

## WERYFIKACJA PLANU BADAŃ NAPIĘCIA AKUMULATORA KWASOWEGO

### Streszczenie

*W artykule poddano analizie dwuczynnikowy matematyczny model regresyjny. Opisano sposób badania istotności zmiennych niezależnych na wartość napięcia mierzonego na zaciskach obciążonego akumulatora. Przedstawiono sposób postępowania podczas planowania doświadczenia umożliwiające wyznaczenie współczynników modelu regresyjnego. Podjęto próbę jego weryfikacji wykorzystując wyznaczony model regresji. Wykazano, że odpowiednio zaplanowany eksperyment pozwala na znaczne ograniczenie czasu pracy niezbędnego do przeprowadzenia badań prowadzących do wyznaczenia współczynników modelu liniowego opisującego związku między zmiennymi, głównie poprzez ograniczenie do minimum liczby niezbędnych pomiarów (doświadczeń). Wykazano także, że mimo ograniczonej liczby doświadczeń zachowana jest liniowa struktura wyznaczonego modelu.*

### WSTĘP

Plan eksperymentu jest narzędziem, które pozwala osiągnąć założony cel badań przy możliwie małym nakładzie pracy (mała liczba wykonywanych pomiarów). Wiąże się to jednak z odpowiednim przygotowaniem doświadczeń i późniejszą ich realizacją według przyjętego schematu. Badania doświadczalne zazwyczaj prowadzi się w celu poznania wpływu zmiennych wejściowych na zmienne wyjściowe przy pewnym oddziaływaniu zakłóceń, w celu opracowania matematycznego modelu opisującego związku między zmiennymi lub w celu optymalizacji przyjętego modelu – znalezienia ekstremum funkcji. Niezależnie od przyjętego celu, plany doświadczeń (eksperymentów) powinny być tak dobrane, aby spełniały podstawowe kryteria, tj.: informatywności, realizowalności oraz efektywności. Jednak głównym kryterium wyboru planu eksperymentu jest cel prowadzonych badań. Każdy plan powinien zawierać etapy takie jak: matematyczny opis obiektu badań, planowanie eksperymentu, wykonanie pomiarów, analizę otrzymanych wyników. O tym, czy założony cel badań został osiągnięty można wnioskować na podstawie analizy otrzymanych wyników pomiarów. Analiza wyników obejmuje działania, które pozwalają na sprawdzenie adekwatności zmiennych niezależnych oraz matematycznego modelu opisującego związku pomiędzy zmiennymi wejściowymi i wyjściowymi. Aby mieć pewność co do poprawności otrzymanego modelu można również przeprowadzić jego weryfikację. Jednym ze sposobów weryfikacji może być porównanie otrzymanego przy pomocy planowanego eksperymentu modelu z modelem wyznaczonym na drodze innego trybu postępowania np. z wykorzystaniem analizy regresji, która jest możliwa do wykonania za pomocą programów komputerowych.

Napięcie mierzone na zaciskach obciążonego akumulatora jest parametrem diagnostycznym, na podstawie którego można wnioskować o jego stanie i możliwości realizacji zadań, do których został zaprojektowany. Odpowiednia wartość napięcia akumulatora jest niezbędna do napędu wirnika rozrusznika w celu nadania prędkości wału korbowego silnika spalinowego, przez co silnik podejmuje samodzielną pracę. Jak wykazano w [3] zarówno temperatura jak i natężenie prądu wyładowania mają wpływ na wartość napięcia mierzonego na zaciskach obciążonego akumulatora. Temperatura wpływa na lepkość elektrolitu, co przekłada się na zdolność oddawania ładunku elektrycznego przez akumulator. Większa wartość lepkości obniża ruchliwość jonów kwasu siarkowego, które są nośnikami ładunku elektrycznego. Ponadto wyładowanie akumulatora dużymi wartościami natężenia prądu przy niskiej wartości temperatury powoduje, że reakcje prądowórcze zachodzą na powierzchni elektrod, ze względu na ograniczenie dyfuzji jonów w głąb masy

czynnej płyt, co przekłada się na zmniejszenie wartości natężenia prądu pobieranego z akumulatora. W [3] wykazano, że charakter zmian napięcia mierzonego na zaciskach obciążonego akumulatora od temperatury i natężenia prądu obciążenia jest liniowy. Z tego względu opracowane będą liniowe modele matematyczne opisujące związku między zmiennymi.

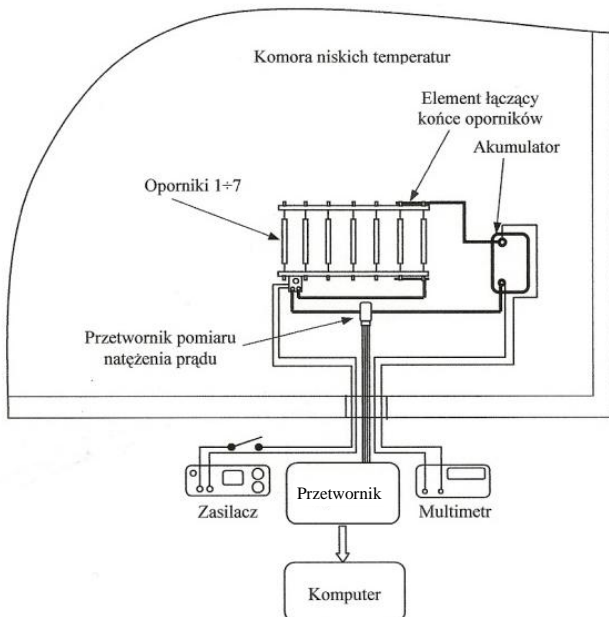
W artykule przedstawiono opis matematyczny obiektu badań, jakim jest akumulator kwasowo-olowiowy. Opracowano jego model ilościowy zawierający napięcie na zaciskach, jako zmienną zależną oraz temperaturę otoczenia i natężenie prądu wyładowania, jako zmienne niezależne. Opracowano plan eksperymentu prowadzący do sprawdzenia wpływu zmiennych niezależnych na obiekt badań, a następnie do opracowania modelu matematycznego opisującego ilościowy wpływ poszczególnych zmiennych niezależnych. W artykule dokonano również weryfikacji matematycznego modelu obiektu badań otrzymanego przy pomocy planu eksperymentu. Weryfikacja została przeprowadzona na drodze porównania z modelem otrzymanym metodą analizy regresji w arkuszu kalkulacyjnym MS Excel.

### 1. STANOWISKO BADAŃ ORAZ MODEL JAKOŚCIOWY OBIEKTU

Obiektem badań był akumulator kwasowo-olowiowy o pojemności 54 Ah i napięciu znamionowym 12 V. Akumulator ten był nowy, więc przyjęto, że jego stan techniczny mierzony stosunkiem  $Q_{rz}/Q_n$  jest równy 100 %. Podczas realizacji pomiarów badano wpływ temperatury oraz natężenia prądu wyładowania na wartość napięcia mierzonego na zaciskach w chwili obciążenia. Badania te przeprowadzono na stanowisku, którego schemat przedstawia rysunek 1. Stanowisko umieszczono w komorze niskiej temperatury, w której prowadzone były pomiary przy określonych wartościach temperatury otoczenia. Składa się ono z badanego akumulatora, zasilacza, zestawu oporników obciążających, komputerowego zestawu pomiarowego do rejestracji napięcia i natężenia prądu oraz multimetru [3].

Do obciążania akumulatora wykorzystano opornicę ze zmienną liczbą oporników. Opornica wyposażona była w wyłącznik elektromagnetyczny umożliwiający szybkie włączenie i wyłączenie obciążenia. Jeden opornik obciążał akumulator natężeniem prądu o wartości  $I \approx 32$  A. Poszczególne stopnie obciążenia składały się z odpowiedniej liczby oporników połączonych równolegle [3]. Badania realizowane były przy ustalonych wartościach temperatury w przedziale od  $-10$  °C do  $+25$  °C. W otoczeniu o danej wartości temperatury akumulator przebywał przez 12 h w celu stabilizacji termicznej. Po tym akumulator obciążano kolejnymi wartościami

natężenia prądu rejestrując wartość napięcia na jego zaciskach oraz natężenia prądu obciążenia. Poszczególne wartości natężenia prądu obciążenia wynikały z połączenia równoległego 2, 4, 6, i 7 oporników. Tak prowadzone badania pozwoliły wyznaczyć model regresyjny obiektu badań, a następnie poddać go weryfikacji. Równanie (1) przedstawia jakościowy model obiektu badań, który zostanie poddany dalszej analizie.



**Rys. 1.** Schemat stanowiska do badania właściwości akumulatorów [3]

$$U = f(T, I) \quad (1)$$

W modelu (1) temperatura  $T$  [°C] oraz natężenie prądu wyładowania  $I$  [A] są zmiennymi niezależnymi, natomiast napięcie  $U$  [V] jest zmienną zależną. Badanie istotności wpływu zmiennych niezależnych na wartość zmiennej zależnej przeprowadzone zostanie z wykorzystaniem planu randomizowanego statycznego blokowego.

## 2. SPRAWDZENIE ISTOTNOŚCI ZMIENNYCH NIEZALEŻNYCH

Do przeprowadzenia analizy istotności wpływu poszczególnych zmiennych niezależnych na wartość napięcia został wykorzystany program statyczny randomizowany kompletny. Wybór ten podyktowany jest tym, że program uwzględnia analizę wpływu kilku zmiennych niezależnych – max 4 na zmienną zależną, statyczny ze względu na to, że żadna ze zmiennych nie zależy od czasu. W planie zakłada się, że doświadczenia są wykonywane losowo, przy czym liczba poziomów wartości poszczególnych zmiennych niezależnych może być różna. Liczba wszystkich doświadczeń musi być równa iloczynowi poziomów obu zmiennych niezależnych [1].

Eksperyment przygotowano i przeprowadzono dla dwóch

zmiennych niezależnych tj.: temperatura  $T$  [°C] oraz natężenie prądu obciążenia  $I$  [A]. Przyjęto zakres zmienności temperatury  $T = -10 \div +25$  °C oraz natężenia prądu  $I = 61,9 \div 194,8$  A. Dla przyjętych poziomów wartości poszczególnych zmiennych utworzono tablicę planu – tabela 1. Tabela planu zawiera również wyniki pomiarów napięcia odpowiadające poszczególnym doświadczeniom oraz wartości średnie wyników.

Aby stwierdzić, czy obie zmienne niezależne mają istotny wpływ na wartość zmiennej zależnej obliczono wartości statystyk  $F_{xi}$  dla każdej zmiennej z zależności (2) [1]:

$$F_{x1} = \frac{S_{x1}}{S_R} \cdot \frac{(p_{x1}-1)(p_{x2}-1)}{(p_{x1}-1)}$$

$$F_{x2} = \frac{S_{x2}}{S_R} \cdot \frac{(p_{x1}-1)(p_{x2}-1)}{(p_{x1}-1)} \quad (2)$$

gdzie:

$p_{x1}$  i  $p_{x2}$  – liczby poziomów zmiennych  $x_1$  oraz  $x_2$ ,

$S_{x1}$ ,  $S_{x2}$ ,  $S_R$  – sumy kwadratów niezbędne do wyznaczenia statystyki  $F_{xi}$

Poszczególne sumy kwadratów obliczono z zależności (3), (4), (5) [1]:

$$S_{x1} = p_{x2} \sum_{k=1}^{p_{x1}} \bar{y}_k^2 - p_{x1} p_{x2} \bar{y}^2 \quad (3)$$

$$S_{x2} = p_{x1} \sum_{w=1}^{p_{x2}} \bar{y}_w^2 - p_{x1} p_{x2} \bar{y}^2 \quad (4)$$

$$S_R = \sum_{w=1}^{p_{x2}} \sum_{k=1}^{p_{x1}} y_{kw}^2 - p_{x1} \sum_{w=1}^{p_{x2}} \bar{y}_w^2 - p_{x2} \sum_{k=1}^{p_{x1}} \bar{y}_k^2 + p_{x1} p_{x2} \bar{y}^2 \quad (5)$$

Wyniki obliczeń poszczególnych wielkości opisanych wyrażeniami (2 ÷ 5) zostały zestawione w tabeli 2.

**Tab. 2.** Wyniki obliczeń składników i statystyk  $F_{xi}$ .

| $p_{x1}$ | $p_{x2}$ | $S_{x1}$ | $S_{x2}$ | $S_R$ | $F_{x1}$ | $F_{x2}$ |
|----------|----------|----------|----------|-------|----------|----------|
| 7        | 4        | 0,85     | 4,42     | 0,07  | 34,54    | 180,34   |

Wyznaczono liczby stopni swobody dla licznika i mianownika wyrażeń (2) z zależności (6 ÷ 8) podstawiając odpowiednie wartości poziomów zmienności poszczególnych zmiennych [1]:

$$v_{1x1} = p_{x1} - 1 = 6 \quad (6)$$

**Tab. 1.** Matryca planu

| Poziom wartości natężenia prądu $I$ [A] (zmienna $x_2$ ) | Poziom wartości temperatury $T$ [°C] (zmienna $x_1$ ) |       |       |       |       |       |             |             |
|--|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|-------------|
|  | -10   | -5    | 0     | 5     | 10    | 15    | 25          | $\bar{y}_w$ |
| 61,90  | 11,60   | 11,70 | 11,84 | 11,74 | 11,83 | 11,74 | 11,97       | 11,77       |
| 119,10   | 11,09   | 11,04 | 11,39 | 11,30 | 11,41 | 11,34 | 11,60       | 11,31       |
| 167,20   | 10,69   | 10,67 | 11,03 | 10,96 | 11,02 | 11,02 | 11,27       | 10,95       |
| 194,80   | 10,40   | 10,48 | 10,76 | 10,70 | 10,79 | 10,80 | 11,14       | 10,72       |
| $\bar{y}_k$  | 10,94   | 10,97 | 11,25 | 11,17 | 11,26 | 11,22 | 11,49       | -           |
| -  | -   | -     | -     | -     | -     | -     | $\bar{y} =$ | 11,19       |

$$v_{1x2} = p_{x2} - 1 = 3 \quad (7)$$

$$v_2 = (p_{x1} - 1)(p_{x2} - 1) = 18 \quad (8)$$

Dla wyznaczonych liczb stopni swobody oraz poziomu istotności  $\alpha = 0,05$  wyznaczono, z tablic rozkładu Fishera-Snedecora, wartości krytyczne statystyki  $F_{kri}$  dla poszczególnych czynników, które dla rozpatrywanego przypadku wynoszą odpowiednio:

$$F_{kri1} = F_{(0,05; 6; 18)} = 2,66$$

$$F_{kri2} = F_{(0,05; 3; 18)} = 3,16$$

Porównując wyznaczoną z zależności (2) wartość statystyki  $F_{x1}$  oraz  $F_{x2}$  z odpowiednimi wartościami krytycznymi wyznaczonymi z rozkładu Fishera-Snedecora łatwo zauważyć, że:

$$F_{x1} > F_{kri1}$$

oraz

$$F_{x2} > F_{kri2}.$$

Z porównania statystyk wynika, że zarówno temperatura jak i natężenie prądu obciążenia mają istotny wpływ na wartość napięcia mierzonego na zaciskach akumulatora podczas jego wyładowania. Aby poznać ilościowy wpływ czynników na wartość napięcia, przeprowadzono eksperyment, którego celem było wyznaczenie współczynników modelu matematycznego opisującego związku między zmiennymi. Dla przyjętych zmiennych oszacowanie wartości współczynników zrealizowane zostało za pomocą planu wieloczynnikowego dwupoziomowego.

### 3. MODEL NAPIĘCIA AKUMULATORA WYZNACZONY WEDŁUG PLANU DOŚWIADCZENIA WIELOCZYNNIKOWEGO

Na podstawie [1] oraz [2] opracowano plan eksperymentu prowadzący do wyznaczenia współczynników liniowego modelu jakościowego przedstawionego za pomocą wyrażenia (1). Umożliwia on poznanie „stopnia wpływu” poszczególnych zmiennych niezależnych na zmienną zależną. W eksperymencie tym, podobnie jak, powyżej, jako zmienne niezależne przyjęto temperaturę oraz natężenia prądu wyładowania. Przyjęto odpowiednie poziomy zmienności obu czynników, których wartości wynoszą odpowiednio:  $T = -10$  i  $+25$  °C oraz  $I = 61,90$  i  $194,80$  A. W eksperymencie zakłada się, że poziomy czynników są umownie opisane, jako  $-1$  dla poziomu niższego oraz  $+1$  dla wyższego, natomiast całkowita liczba pomiarów niezbędnych do wykonania zależna jest od liczby czynników oraz poziomów, jakie te czynniki przyjmują i wynosi:

$$n = 2^2 = 4 \quad (9)$$

Kolejne etapy eksperymentu oraz wyniki obliczeń poszczególnych wielkości przedstawiono poniżej.

Pierwszą czynnością w przyjętym eksperymencie jest zakodo-

wanie zmiennych, które w dalszej części będą przyjmowały umowne, bezwymiarowe wartości. W tym celu konieczne jest wykonanie odpowiednich operacji matematycznych. Obliczono jednostki zmienności czynników „biorących udział” w doświadczeniu. Obliczenia wykonano podstawiając do wyrażenia (10) [1, 2] wartości odpowiadające poziomom poszczególnych czynników.

$$\Delta x_i = \frac{x_{i \max} - x_{i \min}}{2}; \quad (10)$$

Następnie obliczono momenty centralne w postaci średniej arytmetycznej wartości, jakie przyjmują zmienne niezależne na poziomie górnym i dolnym. Wyniki otrzymuje się podstawiając do wyrażenia (11) [1, 2] odpowiednie dla obu zmiennych wartości.

$$x_{i0} = \frac{x_{i \max} + x_{i \min}}{2}; \quad (11)$$

Po wykonaniu obliczeń jednostek zmienności oraz momentów centralnych zakodowano zmienne zgodnie z wyrażeniem (12) [1, 2]:

$$x_{ik} = \frac{x_i - x_{i0}}{\Delta x_i}; \quad (12)$$

Wyniki operacji prowadzące do przedstawienia zmiennych w postaci zakodowanej zapisane zostały w tabeli 3.

Po przeprowadzeniu kodowania zmiennych niezbędnym elementem planu eksperymentu jest sporządzenie tablicy planu, która stanowi zbiór doświadczeń (układów), według których prowadzone będą pomiary. Tablicę planu dla prezentowanych zmiennych przedstawia tabela 4. Dla przedstawionych doświadczeń wykonano pomiary, powtarzając pięciokrotnie każde doświadczenie, a ich wyniki w postaci średniej arytmetycznej wpisano do tabeli 4. W tabeli zapisano także wartość wariancji wyznaczonej z wyników pomiarów (powtórzeń) każdego doświadczenia. Jednakowa wartość wariancji dla wszystkich układów planu oraz stosunkowo mała jej wartość jest wynikiem dużej powtarzalności i dokładności realizowanych pomiarów. W tabeli 4 zamieszczono również wyraz wolny liniowego równania opisującego zależności między zmiennymi. Nie jest on brany pod uwagę podczas wykonywania pomiarów, lecz ułatwia późniejsze wyznaczenie współczynników modelu.

Tab. 4. Tablica planu

| L.p | $x_0$ | $x_1$ | $x_2$ | $\bar{y}$ | $D^2(y)_i$ |
|-----|-------|-------|-------|-----------|------------|
| 1   | +1    | +1    | +1    | 11,14     | 0,0001     |
| 2   | +1    | +1    | -1    | 11,97     | 0,0001     |
| 3   | +1    | -1    | +1    | 10,40     | 0,0001     |
| 4   | +1    | -1    | -1    | 11,60     | 0,0001     |

Po przeprowadzeniu kodowania zmiennych niezbędnym elementem planu eksperymentu jest sporządzenie tablicy planu, która stanowi zbiór doświadczeń (układów), według których prowadzone będą pomiary. Tablicę planu dla prezentowanych zmiennych przedstawia tabela 4. Dla przedstawionych doświadczeń wykonano po-

Tab. 3. Wyniki kodowania zmiennych

| Zmienna \ Operacja  | Jednostki zmienności | Momenty centralne | Zakodowane zmienne               |
|---------------------|----------------------|-------------------|----------------------------------|
| Temperatura $T$     | 17,50                | 7,50              | $x_1 = \frac{T - 7,5}{17,5}$     |
| Natężenie prądu $I$ | 66,46                | 128,35            | $x_2 = \frac{I - 128,35}{66,46}$ |
| Napięcie $U$        | -                    | -                 | $y = U$                          |

miary, powtarzając pięciokrotnie każde doświadczenie, a ich wyniki w postaci średniej arytmetycznej wpisano do tabeli 4. W tabeli zapisano także wartość wariancji wyznaczonej z wyników pomiarów (powtórzeń) każdego doświadczenia. Jednakowa wartość wariancji dla wszystkich układów planu oraz stosunkowo mała jej wartość jest wynikiem dużej powtarzalności i dokładności realizowanych pomiarów. W tabeli 4 zamieszczono również wyraz wolny liniowego równania opisującego zależności między zmiennymi. Nie jest on brany pod uwagę podczas wykonywania pomiarów, lecz ułatwia późniejsze wyznaczenie współczynników modelu.

Wyznaczona wartość wariancji  $D^2(y)$  została wykorzystana do sprawdzenia powtarzalności wyników pomiarów oraz adekwatności regresyjnego modelu matematycznego. Po przeprowadzeniu pomiarów wg tabeli planu wyznaczono współczynniki liniowego równania opisującego związku między zmiennymi z zależności (13) [1]:

$$a_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \cdot \bar{y} \quad (13)$$

gdzie:

- $a_i$  – wartość i-tego współczynnika równania,
- $x_i$  – poziom zmiennej niezależnej w doświadczeniu,
- $\bar{y}$  – wartość średnia napięcia.

Po wyznaczeniu współczynników otrzymuje się równanie, które dla rozpatrywanego przypadku jest zapisane w postaci (14):

$$y = 11,28 + 0,28x_1 - 0,51x_2 \quad (14)$$

Wyrażenie to przedstawia liniowy model matematyczny, którego współczynniki wyznaczone na podstawie informacji zawartych w tabeli 4 pokazują, o ile zmieni się wartość zmiennej zależnej, gdy wartość współczynnika zmieni się o jeden.

W celu upewnienia się, że powtarzalność wyników pomiarów jest wystarczająca, niezbędne jest wyznaczenie współczynnika Cochra  $G$  z zależności (15) [1] i porównanie go z wartością krytyczną odczytaną z tablic rozkładu Cochra przy uwzględnieniu wartości liczby stopni swobody oraz poziomu istotności  $\alpha = 0,05$ .

$$G = \frac{D^2(y)_{i \max}}{\sum_{i=1}^N D^2(y)_i} \quad (15)$$

Dla rozpatrywanego przypadku współczynnik jest równy  $G = 0,25$ , a poszczególne wartości stopni swobody wnoszą odpowiednio:

$$v_1 = N = 4; \quad (16)$$

$$v_2 = r - 1 = 4; \quad (17)$$

Przy tym  $v_1$  – odpowiada liczbie doświadczeń w planie, natomiast  $v_2$  – jest wyznaczany na podstawie liczby powtórzeń każdego doświadczenia. Wartość krytyczna współczynnika  $G_{kr}$  wynosi:

$$G_{kr} = G_{(0,05; 4; 4)} = 0,6287 \quad (18)$$

$$G < G_{kr} \quad (19)$$

Z porównania wartości współczynników  $G$  i  $G_{kr}$  wynika, że powtarzalność wyników pomiarów jest zadowalająca.

Kolejną czynnością jest weryfikacja istotności współczynników równania (14), którą można przeprowadzić za pomocą testu  $t$ -studenta lub wyznaczając wartość krytyczną współczynnika i porównując ją z wartościami bezwzględными otrzymanymi współ-

czynników równania. Wartość krytyczną współczynników wyznacza się z zależności (20) [1]:

$$a_{kr} = t_{(\alpha; v)} \cdot \sqrt{\frac{D^2(y)}{N \cdot r}} \quad (20)$$

gdzie:

- $a_{kr}$  – wartość krytyczna współczynników równania,
- $t_{(\alpha; v)}$  – wartość współczynnika  $t$  wyznaczona na podstawie wartości stopni swobody oraz poziomu istotności,
- $D^2(y)$  – wartość średnia wariancji błędów pomiaru zapisanych w tabeli 4,
- $N$  – liczba doświadczeń w planie,
- $r$  – liczba powtórzeń każdego doświadczenia.

Wartości składowych wyrażenia (20) umieszczono w tabeli 5.

**Tab. 5.** Wyniki obliczeń wartości krytycznej współczynnika

| $D^2(y)$ | $N$ | $r$ | $t_{(\alpha; v)}$ | $a_{kr}$ |
|----------|-----|-----|-------------------|----------|
| 0,0001   | 4   | 5   | 2,12              | 0,0044   |

Ponieważ, wartość bezwzględna współczynników przypisana do poszczególnych zmiennych niezależnych jest większa od wartości krytycznej, obie zmienne uznaje się za istotne, a w związku z tym brak jest podstaw do odrzucenia którejkolwiek z nich.

W celu sprawdzenia adekwatności równania (14) niezbędne jest wykonanie obliczeń wartości  $y$ -przewidywanego przy uwzględnieniu macierzy planu. Następnie na podstawie otrzymanych wyników należy wyznaczyć wartość wariancji adekwatności z wyrażenia (21) [1].

$$D_{ad}^2(y) = \frac{r \cdot \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{N - w - 1} \quad (21)$$

gdzie:

- $w$  – liczba wyrazów w równaniu (14) po opuszczeniu członów nieistotnych i wyrazu wolnego,
- $\hat{y}_i$  –  $y$ -przewidywana na podstawie równania (14).

Adekwatność równania sprawdza się obliczając statystykę  $F$  z zależności (22), a następnie przyrównuje do wartości krytycznej  $F_{kr}$  wyznaczonej z rozkładu Fishera-Snedecora [1]:

$$F = \frac{D_{ad}^2(y)}{D^2(y)} \quad (22)$$

gdzie:

- $D_{ad}^2(y)$  – wariancja adekwatności równania,
- $D^2(y)$  – wartość średnia wariancji błędów pomiaru zapisanych w tabeli 4.

Poszczególne wyniki obliczeń składników wyrażenia (22) oraz wartość krytyczną statystyki  $F$  zawiera tabela 6.

**Tab. 6.** Wyniki obliczeń oceny adekwatności równania

| $D_{ad}^2(y)$ | $D^2(y)$ | $F$       | $F_{kr}$ |
|---------------|----------|-----------|----------|
| 0,1629        | 0,0001   | 1913,7282 | 4,4940   |

Ponieważ wartość statystyki  $F$  jest większa od wartości krytycznej  $F_{kr}$  równanie opisujące zależności między zmiennymi uznaje się za nieadekwatne przy poziomie istotności  $\alpha = 0,05$ . Brak adekwatności oznacza, że wyznaczony model nie jest najlepszym przybliżeniem wyników pomiarów. Nie oznacza to jednak, że brak jest związku przyczynowo-skutkowego między zmiennymi, związek może istnieć przy innym poziomie istotności. Jedną z przyczyn

braku adekwatności wg [2] może być duża dokładność pomiarów wyrażona przez wariancję  $D^2(y)$ , która dla opisywanego przypadku jest bardzo mała. Potwierdzeniem tego może być również wartość błędów względnych wyznaczonych na podstawie wyników pomiarów umieszczonych w tabeli 4 oraz wartości  $y$ -przewidywanego obliczonego z wykorzystaniem równania (14), które leżą w przedziale  $\delta_w = [-0,8677\% \div 0,8105\%]$ , co jak widać jest wartością bardzo małą. Na podstawie danych z tabeli 6 wyznaczono wartość wariancji  $D^2(y) = 0,0362$  przy której model będzie adekwatny, jak widać jest to wartość znacznie większa w stosunku do wartości otrzymanej z pomiarów. Autor, w pracy [2] jako główną przyczynę braku adekwatności wskazuje również to, że próba aproksymowania wyników pomiarów wielomianem pierwszego stopnia nie jest dobrym rozwiązaniem, czego potwierdzeniem jest brak adekwatności wyznaczonego modelu przy założonym poziomie istotności. W związku z tym, należałoby podjąć próbę opracowania modelu drugiego stopnia i sprawdzenia, czy zostanie spełniony warunek adekwatności.

Pomimo braku adekwatności równanie (14) poddano dekodowaniu w celu wyznaczenia współczynników opisujących ilościowy wpływ poszczególnych zmiennych na wartość napięcia obciążonego akumulatora. Odkodowany liniowy model obiektu badań przedstawia wyrażenie (23):

$$U = 0,28 \frac{T - 7,50}{17,50} - 0,51 \frac{I - 128,35}{66,46}; [V] \quad (23)$$

Wykonując odpowiednie obliczenia i porządkując wyrazy otrzymuje się liniowy, matematyczny model opisujący związki między napięciem  $U$ , temperaturą  $T$  i natężeniem prądu wyładowania  $I$ ,

który przyjmuje postać wyrażenia (24).

$$U = 0,0160 \cdot T - 0,0077 \cdot I + 12,1450; [V] \quad (24)$$

## 4. REGRESYJNY MODEL NAPIĘCIA WYZNACZONY Z WYKORZYSTANIEM ARKUSZA KALKULACYJNEGO

Opracowany na podstawie planu eksperymentu model (24) w celu walidacji został porównany z matematycznym modelem otrzymanym za pomocą analizy regresji wyników pomiarów tych samych wielkości, której wyniki przedstawiono w tabeli 7.

Analiza regresji została wykonana na podstawie wyników pomiarów wartości napięcia na zaciskach obciążonego odpowiednimi wartościami natężenia prądu akumulatora przy różnych wartościach temperatury. Wartości natężenia prądu wyładowania oraz temperatury były takie, jak podano w tabeli 1. W wyniku tego analizy podano 28 doświadczeń, na podstawie których opracowano model matematyczny obiektu badań. Model ten zapisano w postaci (25).

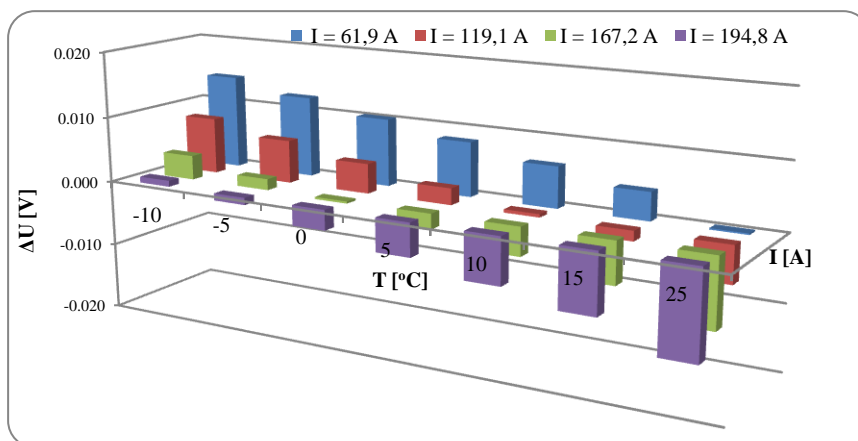
$$U = 0,0156 \cdot T - 0,0078 \cdot I + 12,1614; [V] \quad (25)$$

Istotność współczynników modelu (25) stwierdza się porównując wartość statystyki  $t$  wyznaczonej dla każdego współczynnika z wartością krytyczną wyznaczoną na podstawie rozkładu  $t$ -studenta. Wartość współczynnika krytycznego została wyznaczona przez arkusz kalkulacyjny i zapisana w tabeli 7.

Z porównania wartości statystyk  $t$  oraz wartości krytycznej wy-

Tab. 7. Wyniki analizy regresji

| PODSUMOWANIE - WYJŚCIE |                      |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
|------------------------|----------------------|-------------------------|---------------|------------------|--------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| Statystyki regresji    |                      |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
| Wielokrotność R        | 0,9749               |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
| R kwadrat              | 0,9505               |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
| Dopasowany R kwadrat   | 0,9465               | $t_{cr} =$              | 2,0595        |                  |                    |                  |                    |                    |
| Błąd standardowy       | 0,1029               |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
| Obserwacje             | 28                   |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
| ANALIZA WARIANCJI      |                      |                         |               |                  |                    |                  |                    |                    |
|                        | <i>df</i>            | <i>SS</i>               | <i>MS</i>     | <i>F</i>         | <i>Istotność F</i> |                  |                    |                    |
| Regresja               | 2                    | 5,0782                  | 2,5391        | 239,9841         | 0,0000             |                  |                    |                    |
| Resztkowy              | 25                   | 0,2645                  | 0,0106        |                  |                    |                  |                    |                    |
| Razem                  | 27                   | 5,3427                  |               |                  |                    |                  |                    |                    |
|                        | <i>Współczynniki</i> | <i>Błąd standardowy</i> | <i>t Stat</i> | <i>Wartość-p</i> | <i>Dolne 95%</i>   | <i>Górne 95%</i> | <i>Dolne 95,0%</i> | <i>Górne 95,0%</i> |
| <b>Przecięcie</b>      | <b>12,1614</b>       | 0,0562                  | 216,3688      | 0,0000           | 12,0457            | 12,2772          | 12,0457            | 12,2772            |
| <b>T [°C]</b>          | <b>0,0156</b>        | 0,0017                  | 8,9742        | 0,0000           | 0,0121             | 0,0192           | 0,0121             | 0,0192             |
| <b>I [A]</b>           | <b>-0,0078</b>       | 0,0004                  | -20,3412      | 0,0000           | -0,0086            | -0,0070          | -0,0086            | -0,0070            |



Rys. 2. Odchylenie wartości napięcia liniowych modeli matematycznych

nika, że wszystkie współczynniki wyrażenia (25) mają istotny wpływ na napięcie obciążonego akumulatora i nie mogą zostać pominięte. Ponadto, liniowy model regresyjny (25) z dużą dokładnością przybliża wyniki pomiarów, o czym świadczy duża wartość współczynnika determinacji  $R^2 = 0,9505$ .

## 5. ANALIZA PORÓWNAWCZA WYZNACZONYCH MODELI

Porównując oba modele tj. (24) oraz (25) opisujące związki między zmiennymi można zauważyć dużą zgodność współczynników poszczególnych zmiennych, co oznacza, że struktura modelu wyznaczonego z wykorzystaniem eksperymentu planowanego jest zbieżna z strukturą modelu wyznaczonego za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Na różnicę wartości poszczególnych współczynników może mieć wpływ to, że model opracowany na podstawie planu doświadczenia zawiera niewielką liczbę wyników pomiaru napięcia akumulatora w stosunku do modelu opracowanego z wykorzystaniem analizy regresji. Również wyrazy wolne obu modeli niewiele się różnią między sobą, co może świadczyć o poprawności opracowania wyników badań i zgodności modeli.

Na rysunku 2 przedstawiono wartości odchyień napięcia między prezentowanymi modelami matematycznymi. Odchylenie zostało wyrażone w postaci różnicy napięć obliczonych na podstawie liniowych modeli matematycznych tj; modelu wyznaczonego na podstawie planu eksperymentu oraz za pomocą arkusza kalkulacyjnego. Jak widać z wykresu wartości odchyień są bardzo małe i zawierają się w przedziale  $\Delta U = [-0,0131 \div +0,0142]$  V przy czym największe odchylenia występują dla najniższej wartości temperatury i najmniejszej natężenia prądu oraz dla największej wartości temperatury i największej wartości natężenia prądu.

Na podstawie równania (14) oraz danych zawartych w tabeli 4 możliwe jest oszacowanie błędu standardowego dla modelu wyznaczonego z wykorzystaniem planu doświadczenia i porównanie go z błędem wyznaczonym przez arkusz. Daje on informację, o ile przewidywana na podstawie modelu wartość zmiennej zależnej różni się od wartości empirycznej. Dla modelu opisanego wyrażeniem (14) wynosi on  $\delta_{st} = 0,1289$ , natomiast dla modelu opisanego równaniem (24)  $\delta_{st} = 0,1029$ . Błąd standardowy jest miarą nienormowaną, dlatego na jego podstawie nie należy porównywać wyznaczonych modeli matematycznych. Dopiero odniesienie błędu do skali badanego zjawiska pozwala na stwierdzenie, czy błąd jest duży czy mały, a także umożliwia porównanie badanych modeli. Odnosząc błędy standardowe do wartości średnich arytmetycznych wyników pomiarów napięcia otrzymuje się miary pozwalające dokonać oceny wyznaczonych modeli matematycznych.

Dla modelu otrzymanego z wykorzystaniem planu eksperymentu wartość błędu odniesiona do średniej pomiarów napięcia wynosi 1,14 % natomiast dla modelu wyznaczonego z wykorzystaniem arkusza 0,92 %. Wynika z tego, że wyznaczone modele są dobrym przybliżeniem danych empirycznych, a błąd na poziomie 1 % dla obu modeli jest bardzo mały, można przyjąć, że stanowi błąd metody pomiarowej.

Biorąc pod uwagę kryteria, jakie powinny spełniać modele obiektów badań można stwierdzić, że pod względem efektywności korzystniejsze jest opracowanie modelu na drodze planu eksperymentu. Związane to jest z ograniczoną do minimum liczbą wykonywanych doświadczeń, a co za tym idzie znacznie ogranicza się czas niezbędny na przeprowadzenie doświadczeń i ich analizę.

## PODSUMOWANIE

Planowanie eksperymentów istotnie wpływa na ograniczenie czasu niezbędnego do przeprowadzenia doświadczeń pozwalają-

cych osiągnąć zamierzony cel badań, zwłaszcza gdy badania mają na celu opracowanie modelu matematycznego, który będzie opisywał zależności między czynnikami. Wynika to głównie z ograniczenia liczby doświadczeń potrzebnych do osiągnięcia celu. Bardzo dobrze jest to widoczne podczas weryfikacji opracowanego planu eksperymentu, którego celem było wyznaczenie liniowego równania opisującego zależności między zmiennymi. Plan eksperymentu zakładał wykonanie czterech doświadczeń odpowiednio przygotowanych, w wyniku czego otrzymano szukane równanie. Weryfikacji modelu dokonano na podstawie równania opracowanego z pomocą analizy regresji wykonanej w arkuszu kalkulacyjnym. Model ten został opracowany na podstawie dwudziestu ośmiu doświadczeń, co niewątpliwie zajmuje znacznie więcej czasu w przeciwieństwie do eksperymentu planowanego.

Dalsze prace mają na celu znalezienie matematycznego modelu opisującego zależności między napięciem mierzonym na zaciskach obciążonego akumulatora, a czynnikami mającymi na niego wpływ, tj.: stopień naładowania akumulatora, stan techniczny, pojemność znamionowa, temperatura i natężenie prądu obciążenia. Będzie się to wiązało z opracowaniem eksperymentu, przy pomocy, którego możliwe będzie wyznaczenie parametrów modelu obiektu badań. Ze względu na dużą liczbę czynników opracowanie planu dwupoziomowego kompletnego jest nieefektywne, gdyż liczba niezbędnych do wykonania doświadczeń wynosić będzie 96 przy założeniu, że każde doświadczenie będzie powtarzane trzykrotnie. Zatem zasadne jest utworzenie planu częściowego (ułankowego), który pozwala na realizację tylko wybranych, zgodnie z zasadami planu, doświadczeń niezbędnych do wyznaczenia struktury modelu przy spełnieniu kryteriów: informatywności i realizowalności.

W wyniku przeprowadzonego eksperymentu częściowego powstanie model, który umożliwi ocenę stanu technicznego akumulatora przy uwzględnieniu wymienionych czynników. Otrzymany model będzie wykorzystany ostatecznie przy pracy nad metodą wyznaczenia wartości ciśnienia sprężania ładunku w cylindrze silnika na podstawie sygnałów rozruchu.

## BIBLIOGRAFIA

1. Korzyński M. *Metodyka eksperymentu. Planowanie, realizacja i statystyczne opracowanie wyników eksperymentów technologicznych*. Wydawnictwo WNT, Warszawa 2013.
2. Polański Z. *Współczesne metody badań doświadczalnych*. Wydawnictwo „Wiedza Powszechna”, Warszawa 1978.
3. Pszczółkowski J., Dyga G. *Badanie cech i charakterystyk akumulatora kwasowego*. Transcomp 2013. Technika Transportu Szynowego TTS, Koleje Tramwaje, Metro nr 10/2013.

## VERIFICATION OF THE TEST PLAN OF ACID BATTERY VOLTAGE

### Abstract

*There is presented the analysis of the two-factor mathematical regression model. The method of testing the significance of the independent variables on the voltage measures at the terminals of the battery load is described. There is shown the procedure of expertise planning to appointment of the regression model coefficients. An attempt of model verification was made using the designation regression model. It is shown that an*

*appropriately planned experiment allows a significant reduction in working time necessary to performing the research leading to determine coefficients of the linear model describing the relationships between variables, mainly by minimizing the number of necessary measurements (experience). It was also shown that despite a limited number of experiments is preserved the linear structure of the designated model.*

Autorzy:

mgr inż. **Grzegorz Dyga** - Wojskowa Akademia Techniczna im. Jarosława Dąbrowskiego, Wydział Mechaniczny: 00-908 Warszawa: ul. Gen. S. Kaliskiego 2. Tel 261 837 102, email: grzegorz.dyga@wat.edu.pl

dr hab. inż. **Józef Pszczółkowski**, prof. WAT - Wojskowa Akademia Techniczna im. Jarosława Dąbrowskiego, Wydział Mechaniczny: 00-908 Warszawa: ul. Gen. S. Kaliskiego 2. Tel 261 837 206, email: jozef.pszczolkowski@wat.edu.pl