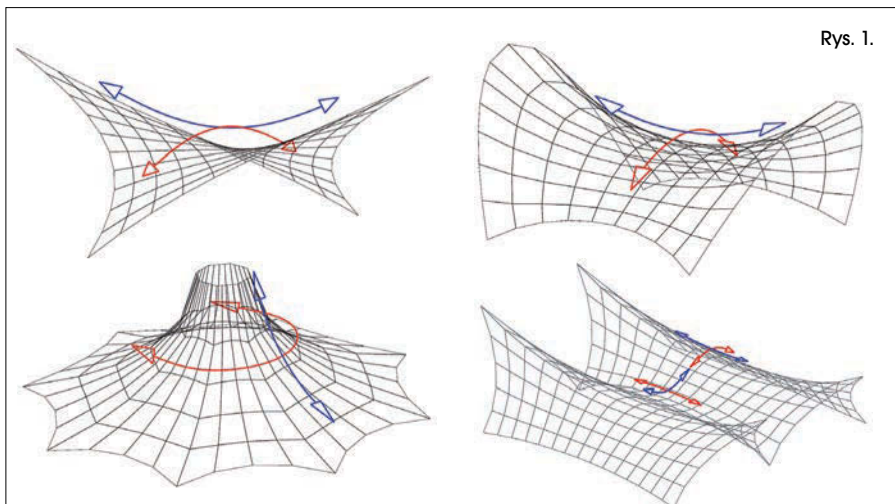
cia wypukłych włókien membrany), jak i obciążeń skierowanych ku górze, dążących do uniesienia membrany (wywołujących ścisnienie wklęsłych włókien membrany). Zadaszenie z wiotkiego materiału (membrany) ukształtowane w formie powierzchni jednokrzywiznowej nie przeniosłoby obciążeń ściskających. Już pod działaniem ciężaru własnego doznałoby dużych deformacji. Odpowiednie ukształtowanie dwukrzywiznowe zapewnia zadaszeniom membranowym zachowanie niezmienną formę geometryczną.

Często stosowane kształty przekryć membranowych o powierzchniach antyklasycznych to siódło, stożek, powierzchnie wsparte na łukach oraz powierzchnie faliste (rys. 1).

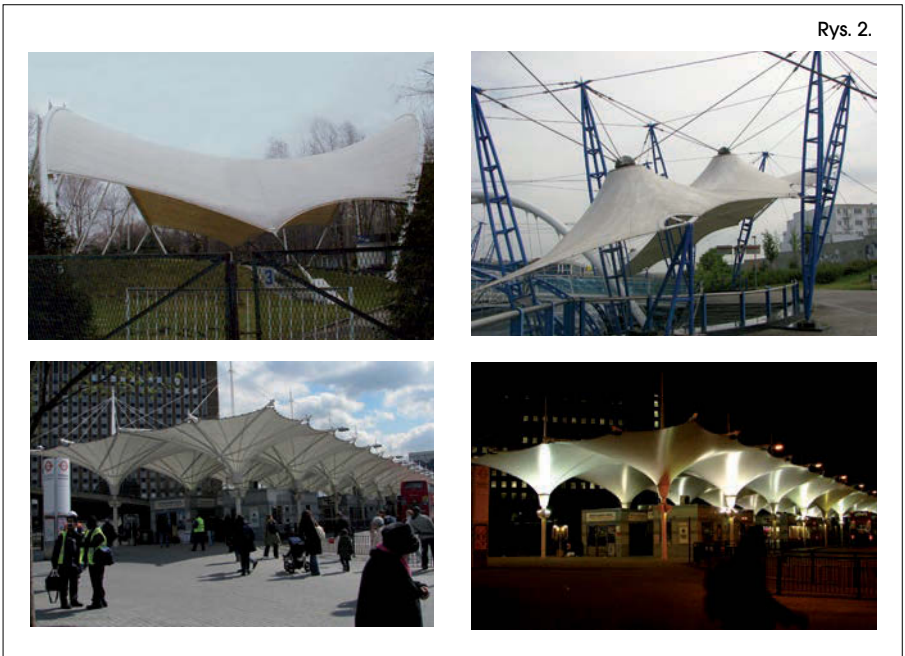
W Polsce przekrycia membranowe zastosowane zostały dotychczas jako zadaszenia licznych amfiteatrów oraz zadaszenia stadionów. Przykładami przekryć amfiteatrów mogą być zadaszenia amfiteatrów w Ustroniu, Płocku, Spocie, Mrągowie, Brennej, Stężycy nad Jeziorem Raduńskim, amfiteatru Kadzielnia w Kielcach oraz amfiteatru Bemowo w Warszawie. Przykłady przekryć stadionów to zadaszenie Stadionu Narodowego w Warszawie oraz zadaszenie Stadionu Miejskiego w Poznaniu.

### Wstęp do projektowania

We wstępnym etapie projektowania przekryć membranowych na pierwszy plan wysuwają się dwa zagadnienia: 1) wyznaczenie właściwej formy przestrzennej membrany (procedura formfinding), 2) właściwe przygotowanie wykrojów membrany w celu ich połączenia w spójną, dobrze napiętą strukturę przestrzenną o złożonej geometrii (procedura cutting pattern).



Rys. 1.



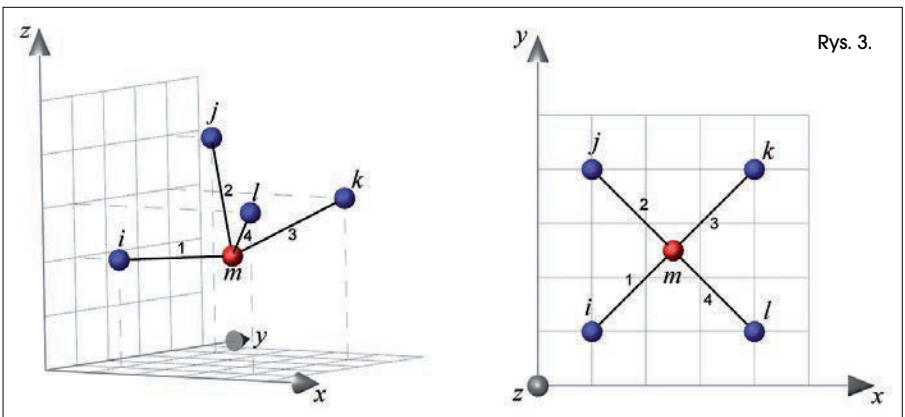
Rys. 2.

Znanych jest kilka metod obliczeniowych pozwalających wyznaczyć formę przestrzenną membrany dla określonych warunków jej zamocowania i naprężenia. Jedną z tych metod jest metoda współczynnika gęstości siły (współczynnika naprężenia) określana w terminologii angielskojęzycznej terminem force density method.

W metodzie tej zdefiniowany został współczynnik naprężenia  $q_e$  określony jako iloraz siły w elemencie ( $F_e$ ) do długości tego elementu ( $L_e$ ),  $q_e = F_e/L_e$ . Wyznaczenie formy przestrzennej membrany wymaga jej zamodelowania siatką elementów linowych o zadany naprężeniu (współczynnika naprężenia).

Dużą zaletą metody współczynnika gęstości siły jest wykorzystywanie równań liniowych do wyznaczenia struktury przestrzennej napiętej membrany.

Dla konstrukcji przedstawionej na rys. 3 wspomniany zestaw równań liniowych, pozwalających wyznaczyć położenie punktu  $m$  ( $x_m, y_m, z_m$ ) przy znanych siłach naciągu elementów nr 1-4 ma postać:



Rys. 3.

$$\begin{cases} q_1(x_i - x_m) + q_2(x_j - x_m) + q_3(x_k - x_m) + q_4(x_l - x_m) = 0 \\ q_1(y_i - y_m) + q_2(y_j - y_m) + q_3(y_k - y_m) + q_4(y_l - y_m) = 0 \\ q_1(z_i - z_m) + q_2(z_j - z_m) + q_3(z_k - z_m) + q_4(z_l - z_m) = 0 \end{cases}$$

gdzie:  
 $q_1 = \frac{F_1}{L_1}, q_2 = \frac{F_2}{L_2}, q_3 = \frac{F_3}{L_3}, q_4 = \frac{F_4}{L_4}$  – współczynniki naprężenia elementów 1-4;  $x_i, y_i, z_i, \dots$  – znane współrzędne punktów  $i, j, k, l$ ;  $x_m, y_m, z_m$  – szukane współrzędne punktu  $m$ .

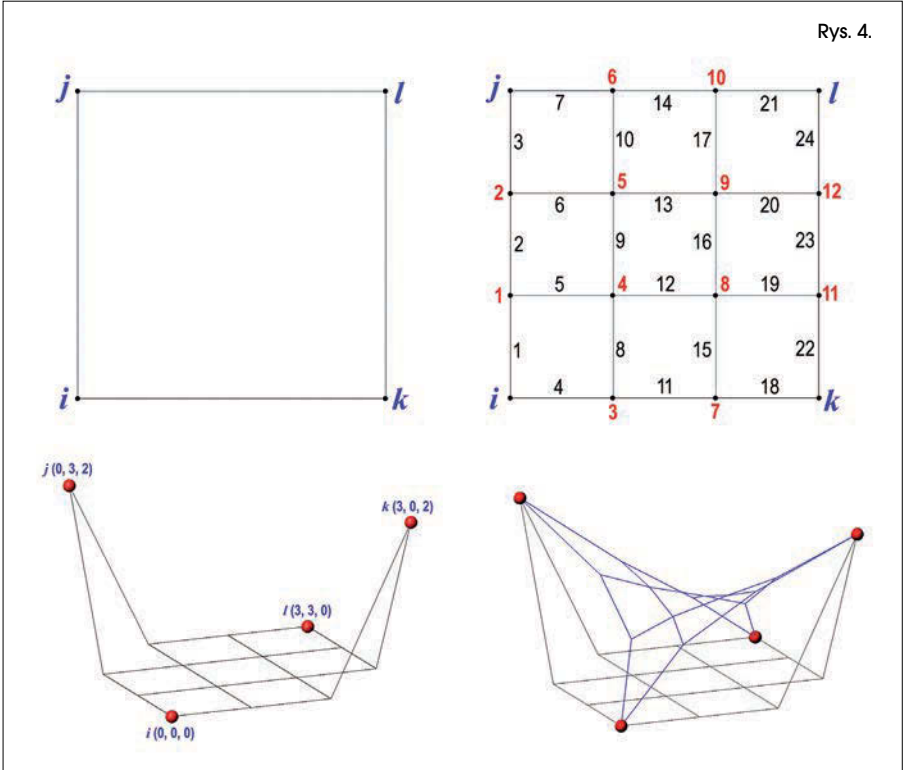
Przykładowo, jeśli przyjąć dla uproszczenia stałą wartość współczynnika naprężenia elementów 1, 2, 3 i 4 wynoszącą 1,0 ( $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1,0$ ), przy znanych współrzędnych punktów podporowych  $i, j, k, l$  jak na rys. 3 ( $i(1, 1, 2), j(1, 4, 4), k(4, 4, 3), l(4, 1, 3)$ ) szukane współrzędne punktu  $m$  wynoszą  $m(2,5; 2,5; 3)$ .

W przypadku działania na punkt  $m$  siły zewnętrznej  $P$  o składowych  $P_x, P_y, P_z$  w powyższych równaniach w miejsce zer występujących po prawej stronie równań wstawić należy odpowiednie składowe siły  $P_x, P_y, P_z$ .

W celu wyznaczenia przestrzennej formy bardziej złożonego układu konstrukcyjnego konieczne jest rozbudowanie powyższego układu równań do układu o liczbie równań odpowiadającej liczbie punktów, których położenie w przestrzeni jest poszukiwane.

Jako przykład przeprowadźmy analizę poszukiwania formy konstrukcji o kształcie siodłowym z narożami połączonymi z punktami podporowymi oraz ze swobodnymi (niezamocowanymi) krawędziami bocznymi membrany (rys. 4).

Pierwsze kroki analizy wymagają ustalenia kształtu rzutu membrany na płaszczyznę poziomą oraz przyjęcia siatki elementów wypełniających wnętrze rzutu. W przypadku analizowanej konstrukcji rzut poziomy membrany to kwadrat o boku 3,0 m. Wnętrze rzutu wypełniono siatką elementów o długości 1,0 m (taką długość elementu przyjęto w celu ograniczenia w niniejszym przykładzie liczby punktów siatki (liczby



Rys. 4.

niewiadomych). Dokładniejsze określenie kształtu membrany wymaga zagęszczenia siatki elementów. Przy przyjętych parametrach siatki wyznaczenia wymagają współrzędne x, y, z 12 punktów (węzły siatki o numerach 1-12).

W kolejnym kroku analizy konieczne jest określenie miejsc zamocowania membrany. Współrzędne tych punktów uwzględniane są w dalszej analizie jako stałe punkty podporowe o znanym położeniu.

Jeśli przyjąć numerację węzłów i elementów siatki jak na rys. 4, układ równań metody współczynnika gęstości siły pozwalający wyznaczyć współrzędne x punktów siatki po jej napięciu ma postać:

$$\begin{cases} q_1(x_1 - x_1) + q_2(x_2 - x_1) + q_3(x_4 - x_1) = 0 \\ q_2(x_1 - x_2) + q_3(x_1 - x_2) + q_6(x_5 - x_2) = 0 \\ q_4(x_1 - x_3) + q_8(x_4 - x_3) + q_{11}(x_7 - x_3) = 0 \\ q_5(x_1 - x_4) + q_8(x_3 - x_4) + q_9(x_5 - x_4) + q_{12}(x_8 - x_4) = 0 \\ q_6(x_2 - x_5) + q_9(x_4 - x_5) + q_{10}(x_6 - x_5) + q_{13}(x_9 - x_5) = 0 \\ q_7(x_1 - x_6) + q_{10}(x_5 - x_6) + q_{14}(x_{10} - x_6) = 0 \\ q_{11}(x_3 - x_7) + q_{15}(x_8 - x_7) + q_{18}(x_k - x_7) = 0 \\ q_{12}(x_4 - x_8) + q_{15}(x_7 - x_8) + q_{16}(x_9 - x_8) + q_{19}(x_{11} - x_8) = 0 \\ q_{13}(x_5 - x_9) + q_{16}(x_8 - x_9) + q_{17}(x_{10} - x_9) + q_{20}(x_{12} - x_9) = 0 \\ q_{14}(x_6 - x_{10}) + q_{17}(x_9 - x_{10}) + q_{21}(x_l - x_{10}) = 0 \\ q_{19}(x_8 - x_{11}) + q_{22}(x_k - x_{11}) + q_{23}(x_{12} - x_{11}) = 0 \\ q_{20}(x_9 - x_{12}) + q_{23}(x_{11} - x_{12}) + q_{24}(x_l - x_{12}) = 0 \end{cases}$$

Analogicznie zapisać należy układy równań pozwalające wyznaczyć współrzędne y i z.

Przy przyjęciu stałej wartości współczynnika gęstości siły  $q_e = 1,0$  układ równań w zapisie macierzowym przyjmie postać przedstawioną obok.

Wiersze w macierzach odpowiadają kolejnym numerom węzłów wg przyjętej siatki elementów (węzły 1-12).

Porównując dane zawarte w pierwszej macierzy ze schematem siatki elementów z rys. 4, zauważyć można, że na przekątnej głównej macierzy występuje cyfra oznaczająca liczbę elementów połączonych ze sobą w węźle. Jest to konsekwencja przyjęcia wartości współczynnika  $q_e = 1,0$ . W przypadku  $q_e \neq 1,0$  na przekątnej głównej macierzy wystąpi suma współczynników  $q_e$  wyznaczonych dla elementów połączonych w węźle. Poza przekątną główną występuje cyfra 1, oznaczająca połączenie rozpatrywanego węzła z sąsiednimi węzłami siatki, lub cyfra 0 w przypadku braku połączenia rozpatrywanego węzła z pozostałymi węzłami siatki. Przykładowo: wartości przedstawione w pierwszym wierszu macierzy oznaczają, że w węźle nr 1 połączone są ze sobą trzy elementy i węzeł nr 1 połączony jest z węzłami nr 2 oraz 4. Analogicznie wartości z piątego wiersza macierzy oznaczają, że w węźle nr 5 połączone są ze sobą cztery elementy i węzeł nr 5 połączony jest z węzłami nr 2, 4, 6 i 9 (por. rys. 4).

Zauważyć można również, że trzecia macierz zawiera współrzędne węzłów podporowych i, j, k, l. Współrzędne te wpisane zostały w wierszach o numerach odpowiadających numerom węzłów mających połączenie z węzłami podporowymi.

Po rozwiązaniu tak zapisanego układu równań, przy znanych współrzędnych punktów pod-

Nr punktu	Współrzędne			Obliczona geometria membrany
	x	y	z	
1	0,577	1,038	0,727	
2	0,577	1,962	1,273	
3	1,038	0,577	0,727	
4	1,154	1,154	0,909	
5	1,154	1,846	1,091	
6	1,038	2,423	1,273	
7	1,962	0,577	1,273	
8	1,846	1,154	1,091	
9	1,846	1,846	0,909	
10	1,962	2,423	0,727	
11	2,423	1,038	1,273	
12	2,423	1,962	0,727	

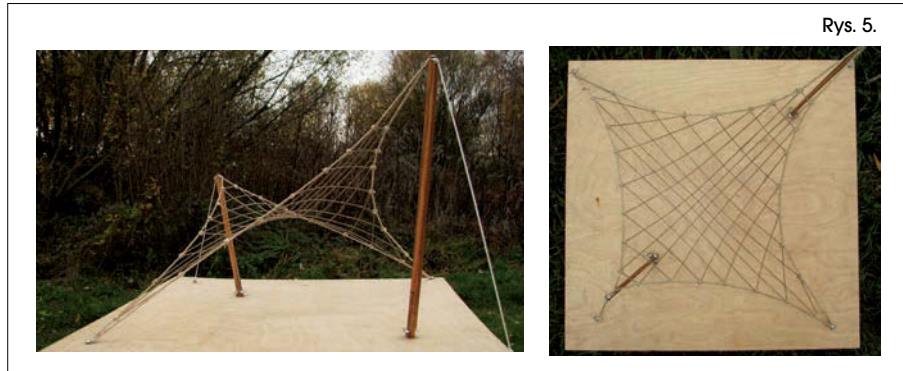
porowych i(0, 0, 0), j(0, 3, 2), k(3, 0, 2), l(3, 3, 0) oraz dla współczynnika  $q_e = 1,0$ , szukane współrzędne punktów nr 1-12 podano w tabeli.

Na rys. 5 i 6 przedstawiono modele konstrukcji typu siodło wykonane w postaci siatki linowej oraz konstrukcji membranowej.

Metoda współczynnika gęstości siły pozwala w stosunkowo prosty sposób wyznaczyć poszukiwaną formę membrany w drodze prostych ob-

liczeń matematycznych. Jest to duża zaleta tej metody. Posiada ona jednak również pewne wady. W przypadku dążenia do zachowania równomiernego rozkładu naprężeń w membranie metoda współczynnika gęstości siły wymaga iteracyjnego doboru współczynnika naprężenia w dwóch ortogonalnych kierunkach. W przypadku złożonych form geometrycznych stanowi to znaczne utrudnienie w wyznaczeniu ostatecznej

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \\ x_5 & y_5 & z_5 \\ x_6 & y_6 & z_6 \\ x_7 & y_7 & z_7 \\ x_8 & y_8 & z_8 \\ x_9 & y_9 & z_9 \\ x_{10} & y_{10} & z_{10} \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_i & y_i & z_i \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_j & y_j & z_j \\ x_k & y_k & z_k \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ x_l & y_l & z_l \\ x_k & y_k & z_k \\ x_l & y_l & z_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

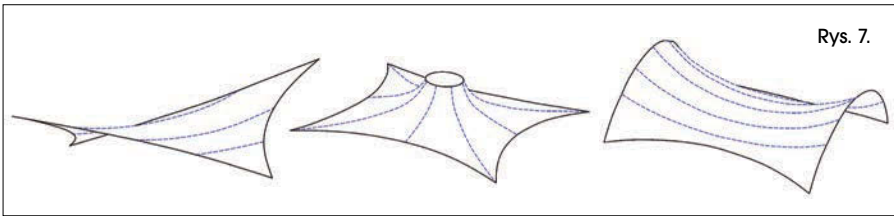


Rys. 5.

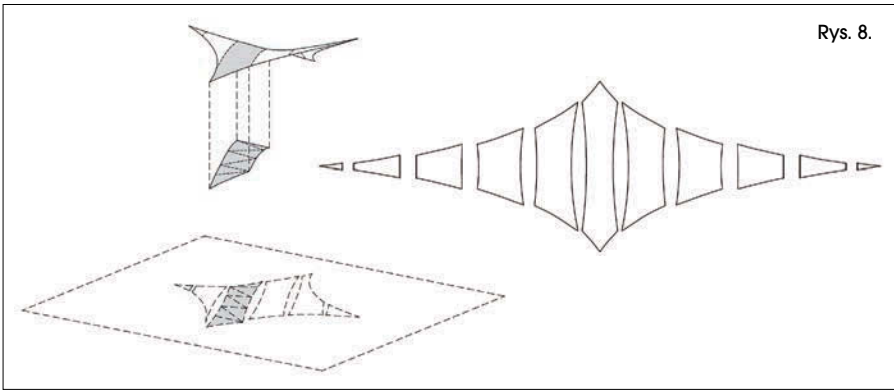


Rys. 6.





Rys. 7.



Rys. 8.

formy membrany. Drugim ograniczeniem metody jest konieczność stosowania prostokątnej siatki elementów do dyskretyzacji obszaru membrany. Zastosowanie siatki trójkątnej wymaga modyfikacji metody. Wady te nie występują w drugiej często stosowanej metodzie wyznaczania przestrzennej formy membrany nazwanej metodą relaksacji dynamicznej (dynamic relaxation method). Informacje na temat tej metody odnaleźć można w licznych publikacjach i podręcznikach dotyczących projektowania konstrukcji membranowych (np. w pozycji nr [2]).

### Materiał i jego wykroje

Zadaszenia membranowe wykonywane są z tkanin technicznych z włókien poliestrowych lub szklanych powlekanych PVC, PVDF lub PTFE. Materiały PVC zbudowane są z siatki poliestrowej stanowiącej tkaninę bazową, wielokrotnie powleczonej płynną emulsją polichlorku winylu (PVC). Konstrukcja siatki zapewnia tkaninie wytrzymałość, natomiast wielokrotne powłoczenie zabezpiecza przed wpływem czynników atmosferycznych. Tkaniny PVDF odznaczają się zwiększoną wytrzymałością dzięki zastosowaniu włókna szklanego jako tkaniny bazowej. Tkanina powleczone jest warstwą lakieru z polifluorku winylidenu (PVDF) zapewniającego odporność na czynniki chemiczne i promieniowanie UV. Dodatkowo warstwa PVDF zabezpiecza powierzchnię materiału przed przyleganiem brudu. Tkaniny PTFE to materiały o najmocniejszej konstrukcji. Ich wysokie parametry wytrzymałościowe uzyskuje się dzięki tkaninie bazowej z włókna szklanego oraz emulsji powlekającej na bazie politetrafluoroetyleny (teflonu). Inną ważną właściwością PTFE jest jego wysoka odporność chemiczna. Reaguje on wyłącznie z silnie stężonymi kwasami. Tkanina charakteryzuje się dużą odpornością na promieniowanie UV oraz bardzo dobrymi właściwościami samoczyszczącymi.

Powyższe tkaniny wytwarzane są w postaci pasm o zróżnicowanych szerokościach. Wy-

tworzenie spójnej formy zadaszenia wymaga przygotowania wykrojów tkaniny oraz ich trwałego zespolenia. Wykroje materiału łączone są najczęściej za pomocą zgrzewarek wysokiej częstotliwości (zgrzewarki HF). Technologia zgrzewania HF zapewnia wytworzenie połączenia wytrzymałego i szczelnego.

Przygotowanie wykrojów materiału wymaga podzielenia przestrzennej formy membrany wyznaczonej w procedurze formfinding na pasma dostosowane do szerokości pasm tkaniny technicznej. Przykładowe sposoby podziału membrany na pasma przedstawiono na rys. 7.

Linie podziału membrany wyznaczone są z wykorzystaniem linii geodezyjnych będących najkrótszym połączeniem dwóch punktów leżących na zakrzywionej powierzchni. Po ustaleniu położenia linii geodezyjnych wyznaczone pasma membrany odwziewiedlić należy na płaszczyźnie w celu ich wykrojenia z pasm tkaniny technicznej (rys. 8). W procesie tym istotne jest zachowanie właściwych odległości punktów odczytanych z zakrzywionej powierzchni membrany. Poza poprawnym odwziewiedleniem zakrzywionej powierzchni na płaszczyźnie właściwe przygotowanie wykrojów wymaga także przyjęcia odpowiednich naddatków materiału pozwalających wykonać połączenia poszczególnych wykrojów oraz połączenie membrany z uchwytami mocującymi ją na podporach w miejscu przeznaczenia.

### Słowo na koniec

Konstrukcje membranowe stwarzają duże możliwości swobodnego kształtowania ich formy architektonicznej i stanowią interesujący typ zadaszeń obiektów budowlanych. Początkowe etapy projektowania tego typu zadaszeń wymagają opanowania techniki wyznaczania formy przestrzennej naprężonej membrany oraz metod przygotowania wykrojów materiału do produkcji zadaszenia. Na etapie projektowania zadaszeń membranowych pamiętać należy, że

w projekcie zadaszenia istotny jest nie tylko efekt wizualny, lecz także zapewnienie odpowiedniej nośności konstrukcji oraz jej odporności na dynamiczne efekty oddziaływania środowiska. Zaprojektowana konstrukcja przekrycia zapewniać musi przede wszystkim bezpieczeństwo użytkowania przestrzeni, nad którą została zawieszona. Kompleksowe analizy wytrzymałościowe przekryć membranowych wymagają znajomości zagadnień projektowych z zakresu fundamentowania oraz wymiarowania konstrukcji nośnych membrany. W przypadkach przekryć rozpiętych na dużej powierzchni istotne mogą być również ich dodatkowe analizy dynamiczne pozwalające na sprawdzenie odporności zadaszenia na obciążenia o charakterze dynamicznym. Nietypowe konstrukcje przekryć wymagać mogą przeprowadzenia badań w tunelu aerodynamicznym w celu określenia rozkładu współczynników parcia wiatru oraz ciśnień na powierzchni membrany. Badania takie wykonywane są m.in. w Laboratorium Inżynierii Wiatrowej Politechniki Krakowskiej. Przykładem ich przeprowadzenia może być projekt zadaszenia Stadionu Miejskiego w Poznaniu poddany analizie rozkładu ciśnień oraz kumulacji śniegu na powierzchni zadaszenia.

### Abstrakt:

W artykule przedstawiono zagadnienie projektowania membranowych przekryć dachowych wykonywanych z tkanin technicznych. Atrakcyjna forma przestrzenna i duża swoboda w kształtowaniu zadaszeń tego typu wpływa na ciągle wzrost zainteresowania konstrukcjami membranowymi wśród architektów i inżynierów na całym świecie.

W pierwszej części artykułu przedstawiono podstawowe informacje dotyczące wstępnego projektowania przekryć membranowych związane z wyznaczaniem ich formy przestrzennej oraz przygotowaniem wykrojów materiału do produkcji zadaszenia. Scharakteryzowano metodę współczynnika gęstości siły (force density method) wykorzystywaną do wstępnego wyznaczania formy membrany. Wykorzystanie metody zobrazowano na przykładzie wyznaczenia formy przestrzennej konstrukcji o kształcie siodłowym.

### Literatura:

- [1] Otto F.: Dachy wiszące: forma i konstrukcja, przekł. z niem. Janicki S. Arkady, 1959.
- [2] Lewis W. J.: Tension structures form and behavior, Thomas Telford, 2003.
- [3] Ambroziak A., Kłosowski P., Nowicki M.: O problemach w projektowaniu konstrukcji membranowych, Inżynieria i Budownictwo, nr 1/2005.
- [4] Gründig L.: A history of the principal developments and applications of the force density method in Germany 1970-1999, IASS-IACM 2000 Fourth International Colloquium on Computation of Shell & Spatial Structures, Grecja, 2000.
- [5] Forster B., Mollaert M.: European design guide for tensile surface structures, Tensinet 2004. ■