Mykhaylo DOROZHOVETS
POLITECHNIKA RZESZOWSKA, ZAKŁAD METROLOGII I SYSTEMÓW POMIAROWYCH

Niepewność liniowej regresji ortogonalnej

Prof. dr hab. inż. Mykhaylo DOROZHOVETS

Jest absolwentem (1975) Katedry Techniki Informacyjno-Pomiarowej Politechniki Lwowskiej, tytuł doktora nauk technicznych uzyskał w 1986 r. a w 2001 r. obronił pracę habilitacyjną. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora w Zakładzie Metrologii i Systemów Pomiarowych Politechniki Rzeszowskiej. W pracy naukowo-badawczej zajmuje się zagadnieniami pomiarów tomograficznych, problemami przetwarzania sygnałów pomiarowych oraz analizą i oceną niedokładności wyników pomiarów.

e-mail:michdor@prz.edu.pl, *dorozhovets@polynet.lviv.ua*

Streszczenie

W referacie przeanalizowano problemy wyznaczania parametrów ortogonalnej regresji liniowej i przedstawiono metodę wyznaczania niepewności współczynników oraz przewidywanych wartości regresji.

Słowa kluczowe: niepewność, regresja, ortogonalna.

Uncertainty of linear orthogonal regression

Abstract

In the paper the problems of linear orthogonal regression parameters calculation are discussed and method of uncertainties of coefficients and regression line is presented.

Key words: uncertainty, regression, orthogonal.

1. Wstęp

W praktyce pomiarowej podczas badania układów (na przykład czujników) z wielkościami wejściową oraz wyjściową w celu wyznaczania ich funkcji przetwarzania często należy uwzględniać nie tylko niepewności wyników pomiaru wielkości wyjściowej (wartości funkcji), co ma miejsce w zwykłej aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów [1],[2], ale również też i niepewności pomiaru (lub formowania) wielkości wejściowej (argumentu). W takim przypadku dla wyznaczania najlepszej funkcji aproksymacyjnej należy wykorzystać regresje ortogonalną [3]. Regresja ortogonalna różni się od zwykłej tym, że parametry linii aproksymacyjnej

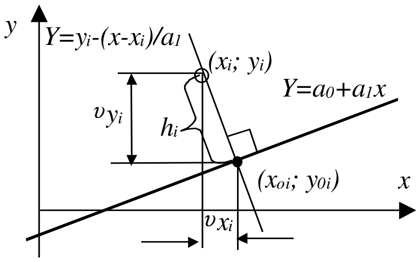
$$y = F_a(x) = a_0 + a_1 x\,. \qquad (1)$$

są obliczane na podstawie minimalizacji sumy kwadratów odchyleń h_i (rys.1)

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\upsilon x_i^2 + \upsilon y_i^2\right) \Rightarrow MIN\,, \qquad (2)$$

punktów $(x_i;\, y_i)$ eksperymentalnych od poszukiwanej linii regresji (1) (gdzie υx_i oraz υy_i - odchylenia punktu eksperymentalnego wzdłuż odpowiednich współrzędnych (rys.1)).

Oznacza to, że przy regresji ortogonalnej są uwzględniane niepewności wyników pomiaru $u(y)$ oraz $u(x)$ zarówno wielkości wyjściowej (y) jak i wielkości wejściowej (x).



Rys. 1. Regresja ortogonalna
Fig 1. Orthogonal regression

Oczywistym jest, że warunek minimalizacji (2) dla regresji ortogonalnej (1) zdecydowanie różni się od warunku minimalizacji w przypadku regresji zwykłej: $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\upsilon y_i^2 \Rightarrow MIN$.

2. Wartości współczynników liniowej regresji ortogonalnej

W przypadku regresji ortogonalnej odstęp h_i i-go punktu od poszukiwanej linii (1) równa się długości odcinka leżącego na linii prostopadłej mierzonego od punktu $(x_i;\, y_i)$ do punktu $(x_{0i};\, y_{0i})$ (rys. 1). Równanie linii prostopadłej opisuje się wzorem $y_p = y_i - (x - x_i)/a_1$ dlatego odległość punktu $(x_{0i};\, y_{0i})$ od poszukiwanej prostej wzdłuż osi $0x$ jest równa:

$$\upsilon x_i = x_i - x_{oi} = a_1\frac{a_1 x_i - (y_i - a_0)}{a_1^2 + 1}\,. \qquad (3)$$

Ponieważ odległość punktu $(x_{0i};\, y_{0i})$ od poszukiwanej prostej wzdłuż osi $0y$ wynosi $\upsilon y_i = y_i - y_{oi} = -\upsilon x_i / a_1$, wtedy kwadrat odległości punktu eksperymentalnego $(x_i;\, y_i)$ od linii (1) we wzorze (2) osiąga wartość:

$$h_i^2 = \upsilon x_i^2 + \upsilon y_i^2 = \upsilon x_i^2 + \frac{\upsilon x_i^2}{a_1^2} = \frac{\left[a_1 x_i - (y_i - a_0)\right]^2}{a_1^2 + 1}\,. \qquad (4)$$

Wartości współczynników a_0 oraz a_1 linii regresji można znaleźć z rozwiązania warunku minimalizacji (1) po podstawieniu do niego wyrażenia (4). Jednak istnieje problem realizacji takiego zagadnienia, związany z niejednakową wymiarowością wielkości wejściowej (x) i wyjściowej (y). Na przykład podczas badania rezystancyjnego czujnika temperatury, w którym wielkością wejściową jest temperatura, a wielkością wyjściową jest rezystancja, we wzorze (1) występuje suma kwadratów dwóch różnych wielkości (temperatury i rezystancji). Oprócz tego, we wzorze (2) wymiarowość współczynnika a_1 jest równa stosunkowi wymiarowości wielkości wyjściowej (y) oraz wejściowej (x). W wyniku tego w mianowniku wzoru (1) w ogólnym przypadku występuje suma kwadratu wielkości wymiarowej i bezwymiarowej.

W celu eliminacji tego problemu wartości wielkości wejściowej oraz wyjściowej należy przekształcić w taki sposób żeby stały się one bezwymiarowymi. Takie przekształcenie można przeprowadzić na wiele sposobów, na przykład poprzez unormowanie wyników pomiaru wartości wejściowej oraz wyjściowej do wartości normujących: X_N - dla wielkości wejściowej oraz Y_N - dla wielkości wyjściowej. Jeżeli odchylenia eksperymentalnych wyników od ich wartości rzeczywistych są spowodowane niedoskonałością ich pomiarów (wpływem źródeł niepewności związanych z pomiarami tych wielkości za pomocą odpowiednich przyrządów pomiarowych) wtedy jako normujące wartości można przyjąć odpowiednie zakresy pomiarowe X_k oraz Y_k przyrządów, którymi zostały zmierzone wartości wielkości wejściowej oraz wyjściowej:

$$X_N = X_k \text{ oraz } Y_N = Y_k . \tag{5}$$

W takim przypadku przed aproksymacją wartości wielkości wejściowej oraz wyjściowej należy przeliczyć zgodnie z zależnościami

$$x_i' = \frac{x_i}{X_N} = \frac{x_i}{X_k},\ y_i' = \frac{y_i}{Y_N} = \frac{y_i}{Y_k},\ i = 1, 2, ..., n . \tag{6}$$

Inny sposób unormowania wartości wielkości wejściowej oraz wyjściowej polega na ich standaryzacji (centrowaniu i unormowaniu) wg wzorów:

$$x_i' = \frac{x_i - \overline{x}}{S_{x'}} \text{ oraz } y_i' = \frac{y_i - \overline{y}}{S_{y'}},\ i = 1, 2, ..., n , \tag{7}$$

gdzie $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ i $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ - wartości średnie; (8)

$$S_{x'}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i' - \overline{x}'\right)^2,\ S_{y'}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - \overline{y}'\right)^2 \text{ -} \tag{9}$$

eksperymentalne centralne momenty drugiego rzędu wielkości wejściowej oraz wyjściowej.

W takim przypadku kwadrat odstępu punktu z unormowanymi współrzędnymi (6) od poszukiwanej prostej

$$y' = a_0' + a_1' x' \tag{10}$$

opisuje się podobnym do (4) wyrażeniem

$$h_i'^2 = \upsilon x_i'^2 + \upsilon y_i'^2 = \frac{[a_1' x_i' - (y_i' - a_0')]^2}{a_1'^2 + 1} . \tag{11}$$

Ponieważ dla wartości średnich we wzorze (10) zachodzi zależność: $\overline{y'} = a_0' + a_1' \cdot \overline{x'}$ warunek minimum sumy kwadratów (2) ma postać:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h_i'^2 &= \frac{1}{a_1'^2+1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[a_1'\left(x_i - \overline{x'}\right) - (y_i' - \overline{y'})\right]^2 = \\ &= \frac{a_1'^2 S_{x'}^2 - 2a_1' R_{x'y'} + S_{y'}^2}{a_1'^2 + 1} \Rightarrow MIN.\end{aligned} \tag{12}$$

gdzie

$$R_{x'y'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i' - \overline{x'}\right)\left(y_i' - \overline{y'}\right) = \rho_{x'y'} S_{2x'} \cdot S_{2y'}, \tag{13}$$

a $\rho_{x'y'}$ jest współczynnikiem korelacji pomiędzy unormowanymi wartościami wielkości wejściowej oraz wyjściowej.

Ze wzoru (12) otrzymuje się wartość współczynnika a_1':

$$a_1' = \frac{2\rho_{x'y'}}{S_{x'y'} + \sqrt{S_{x'y'}^2 + 4\rho_{x'y'}^2}}, \tag{14}$$

gdzie $S_{x'y'} = S_{x'}/S_{y'} - S_{y'}/S_{x'}$.

Wartość współczynnika a_0' oblicza się z równania (10) dla wartości średnich:

$$a_0' = \overline{y'} - \frac{2\rho_{x'y'}}{S_{x'y'} + \sqrt{S_{x'y'}^2 + 4\rho_{x'y'}^2}} \cdot \overline{x'} . \tag{15}$$

W przypadku zwykłej regresji liniowej: $y = b_0' + b_1' x'$, uwzględniając niepewności pomiaru tylko wielkości wyjściowej, wartości współczynników tej linii można obliczyć ze wzorów:

$$b_{1y|x}' = \rho_{x'y'}\frac{S_{y'}}{S_{x'}},\quad b_{0y|x}' = \overline{y'} - b_1'\overline{x'} . \tag{16}$$

3. Standardowe niepewności współczynników

Standardowe złożone niepewności $u_c(a_0')$ oraz $u_c(a_1')$ współczynników liniowej ortogonalnej regresji można obliczyć bezpośrednio ze wzorów (14) oraz (15) wg metody obliczania niepewności wyników pomiaru pośrednich [2], a mianowicie:

$$u_c^2(a_1') = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial a_1'}{\partial x_j'}\right)^2 u^2(\upsilon x_j') + \left(\frac{\partial a_1'}{\partial y_j'}\right)^2 u^2(\upsilon y_j')\right], \tag{17}$$

oraz

$$u_c^2(a_0') = \sum_{j=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial a_0'}{\partial x_j'}\right)^2 u^2(\upsilon x_j') + \left(\frac{\partial a_0'}{\partial y_j'}\right)^2 u^2(\upsilon y_j')\right], \tag{18}$$

gdzie $\frac{\partial a_1'}{\partial x_j'}, \frac{\partial a_1'}{\partial y_j'}, \frac{\partial a_0'}{\partial x_j'}, \frac{\partial a_0'}{\partial y_j'}$ - pochodne wyznaczane względem odpowiednich wartości wielkości wejściowej i wyjściowej; $u^2(\upsilon x_j')$ oraz $u^2(\upsilon y_j')$ - wariancje składowych odchyleń $\upsilon x_j'$ i $\upsilon y_j'$ unormowanych wyników pomiaru tych wielkości.

Na podstawie zależności (14) pochodne we wzorze (17) wynoszą:

$$\frac{\partial a_1'}{\partial x_j'} = \frac{a_1'}{n \cdot C_{x'y'}} \cdot \left[\frac{S_{x'y'}}{\rho_{x'y'}}\left(y_j' - \overline{y'}\right) - 2\left(x_j' - \overline{x'}\right)\right]; \tag{19}$$

$$\frac{\partial a_1'}{\partial y_j'} = \frac{a_1'}{n \cdot C_{x'y'}} \cdot \left[\frac{S_{x'y'}}{\rho_{x'y'}} \left(x_j' - \overline{x'} \right) + 2\left(y_j' - \overline{y'} \right) \right]. \quad (20)$$

gdzie $C_{x'y'} = S_{x'} \cdot S_{y'} \cdot \sqrt{S_{x'y'}^2 + 4\rho_{x'y'}^2}$.

Jeżeli wyniki pomiaru charakteryzują się jednakowymi dla wszystkich punktów eksperymentalnych wariancjami składowych odchyleń:

$$u^2(\upsilon x_j') = u^2(\upsilon x') \text{ oraz } u^2(\upsilon y_j') = u^2(\upsilon y'), \quad (21)$$

i są wzajemnie niezależne pomiędzy sobą, wtedy po podstawieniu zależności (19) i (20) do wyrażenia (17) po przekształceniu otrzymujemy wyrażenie dla standardowej niepewności współczynnika a_1':

$$u_c(a_1') = \frac{|a_1'|}{|\rho_{x'y'}|} \cdot \sqrt{\frac{u_A^2(\upsilon x')/S_{x'}^2 + u_A^2(\upsilon y')/S_{y'}^2}{n}}. \quad (22)$$

Ponieważ na podstawie zależności (15) pochodne dla współczynnika a_0' wynoszą:

$$\frac{\partial a_0'}{\partial x_j'} = -\frac{\partial a_1'}{\partial x_j'}\overline{x'} - \frac{a_1'}{n} \; ; \qquad \frac{\partial a_0'}{\partial y_j'} = \frac{1}{n} - \frac{\partial a_1'}{\partial y_j'}\overline{x'}, \quad (23)$$

wtedy po podstawieniu tych zależności do wyrażenia (18) i przekształceniu otrzymujemy wzór na obliczanie standardowej niepewności współczynnika a_0':

$$u_c(a_0') = \sqrt{a_1'^2 \cdot \left(1 + \frac{\left(\overline{x'}\right)^2}{\rho_{x'y'}^2 S_{2x'}}\right)\frac{u_A^2(\upsilon x')}{n} + \left(1 + \frac{a_1'^2\left(\overline{x'}\right)^2}{\rho_{x'y'}^2 S_{2y'}}\right)\frac{u_A^2(\upsilon y')}{n}}. \quad (24)$$

W przypadku, kiedy standardowe niepewności $u(\upsilon x')$ oraz $u(\upsilon y')$ wyników pomiaru wartości wejściowej oraz wyjściowej nie są znane, ich wartości są oceniane metodą typu A na podstawie wstępnego obliczenia odchyleń punktów eksperymentalnych od linii regresji ortogonalnej wzdłuż współrzędnej *y* [2]:

$$u_A^2(y') \approx \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - \left(a_0' + a_1'x_i'\right)\right)^2}{n-2}. \quad (25)$$

Stąd oceny wariancji wyników pomiaru są równe:

$$u^2(\upsilon x') \approx \left(\frac{a_1'}{1+a_1'^2}\right)^2 u_A^2(y'),\; u^2(\upsilon y') \approx \frac{u_A^2(y')}{\left(1+a_1'^2\right)^2}. \quad (26)$$

Po podstawieniu zależności (26) do wzorów (22) oraz (24) otrzymujemy wzory na obliczenie standardowych niepewności współczynników linii regresji ortogonalnej:

$$u_c(a_1') = \frac{|a_1'|}{1+a_1'^2} \cdot \frac{\sqrt{a_1'^2 + S_{x'}^2/S_{y'}^2}}{|\rho_{x'y'}| \cdot S_{x'}^2} \cdot \frac{u_A(y)}{\sqrt{n}}, \quad (27)$$

oraz

$$u_c(a_0') = \frac{u_A(y')}{\left(1+a_1'^2\right)\cdot\sqrt{n}} \sqrt{1 + a_1'^4 + a_1'^2 \frac{a_1'^2 + S_{x'}^2/S_{y'}^2}{\rho_{x'y'}^2}\left(\frac{\overline{x'}}{S_{x'}}\right)^2}. \quad (28)$$

W przypadku zwykłej regresji liniowej $y = b_0' + b_1'x'$ standardowe niepewności współczynników opisuje się wzorami:

$$u_c(b_{0\,y|x}') = \frac{\sqrt{\overline{x'^2}}}{S_{x'}} \frac{u_A(y';b_i')}{\sqrt{n}} \; ; \; u_c(b_{1\,y|x}') = \frac{u_A(y';b_i')}{S_{x'}\sqrt{n}}, \quad (29)$$

gdzie $u_A^2(y';b_i')$ jest estymatą wariancji, obliczonej na odstawie odchyleń punktów eksperymentalnych od znalezionej zwykłej linii regresji $y = b_0' + b_1'x'$ wg wzoru, podobnego do (25).

4. Standardowe oraz rozszerzone niepewności przewidywanych wartości funkcji

Standardową niepewność przewidywanych wartości funkcji (10) można obliczyć wykorzystując znalezione wyżej wartości standardowych niepewności współczynników (27) oraz (28):

$$u_c^2(y_a(x)) = u^2(a_0') + 2 \cdot r_{a_0a_1} u(a_0') u(a_1') \cdot x' + u^2(a_1') \cdot x'^2, \quad (30)$$

gdzie $r_{a_0a_1}$ - współczynnik korelacji pomiędzy współczynnikami a_0' oraz a_1', dla którego ma miejsce zależność: $r_{a_0a_1} u(a_0') u(a_1') = -\overline{x'} \cdot u^2(a_1')$. Dlatego standardowa niepewność wartości linii ortogonalnej regresji opisuje się zależnością:

$$u_c(y_a(x')) = \frac{u_A(y')}{\left(1+a_1'^2\right)\sqrt{n}} \sqrt{1 + a_1'^4 + a_1'^2 \frac{a_1'^2 + S_{x'}^2/S_{y'}^2}{\rho_{x'y'}^2} \cdot \left(\frac{x' - \overline{x'}}{S_{x'}}\right)^2}. \quad (31)$$

Standardową niepewność przewidywanych wartości zwykłej regresji można obliczyć na podstawie wzoru:

$$u_c(y_a(x';b_i')) = \frac{u_A(y';b_i')}{\sqrt{n}} \sqrt{1 + \left(\frac{x' - \overline{x'}}{S_{x'}}\right)^2}. \quad (32)$$

Niepewność rozszerzona równa się iloczynowi niepewności standardowej (31) oraz współczynnika rozszerzenia k_p:

$$U_p(y_a(x)) = k_p u_c(y_a(x)). \quad (33)$$

W przypadku rozkładu normalnego wyników pomiaru wartości wejściowej oraz wyjściowej wartość współczynnika rozszerzenia równa się odpowiedniemu kwantylowi z rozkładu Studenta: $k_p = t_p(n-2)$ [2].

Wartości współczynników linii regresji pierwotnej (2) można obliczyć na podstawie odwrotnego podstawiania znalezionych wartości współczynników a_0' oraz a_1' do wzorów (6):

$$a_0 = Y_N \cdot a_0' \text{ oraz } a_1 = \frac{Y_N}{X_N} \cdot a_1'. \quad (34)$$

Standardowe niepewności $u_c(a_0)$ oraz $u_c(a_1)$ tych współczynników są równe standardowym niepewnościom współczynników a_0' (27) oraz a_1' (28) przeskalowanym na odpowiednie wartości Y_N oraz Y_N / X_N . Z tego wynika, że standardową niepewność linii regresji ortogonalnej (2) można obliczyć na podstawie wzoru:

$$u_c\left(y_a(x)\right) = Y_N \cdot u_c\left(y_a\left(\frac{x}{X_N} \right)\right) =$$
$$= \frac{Y_N u_A(y_a)}{\left(1+a_1'^2\right)\sqrt{n}} \sqrt{1 + a_1'^4 + a_1'^2 \frac{a_1'^2 + S_{x'}^2/S_{y'}^2}{\rho_{x'y'}^2 S_{x'}^2} \left(\frac{x-\overline{x}}{X_N} \right)^2 }. \tag{35}$$

5. Przykład

Dla zadanych $n = 12$ par wyników pomiaru:
wartości wejściowej x_i=: 10,072; 10,556; 11,099; 11,522; 11,953; 12,568; 12,975; 13,535; 13,902; 14,455; 15,018; 15,568;
oraz wartości wyjściowej y_i=: 24,304; 24,424; 25,736;26,020; 30,020; 33,208; 34,172; 34,884; 36,260; 37,164; 40,860; 46,504
należy wyznaczyć parametry ortogonalnej regresji liniowej i obliczyć ich niepewności a także otrzymane wyniki porównać z wynikami dla zwykłej regresji liniowej.

Pomiary wartości wielkości wejściowej dokonano na zakresie pierwszego miernika $X_k = 20$, a wielkości wyjściowej na zakresie pomiarowym drugiego miernika $Y_k = 50$. Wymiarowość wielkości wejściowej oraz wyjściowej są różne. Wyniki pomiaru nie są skorelowane pomiędzy sobą a ich rozkład prawdopodobieństwa jest normalnym. Niepewności rozszerzone należy obliczyć dla poziomu ufności p=0,95.

Rozwiązanie

1. Unormowane wartości wyników pomiaru wg (7):
x_i' =: 0,50360; 0,52780;0,55495; 0,57610; 0,59765; 0,62840; 0,64875; 0,67675; 0,69510; 0,72275; 0,75090; 0,77840;
y_i' =: 0,48608; 0,48848; 0,51472; 0,52040; 0,60040; 0,66416; 0,68344; 0,69768; 0,72520; 0,74328; 0,81720; 0,93008.

2. Wartości średnie (8):

$$\overline{x'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i' = 0{,}638429; \quad \overline{y'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i' = 0{,}655927.$$

3. Wartości momentów drugiego rzędu (9), (13):

$$S_{x'}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i' - \overline{x}'\right)^2 = 7{,}264421 \cdot 10^{-3};$$

$$S_{y'}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(y_i' - \overline{y}'\right)^2 = 17{,}870245 \cdot 10^{-3};$$

$$R_{x'y'} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \left(x_i' - \overline{x'}\right)\left(y_i' - \overline{y'}\right) = 11{,}127424 \cdot 10^{-3}.$$

4. Wartość współczynnika korelacji z (13):

$$\rho_{x'y'} = \frac{R_{x'y'}}{S_{x'} \cdot S_{y'}} \ 0{,}976627.$$

5. Wartość parametru

$$S_{x'y'} = S_{x'} / S_{y'} - S_{y'} / S_{x'} = -0{,}930848.$$

6. Wartość współczynnika a_1' (14):

$$a_1' = \frac{2\rho_{x'y'}}{S_{x'y'} + \sqrt{S_{x'y'}^2 + 4\rho_{x'y'}^2}} = 1{,}5843.$$

7. Wartość współczynnika a_0' (15):

$$a_0' = \overline{y'} - a_1'\overline{x'} = -0{,}355545.$$

6. Wartości współczynników zwykłej regresji liniowej (16):

$$b_1 \approx 1{,}53177, \; b_0 \approx -0{,}3220.$$

8. Wartości współczynników a_0' oraz b_0 różnią się o -9,4%, a a_1' oraz b_1 – o -3,3%.

9. Wartości współczynników pierwotnej linii prostej (33):

$$a_0 = Y_N \cdot a_0' = -17{,}777; \qquad a_1 = \frac{Y_N}{X_N} \cdot a_1' = 3{,}960783.$$

10. Ekwiwalentna standardowa niepewność $u_A^2(y')$ (25):

$$u_A(y') \approx \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i' - \left(a_0' + a_1' x_i'\right)\right)^2}{n-2}} \approx 0{,}031855 .$$

11. Standardowa niepewność linii regresji (31):

$$u_c\left(y_a(x)\right) = 0{,}3539 \cdot \sqrt{1 + 0{,}3616 \cdot \left(x - 12{,}769\right)^2} ,$$

(rys.2 linia punktowa).

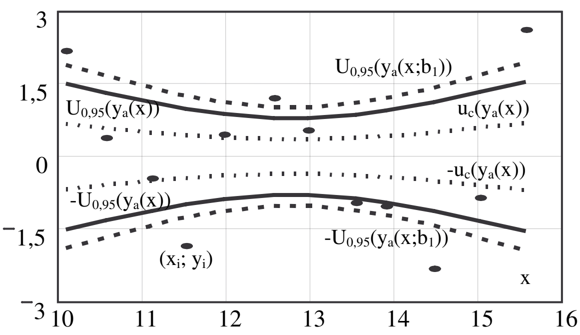


Fig.2. Standard and expanded uncertainties of orthogonal linear regression
Rys.2. Standardowa oraz rozszerzona niepewności ortogonalnej liniowej regresji

12. Niepewność rozszerzona regresji liniowej dla $k_{0,95} = t_{0,95}(12-1) = 2{,}228$:

$$U_{0,95}\left(y_a(x)\right) = 0{,}7886 \cdot \sqrt{1 + 0{,}3618 \cdot \left(x - 12{,}769\right)^2} ,$$

(rys.2 linia ciągła).

13. Niepewność rozszerzona zwykłej regresji liniowej:

$$U_{0,95}\left(y_a(x; b_1)\right) = 1{,}0122 \cdot \sqrt{1 + 0{,}3441 \cdot \left(x - 12{,}769\right)^2} ,$$

(rys.2 linia kreskowana).

6. Uwagi końcowe

Jeżeli podczas pomiaru wielkości wejściowej oraz wyjściowej występują jednocześnie źródła niepewności to dla uzyskania poprawnych wyników aproksymacji należy wykorzystać metodę regresji ortogonalnej.

Zaprezentowane zależności pozwalają na podstawie wyników pomiaru wielkości wejściowej oraz wyjściowej obliczyć najlepsze (względem minimalizacji sumarycznego wpływu niepewności wyników pomiaru obydwu wielkości) wartości współczynników linii regresji ortogonalnej oraz ich niepewności a także niepewności przewidywanych wartości funkcji.

7. Literatura

[1] Mańczak K. Technika planowania eksperymentu. Warszawa: WNT 1976.
[2] Guide of the Expression of Uncertainty In Measurement. International Organisation for Standardisation. Switzerland, 1993, 1995.
[3] Kramer H. Mathematical Methods of Statistics. Stockholm, 1946.

Artykuł recenzowany