

Badania porównawcze liniowych regulatorów dla lewitacji magnetycznej

Denis Jasik

Filplast Sp. z o.o., ul. 3 Maja 33, 48-250 Głogówek

Dawid Wajnert

Politechnika Opolska, Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki, Katedra Elektrotechniki i Mechatroniki, ul. Prószkowska 76, 45-758 Opole

Streszczenie: W artykule przedstawiono sposób implementacji algorytmów regulacji do sterowania lewitacją magnetyczną wykorzystując system szybkiego prototypowania bazujący na karcie dSPACE DS1104 wraz z oprogramowaniem MATLAB/Simulink. Praca przedstawia możliwości uzyskania zjawiska lewitacji magnetycznej oraz opisuje obiekt, na którym były prowadzone badania. Rozpatrywany obiekt przedstawiono za pomocą modelu matematycznego, na podstawie którego zbudowano model symulacyjny w programie MATLAB. Kolejno określono rozpatrywane wskaźniki jakości regulacji oraz zdefiniowano trzy układy podlegające badaniu: PI-PID, LQR, LQI. Na zakończenie porównano wskaźniki jakości regulacji dla każdego układu.

Słowa kluczowe: lewitacja magnetyczna, szybkie prototypowanie, synteza układów regulacji

1. Wstęp

W ostatnich latach lewitacja zyskała zainteresowanie środowiska inżynierskiego, ponieważ jej stosowanie w technice pozwala przede wszystkim na zniwelowanie tarcia między elementami wykonującymi ruch względny, co zazwyczaj wiąże się z wyeliminowaniem zużycia mechanicznego współpracujących elementów. Jedną z metod uzyskania tego zjawiska jest lewitacja elektromagnetyczna, która znalazła szerokie zastosowanie głównie w maszynach elektrycznych (łożyska magnetyczne) oraz w transporcie kolejowym (pociągi na poduszce magnetycznej).

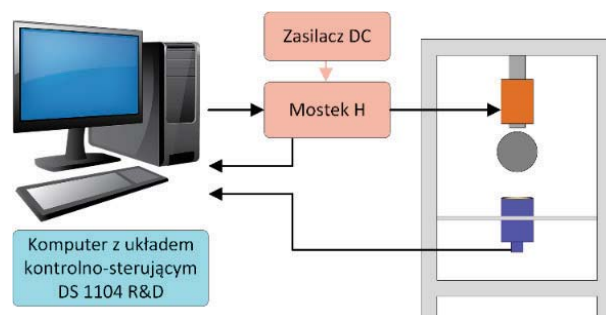
Przykładem zastosowania lewitacji magnetycznej jest stalowa kula lewitująca pod elektromagnesem. Ze względu na swoje właściwości dynamiczne, sterowanie magnetyczną lewitacją jest tematyką wielu prac badawczych [1–9]. Wykorzystanie klasycznego regulatora PID do sterowania położeniem kuli zostało przedstawione w pracach [1–3]. Projektowanie oraz implementacja regulatora PID o dwóch stopniach swobody zostało przedstawione w pracy [4]. Rezultat sterowania położeniem kuli przez regulator niecałkowitego rzędu $PI^{\lambda}D^{\mu}$ przedstawiono w pracach [5, 6]. W pracy [7] autorzy przedstawili implementację regulatora PID z nieliniową strukturą feedforward, obserwatorem części

różniczkującej oraz kaskadowym linearyzującym sprzężeniem zwrotnym do sterowania lewitacji magnetycznej. Wśród innych regulatorów zastosowanych do sterowania lewitacji magnetycznej można wyróżnić: regulator LQR [2, 3], regulator rozmyty [3], regulatory z linearyzującym sprzężeniem zwrotnym [3, 7, 8].

Celem pracy jest przedstawienie badań porównawczych sterowania lewitacją magnetyczną za pomocą regulatorów PI-PID, LQR oraz LQI. Autorzy również zaproponowali metodę doboru nastaw regulatora PID w oparciu o model masy zawieszonyj na sprężynie z tłumikiem.

2. Badany obiekt

Lewitacja magnetyczna obiektów ferromagnetycznych polega na zawieszeniu ich w polu magnetycznym wytwarzanym przez elektromagnesy. Utrzymanie określonego przedmiotu w zadanym położeniu wymaga kontrolowania prądu elektromagnesy za pomocą układu sterowania z odpowiednio dobranym regu-



Rys. 1. Schemat stanowiska badawczego
Fig. 1. A schematic of the test-bench

Autor korespondujący:

Dawid Wajnert, d.wajnert@po.opole.pl

Artykuł recenzowany

nadesłany 24.07.2018 r., przyjęty do druku 17.09.2018 r.



Zezwala się na korzystanie z artykułu na warunkach licencji Creative Commons Uznanie autorstwa 3.0

latorem. Spowodowane jest to nieliniowością oraz strukturalną niestabilnością układu magnetycznej lewitacji.

Laboratoryjny system zawieszenia magnetycznego (rys. 1) składa się z elektromagnesu, stalowej kuli, indukcyjnego czujnika położenia, wzmacniacza mocy oraz komputera z kartą szybkiego prototypowania DS 1104 R&D [9]. Elektromagnes wykonano z drutu o przekroju 0,8825 mm² nawiniętego na stalowy walec o średnicy zewnętrznej 28 mm. Elementem lewitującym jest stalowa kula o średnicy zewnętrznej 60 mm i masie 0,1272 kg. Do pomiaru położenia kuli zastosowano indukcyjny czujnik położenia z wyjściem liniowym, który zamontowano pod kulą. Wykorzystano cały zakres pomiarowy czujnika wynoszący 2–10 mm. W tabeli 1 przedstawiono podstawowe parametry czujnika położenia. W większości stanowisk badawczych lewitacji magnetycznej stosuje się czujnik optyczny składający się z reflektora oświetlającego kulę i fotoodbiornika, co skutkuje nieliniową charakterystyką napięcia wyjściowego w funkcji położenia [3]. Natomiast zastosowanie czujnika indukcyjnego zapewnia liniową zmianę napięcia wyjściowego w funkcji położenia kuli.

Tabela 1. Parametry czujnika indukcyjnego [10]
Table 1. Parameters of the induction sensor [10]

Zakres pomiarowy	2–10 mm
Częstotliwość graniczna	500 Hz
Dokładność	±10 μm
Tolerancja liniowości	≤ ±240 μm
Napięcie zasilania	24 V
Sygnal wyjściowy	0–10 V

Do sterowania badanym obiektem zastosowano system szybkiego prototypowania dSPACE, który umożliwił testowanie, rozwijanie i optymalizację nowych układów sterowania w rzeczywistym środowisku, zanim zostaną one zrealizowane sprzętowo. Takie podejście pozwala na szybką ocenę poprawności i jakości pracy układu z wykorzystaniem komputera PC z dodatkowym sprzętowym modulem wejść/wyjść. W wyniku zastosowania oprogramowania dSPACE modele zaprojektowane w programie MATLAB/Simulink mogą być automatycznie realizowane na sprzęcie do szybkiego prototypowania. Biblioteka bloków graficznych z wieloma funkcjami interfejsu pozwala na podłączenie wejść i wyjść fizycznych komputera do modelu utworzonego w Simulinku, który to można skompilować na odpowiadający mu kod źródłowy w języku C i wykonać go w czasie rzeczywistym z określonym czasem próbkowania. Po skompletowaniu i podłączeniu wszystkich niezbędnych do przeprowadzenia badań podzespołów uzyskano stanowisko pomiarowe umożliwiające implementację różnych algorytmów sterowania.

W związku z ograniczoną wydajnością prądowo-napięciową wyjść karty pomiarowej systemu dSpace, zastosowano wzmacniacz impulsowy, którego końcówkę mocy stanowi mostek H. We wzmacniaczu impulsowym zamontowano czujnik prądu ACS712 o zakresie pomiarowym prądu od –5 A do 5 A.

3. Model matematyczny lewitacji magnetycznej

Istnieje wiele sposobów wyznaczania modelu matematycznego obiektu dynamicznego. Jednym z nich jest metoda oparta wprost na drugiej zasadzie dynamiki Newtona oraz drugim prawie Kirchhoffa. W tym przypadku równania dynamiki układu przyjmują postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2m} \frac{\partial L(x)}{\partial x} i^2 - g \quad (1)$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{L(x)} \left(u - Ri - \frac{dL(x)}{dt} i \right) \quad (2)$$

gdzie: m – masa kulki [kg], x – położenie sfery [m], L – indukcyjność cewki [H], i – prąd cewki [A], g – przyspieszenie ziemskie [m/s²], U – napięcie zasilania [V], R – rezystancja cewki [Ω].

W laboratoryjnym stanowisku pomiarowym wykorzystano sterownik prądowy oparty na mostku H, w którym sygnałem wejściowym jest współczynnik wypełnienia sygnału PWM. Zadaniem sterownika jest wymuszanie prądu i w uzwojeniach zgodnie z zadaną wartością prądu i_s , wówczas równanie (2) można zastąpić równaniem liniowym w postaci:

$$\frac{di}{dt} = \frac{1}{T} (ku_s - i_s) \quad (3)$$

gdzie: – wzmocnienie sterownika prądowego, – stała czasowa sterownika prądowego, u_s – sygnał sterujący.

Równania (1) oraz (3) można przedstawić w postaci równań stanu przyjmując jako zmienne stanu położenie ($x_1 = x$),

prędkość ($x_2 = \frac{dx}{dt}$) oraz prąd ($x_3 = i_s$):

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (4.a)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{2m} \frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} x_3^2 - g \quad (4.b)$$

$$\dot{x}_3 = \frac{1}{T} (ku_s - x_3) \quad (4.c)$$

Podobne równania opisujące system lewitacji magnetycznej zostały przedstawione w pracach [1, 3, 5, 7]. Inny sposób opisu modelu lewitacji magnetycznej z wykorzystaniem współczynnika sztywności prądowej k_i oraz współczynnika sztywności przemieszczeniowej k_s został przedstawiony w pracy [4].

Otrzymane równania stanu (4) stanowią podstawę do dalszej analizy systemu. Analiza modeli nieliniowych wymaga zastosowania złożonych i skomplikowanych obliczeń, dlatego zakładając, że kula będzie się poruszała w niedalekim otoczeniu pewnego zadanego punktu (x_{1r}, x_{3r}) dokonano linearyzacji równań opisujących układ metodą rozwinięcia w szereg Taylora [11]. Linearyzacje wykonano w punkcie $x_{1r} = 0,006$ m oraz $x_{3r} = 1,52$ A.

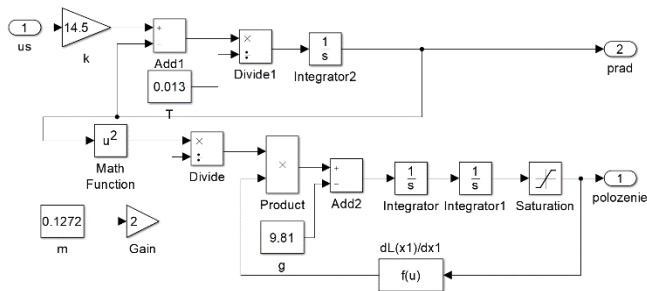
Wówczas równania stanu obiektu są następujące:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 L(x_{1r})x_{3r}^2}{\partial x_1^2} & 0 & \frac{1}{m} \frac{\partial L(x_{1r})x_{3r}}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{T} \end{bmatrix} u_s \quad (5)$$

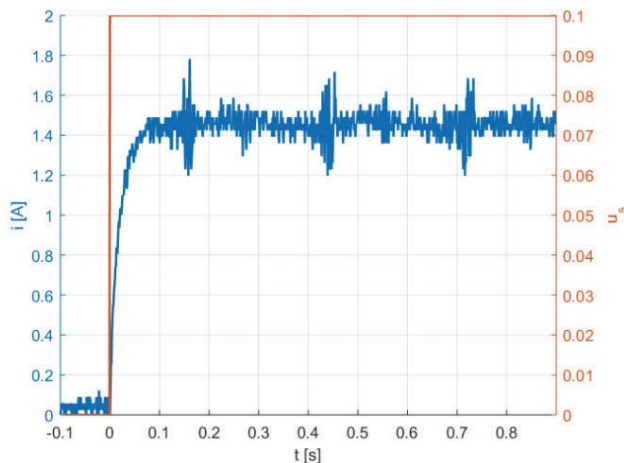
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Na podstawie powyższych równań utworzono model symulacyjny zawieszenia magnetycznego (rys. 2). Dzięki zastosowaniu równania (3) model symulacyjny uwzględnił dynamikę mostka H, co sprawia, iż sygnałem wejściowym modelu jest współczynnik wypełnienia sygnału PWM u_s , natomiast jego wyjściem jest położenie kuli x .

Parametry obiektu wyznaczono w drodze identyfikacji. Pierwszym krokiem było określenie parametrów ze wzoru (3) opisują-



Rys. 2. Model symulacyjny lewitacji magnetycznej w notacji MATLAB/Simulink
 Fig. 2. A simulation model of the magnetic suspension in the notation of MATLAB/Simulink



Rys. 3. Wyznaczanie parametrów sterownika prądowego
 Fig. 3. Parameters determination of the current inverter

tego działanie sterownika prądowego. W tym celu wyznaczono odpowiedź układu prądowego na wymuszenie skokowe (rys. 3), co pozwoliło określić wzmacnienie k oraz stałą czasową układu T metodą styczną. Wzmacnienie k wyniosło:

$$k = \frac{i}{u_s} = \frac{1,45}{0,1} = 14,5 \text{ A} \quad (7)$$

natomiast stała czasowa T układu wynosi 13 ms.

Kolejnym krokiem było określenie pierwszej pochodnej indukcyjności cewki. W tym celu skorzystano z równań opisujących stan równowagi systemu dynamicznego, zgodnie z którymi pochodna indukcyjności cewki może być wyznaczona ze wzoru:

$$\frac{\partial L(x_r)}{\partial x_1} = \frac{2mg}{x_r^2} \quad (8)$$

Eksperyment przeprowadzono w wielu punktach, co pozwoliło na otrzymanie dostatecznej ilości danych, aby aproksymować

uzyskane wyniki pomiarów funkcją analityczną. W tym celu wykorzystano procedurę *lsqcurvefit* zaimplementowaną w pakiecie MATLAB/Simulink. Następująca funkcja liniowa określa zmiany pochodnej indukcyjności:

$$\frac{\partial L(x_1)}{\partial x_1} = 200,23x - 0,1126 \text{ [H / m]} \quad (9)$$

Końcowym etapem identyfikacji było wykonanie pomiarów bezpośrednich, takich jak: masa kuki i rezystancja cewki.

4. Układy regulacji

Do oceny pracy układów regulacji wybrano standardowe kryteria oceny jakości regulacji:

– Całkę z kwadratu uchybu

$$J = \int_{t_p}^{t_k} e_p^2(t) dt, \quad (10)$$

gdzie: t_p – czas początkowy symulacji, t_k – czas końcowy symulacji, e_p – błąd położenia sfery.

– Maksymalne przeregulowanie

$$\kappa = \frac{e_1}{e_0} \cdot 100\%, \quad (11)$$

gdzie: e_0 – uchyb początkowy równy wartości zadanej, e_1 – największy uchyb przejściowy.

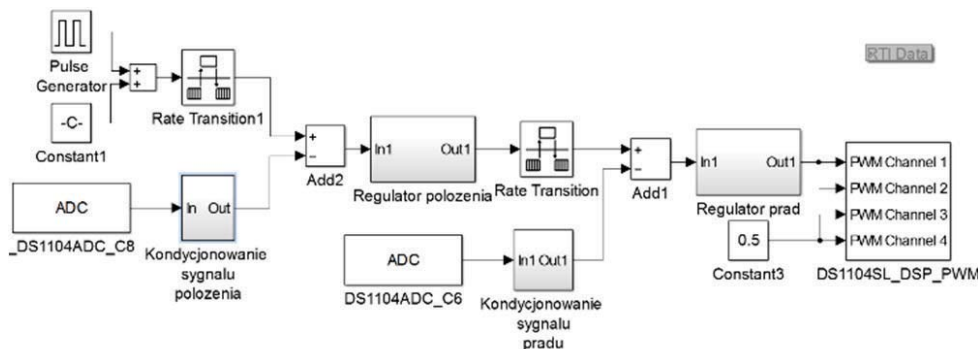
– Czas regulacji:

$$T_r = \Delta t, \quad (12)$$

określający, po jakim czasie trajektoria osiągnęła obszar mieszczący się w granicach $\pm 5\%$ wartości zadanej.

4.1. Regulator PI-PID

Celem układu regulacji jest utrzymanie stałej kuli w zadanym położeniu. Najbardziej popularnym regulatorem stosowanym w przemyśle od wielu lat jest regulator PID. Kiedy procesowi regulacji podlegają układy o złożonych właściwościach dynamicznych, w których występują duże inercyjności, opóźnienia, czy też nieliniowości części obiektu, dobre efekty pozwala zazwyczaj uzyskać regulator o dwóch pętlach sprzężenia zwrotnego – zewnętrznej i wewnętrznej. Można ją zastosować, gdy istnieje możliwość wyróżnienia pewnej wielkości pomocniczej w regulowanym procesie. Wielkość ta musi charakteryzować się mniejszymi opóźnieniami w stosunku do głównej wielkości regulowanej. W analizowanym przypadku, ze względu na układ zasilania oparty na zasilaczu impulsowym i mostku H wielkością pomocniczą oraz zmienną sterującą może być prąd sterujący i_s . Implementację układu regulacji PI-PID w środowisku MATLAB/Simulink przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Układ sterowania PI-PID lewitacją magnetyczną
 Fig. 4. The PI-PID control system of the magnetic suspension

Na potrzeby syntezy regulatora PI-PID wyprowadzono dodatkowy lokalny model obiektu sterowania oparty na współczynnikach sztywności prądowej k_i oraz przemieszczeniowej k_s [4], co pozwoliło uzyskać transmitancję operatorową obiektu w postaci:

$$G_{ML}(s) = \frac{x}{i_s} = \frac{k_i}{s^2 m - k_s} \quad (13)$$

Współczynniki sztywności k_i oraz k_s wyznaczono dla punktu równowagi wykorzystując dane z identyfikacji indukcyjności cewki. Wynoszą one odpowiednio: $k_i = 0,45$ N/A oraz $k_s = 89$ N/m.

W celu określenia nastaw regulatora położenia PID wyznaczono transmitancję zamkniętą układu regulacji położenia:

$$G_z(s) = \frac{x(s)}{x_{zad}(s)} = \frac{G_{ML}(s)G_{PID}(s)}{1 + G_{ML}(s)G_{PID}(s)} = \frac{1}{m} \frac{(K_D k_i s^2 + K_P k_i s + K_I k_i)}{s^3 + \frac{K_D k_i}{m} s^2 + \frac{K_P k_i - k_s}{m} s + \frac{K_I k_i}{m}} \quad (14)$$

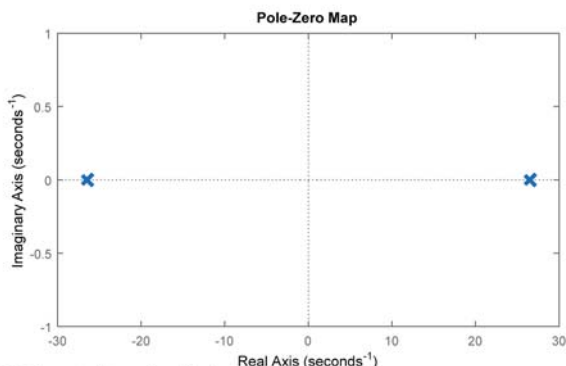
W wyniku porównania mianownika otrzymanej transmitancji z równaniem charakterystycznym trzeciego rzędu otrzymano następujące nastawy:

$$K_P = \frac{(s_1 s_2 + s_2 s_3 + s_3 s_1) m + k_s}{k_i} \quad (15)$$

$$K_I = \frac{s_1 s_2 s_3 m}{k_i} \quad (16)$$

$$K_D = \frac{-(s_1 + s_2 + s_3) m}{k_i} \quad (17)$$

gdzie: s_1, s_2, s_3 – bieguny transmitancji.



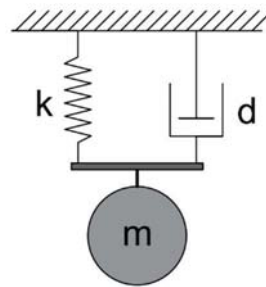
Rys. 5. Położenie biegunów układu otwartego
Fig. 5. Location of the open loop poles

Położenie biegunów decyduje o stabilności układu, jak również o jego właściwościach dynamicznych. Na rysunku 5 przedstawiono bieguny transmitancji układu otwartego lewitacji magnetycznej, który potwierdza sformułowanie o strukturalnej niestabilności układu magnetycznej lewitacji.

Układ lewitacji magnetycznej można przedstawić za pomocą członu mechanicznego, jako masę zawieszoną na sprężynie z tłumikiem (rys. 6).

Równanie ruchu kuli o masie m , przy współczynniku sprężystości k oraz tłumienia d (rys. 6) można zapisać następująco:

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0 \quad (18)$$



Rys. 6. Mechaniczne odwzorowanie lewitacji magnetycznej
Fig. 6. A mechanical model of the magnetic suspension

Powyższe równanie umożliwia wyznaczenie wzorów opisujących położenie dwóch pierwiastków układu s_1, s_2 :

$$s_1 = -\frac{d}{2m} + j\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}, \quad (19)$$

$$s_2 = -\frac{d}{2m} - j\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{d^2}{4m^2}}. \quad (20)$$

Trzeci biegun wyznaczono podążając za autorem pracy [12], uzależniając go od sztywności k i przyjęto:

$$s_3 = -\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (21)$$

Kolejno wyznaczono nastawy regulatora położenia za pomocą wzorów (15)–(17), podstawiając jako s_1, s_2, s_3 odpowiednio zależności (19), (20), (21).

W celu oceny wpływu sztywności k oraz współczynnika tłumienia d na działanie układu regulacji przeprowadzono badania jakości regulacji dla ich różnych wartości. Przeanalizowano następujące warianty: $k = k_s, k = 0,7 k_s, k = 0,5 k_s$ przy

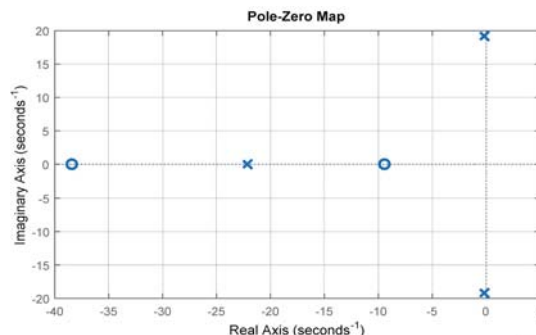
$d = \sqrt{mk} = const$ oraz $d = \sqrt{mk}, d = \sqrt{2mk}, d = \sqrt{3mk}$ przy

$k = 0,7 k_s = const$. Na podstawie przeprowadzonych badań stwierdzono, że najlepsze współczynniki jakości regulacji uzyskał

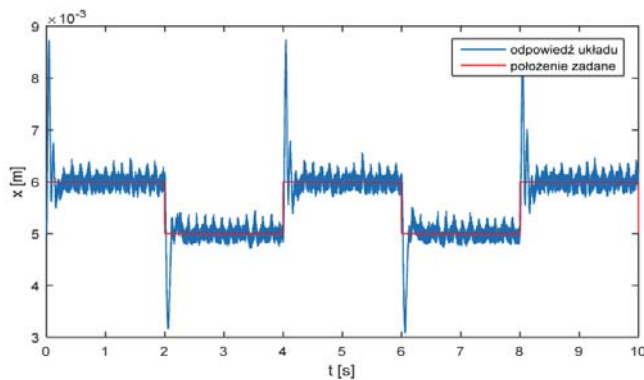
układ dla $k = 0,7 k_s$ oraz $d = \sqrt{mk}$, dla których nastawy regu-

latora PID określone są tabeli 2. Położenie biegunów oraz zer układu zamkniętego dla tych nastaw przedstawione są na rysunku 7.

W podobny sposób wyznaczono nastawy regulatora prądu PI. Najpierw określono transmitancję układu zamkniętego:

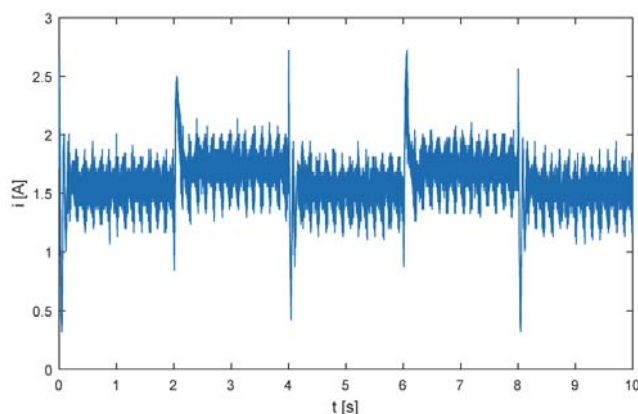


Rys. 7. Bieguny (x) oraz miejsca zerowe(o) układu zamkniętego dla $k = 0,7 k_s$ oraz $d = \sqrt{mk}$
Fig. 7. Poles (x) and zeros (o) of the closed loop for $k = 0,7 k_s$ oraz $d = \sqrt{mk}$



Rys. 8. Stabilizacja położenia kuli dla najlepszych parametrów regulatora PI-PID

Fig. 8. Position stabilization of the ball for the best parameters of the controller PI-PID



Rys. 9. Przebieg prądu dla najlepszych parametrów regulatora PI-PID

Fig. 9. A current wave for the best parameters of the controller PI-PID

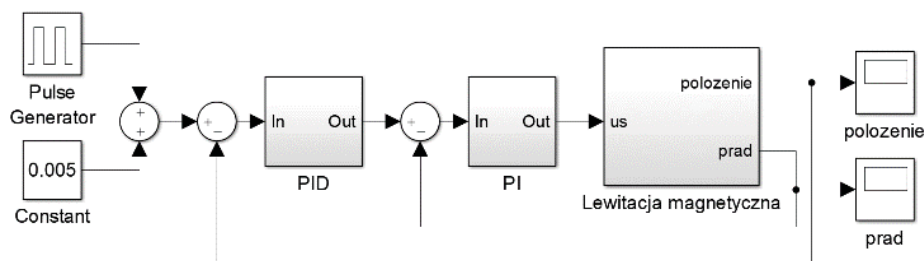
$$G_z(s) = \frac{G_{PI}(s)G_H(s)G_{RL}(s)}{1 + G_{PI}(s)G_H(s)G_{RL}(s)} = \frac{\frac{U_z}{L}(2K_p s + sK_I)}{s^2 + \frac{R + 2K_p U_z}{L}s + \frac{2K_I U_z}{L}} \quad (22)$$

gdzie U_z to napięcie zasilania mostków H.

Następnie wyznaczono na podstawie transmitancji (22) nastawy regulatora:

$$K_p = \frac{(-s_1 - s_2)L - R}{2U_z}, \quad (23)$$

$$K_I = \frac{s_1 s_2 L}{2U_z}. \quad (24)$$



Rys. 10. Model symulacyjny układu regulacji PI-PID

Fig. 10. A simulation model of the PI-PID controller

Zadaniem układu regulacji prądu jest zapewnienie możliwie najszybszego wymuszania prądu w uzwojeniach elektromagnesu zgodnie z wartością zadaną. W tym przypadku bieguny układu regulacji powinny leżeć kilkakrotnie dalej w kierunku wartości ujemnych na płaszczyźnie zespolonej „s” niż bieguny regulatora położenia. W celu oceny zachowania układu dla różnych położeni wartości własnych transmitancji przyjęto, że $s_1 = s_2$ i uzależniono ich położenie od najdalej wysuniętego bieguna regulatora położenia. Badania układu przeprowadzono dla różnych położeni biegunów układu regulacji prądu:

$$s_1 = s_2 = -10\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad s_1 = s_2 = -30\sqrt{\frac{k}{m}}, \quad s_1 = s_2 = -60\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Na podstawie oceny wskaźników jakości regulacji stwierdzono, iż najlepsze współczynniki jakości regulacji uzyskuje się dla:

$$s_1 = s_2 = -30\sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (25)$$

Wówczas układ regulacji PI-PID uzyskuje najlepsze wskaźniki regulacji dla

$$k = 0,7 k_s, \quad d = \sqrt{mk} \quad \text{oraz} \quad s_1 = s_2 = -30\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Nastawy regulatorów dla powyższych zależności przyjmują wartości zamieszczone w tabeli 2.

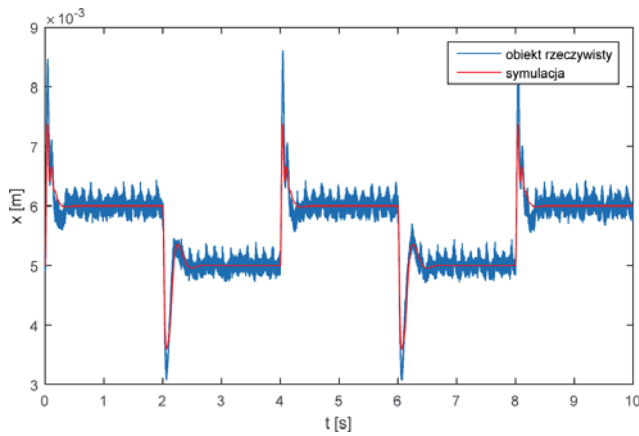
Tabela 2. Nastawy układu regulacji PI-PID

Table 2. Optimal parameters of the cascade control system for the magnetic suspension

Regulator położenia PID			Regulator prądu PI	
K_p [A/m]	K_I [As/m]	K_D [A/ms]	K_p [1/A]	K_I [s/A]
291	2203	6,08	0,85	331

Na rysunku 8 przedstawiono zmianę położenia kuli przy skokowo zmieniającej się wartości zadanej. Czas regulacji t_r wyniósł 210 ms, przeregulowanie $\kappa = 370\%$, natomiast całka z kwadratu uchybu $J_1 = 2,15 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2\text{s}$. Widoczne drgania położenia kuli w otoczeniu punktu zadanego mogą być rezultatem występujących zakłóceń w pętli sprzężenia zwrotnego. Dodatkowo na położenie kuli wpływa kształt prądu płynącego w uzwojeniach (rys. 9), który w wyniku zastosowania impulsowego wzmacniacza mocy znacznie oscyluje w otoczeniu wartości zadanej.

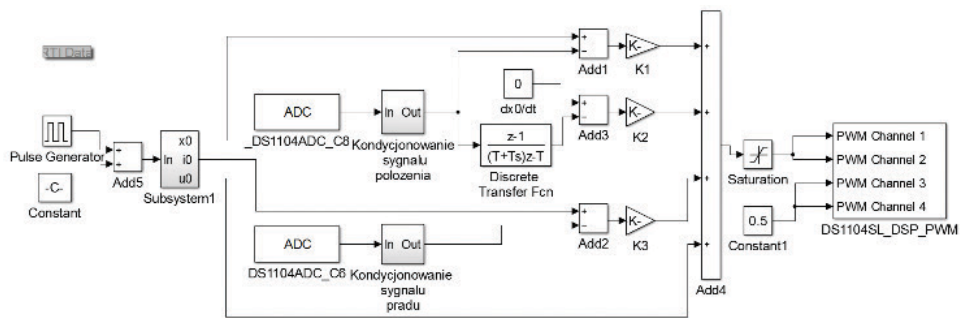
Mając wyznaczone nastawy regulatorów (tab. 2) porównano model rzeczywisty regulatora PI-PID (rys. 4) z modelem symulacyjnym (rys. 10) opartym na równaniach wyznaczonych w punkcie 3. W bloku *Lewitacja magne-*



Rys. 11. Odpowiedź regulatora PI-PID wyznaczona na podstawie symulacji oraz eksperymentu
Fig. 11. Control system output obtained from simulation and experiment

tyczna znajduje się model przedstawiony na rysunku 2. Wyniki porównania przedstawiono na rysunku 11.

Jak można zauważyć na przedstawionym wykresie uzyskano dużą zgodność odpowiedzi na wymuszenie skokowe między symulacją a obiektem rzeczywistym.



Rys. 13. Układ sterowania LQR lewitacją magnetyczną
Fig. 13. The LQR control system of the magnetic suspension

4.2. Regulator LQR

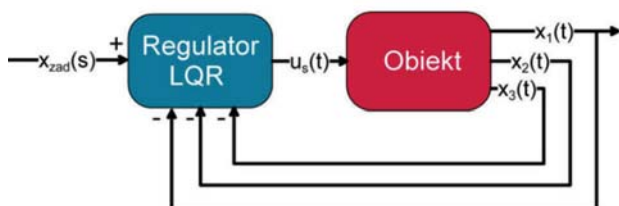
Synteza regulatora LQR polega na dobraniu parametrów regulatora tak, aby minimalizowana była funkcja kosztów będąca całkowym kryterium jakości regulacji:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (26)$$

gdzie Q i R to diagonalne macierze wag mające wpływ na wartości wyznaczonych parametrów regulatora. Dla regulatora LQR obiektu opisanego równaniem (5) prawo sterowania opisane jest jako [3]:

$$u = -Kx(t) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (27)$$

gdzie K to wektor wzmocnień uchybów poszczególnych zmiennych stanu x_1, x_2, x_3 . Schemat blokowy układu regulacji z regulatorem LQR przedstawia rysunek 12.



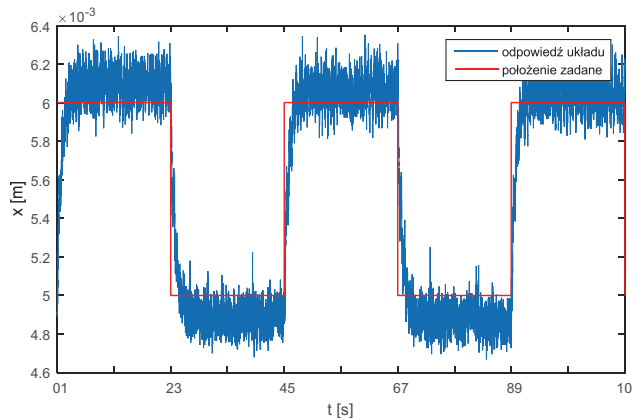
Rys. 12. Schemat układu regulacji liniowo-kwadratowej
Fig. 12. A scheme of a linear-quadratic control system

W celu wyznaczenia współczynników wektora wzmocnień K regulatora przyjęto najprostszy wariant zakładający, że Q jest macierzą jednostkową. Następnie zbadano, jaki wpływ na wskaźniki regulacji miała wartość współczynnika R . Przeanalizowano następujące wartości: $R = 1$, $R = 0,5$ oraz $R = 0,1$. Do rozwiązania równania Riccatiego (26) i wyznaczenia wektora K zastosowano gotową funkcję lqr zaimplementowaną w środowisku MATLAB. Po wyznaczeniu parametrów regulatora LQR zbudowano model eksperymentalny dla środowiska dSPACE, który został przedstawiony na rysunku 13.

Układ sterowania uzyskał najlepsze wskaźniki jakości regulacji dla $R = 0,5$, dla której wektor wzmocnień K wynosi:

$$K = [569,1 \quad 21,56 \quad 1,4] \quad (28)$$

Na rysunku 14 przedstawiono odpowiedź układu sterowania LQR na skokową zmianę położenia kuli dla współczynnika



Rys. 14. Odpowiedź na wymuszenie skokowe układu zamkniętego dla $R = 0,5$

Fig. 14. A step response of the closed loop for $R = 0.5$

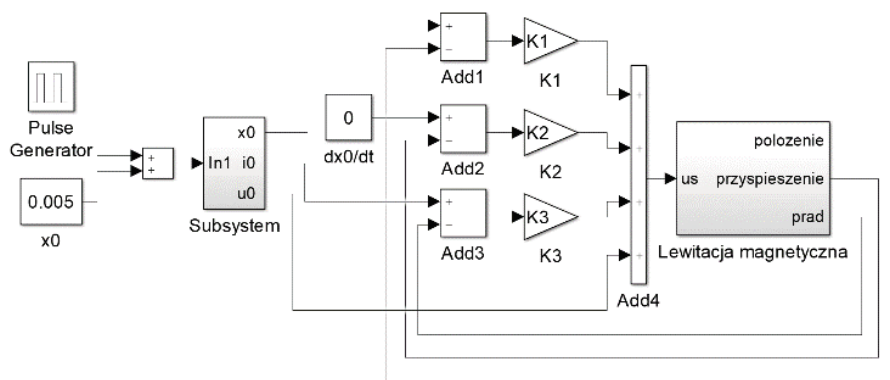
$R = 0,5$. W tym wypadku układ regulacji charakteryzuje się brakiem przeregulowania oraz uchybem w stanie ustalonym.

Ostatnim etapem badań regulatora LQR było porównanie obiektu rzeczywistego (rys. 13) z modelem symulacyjnym (rys. 17).

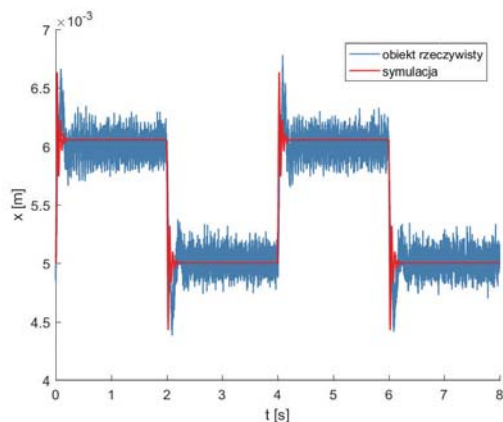
Na rysunku 16 przedstawiono odpowiedź układu regulacji LQR otrzymaną na podstawie modelu symulacyjnego oraz obiektu rzeczywistego. Widoczny jest nieznaczny uchyb regulacji, który spowodowany jest brakiem układu całkującego.

4.3. Regulator LQI

Regulator liniowo-kwadratowy charakteryzuje się brakiem przeregulowania, dużo mniejszym wskaźnikiem całkowym oraz mniejszym czasem regulacji niż regulator kaskadowy



Rys. 15. Model symulacyjny układu regulacji LQR
 Fig. 15. A simulation model of the LQR controller



Rys. 16. Odpowiedź układu LQR wyznaczona symulacyjnie oraz eksperymentalnie
 Fig. 16. The LQR control system output obtained from simulation and experiment

PI-PID [2, 3]. Jego wadą jest występowanie uchybu w stanie ustalonym. Rozwiązaniem tego problemu jest dodanie części całkującej pozwalającej sprowadzić uchyb ustalony do zera, a także poprawić dynamikę i odporność regulatora na zakłócenia. W celu rozbudowy regulatora o wspomnianą już część całkującą przyjęto nową zmienną stanu:

$$\dot{x}_4 = r - x_1, \tag{29}$$

gdzie r to wartość zadana położenia.

Wobec tego

$$x_4 = \int_0^t (r - x_1) dt = \int_0^t e(t) dt. \tag{30}$$

Otrzymano zatem nową postać macierzy stanu (3)

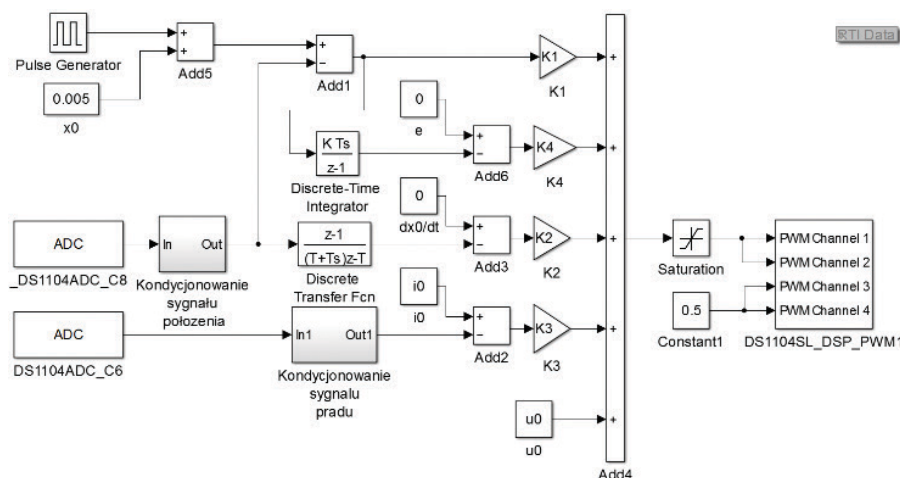
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2m} \frac{\partial^2 L(x_{1r})x_{3r}^2}{\partial x_1^2} & 0 & \frac{1}{m} \frac{\partial L(x_{1r})x_{3r}}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{T} & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{k}{T} \\ 0 \end{bmatrix} u_s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \tag{31}$$

W związku ze zwiększeniem liczby zmiennych stanu modyfikacji poddano także macierz wag Q , ponieważ jej rozmiar musi odpowiadać rozmiarowi macierzy stanu A . Dla tego przypadku również przyjęto Q jako macierz jednostkową oraz $R = 0,5$, ponieważ regulator LQR dla tych wartości uzyskał najlepsze wskaźniki regulacji.

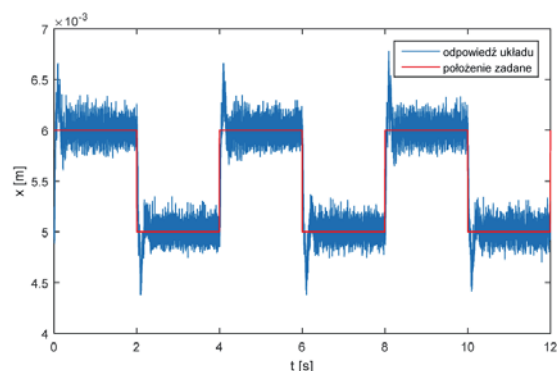
W wyniku działania funkcji lqr uzyskano czteroelementowy wektor sterowania:

$$K = [569,2 \quad 21,56 \quad 1,39 \quad -1,41] \tag{32}$$

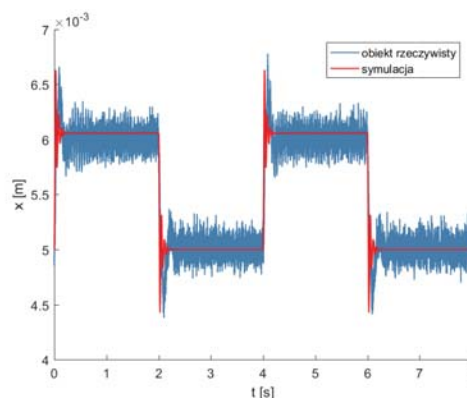
Na rysunku 17 przedstawiono implementację układu sterowania LQI w środowisku MATLAB/Simulink.



Rys. 17. Układ sterowania LQI lewitacją magnetyczną
 Fig. 17. The LQI control system for magnetic levitation



Rys. 18. Odpowiedź na wymuszenie skokowe układu z regulatorem LQR rozszerzonym o człon całkujący
Fig. 18. A step response of the LQR controller with an integral component



Rys. 19. Odpowiedź układu wyznaczona symulacyjnie oraz eksperymentalnie
Fig. 19. The control system output obtained from simulation and experiment

Na rysunku 18 przedstawiono odpowiedź układu regulacji LQI na skokową zmianę położenia stalowej kuli. Widoczne jest przeregulowanie wynoszące $\kappa = 160\%$ oraz brak uchybu ustalonego.

Na rysunku 19 przedstawiono odpowiedź układu regulacji LQI otrzymaną na podstawie modelu symulacyjnego oraz obiektu rzeczywistego. W obu wykresach występuje przeregulowanie oraz brak uchybu ustalonego. Jednak odpowiedź modelu symulacyjnego pozbawiona jest oscylacji.

Tabela 3. Zestawienie wskaźników jakości regulacji dla badanych regulatorów

Table 3. Performance indices of tested controllers

	J_1 [m ² ·s]	κ [%]	T_r [s]
PI-PID	$2,15 \cdot 10^{-3}$	370	0,21
LQR	$6,32 \cdot 10^{-4}$	0	0,15
LQI	$4,18 \cdot 10^{-4}$	160	0,15

Analizując dane zestawione w tabeli 3 można stwierdzić, że najlepszą odpowiedź uzyskano dla regulatora liniowo-kwadratowego z członem całkującym. W tym przypadku uzyskano najmniejszy wskaźnik całkowity J_1 przy znacznie mniejszym przeregulowaniu w stosunku do regulatora PI-PID oraz czasie regulacji porównywalnym do regulatora LQR. Dzięki działaniu członu całkującego regulacja LQI zapewnia zerowy uchyb regulacji. Regulator LQR mimo równie krótkiego czasu regulacji cechuje się występowaniem uchybu w stanie ustalonym, co wpływa na zwiększenie wskaźnika całkowitego J_1 . Drugą wadą regulatora LQR jest efektywna stabilizacja kulki tylko w bliskim otoczeniu punktu równowagi, co w zasadzie odpowiada warunkom linearyzacji obiektu. W przypadku pozostałych zastosowanych układów regulacji możliwa była stabilizacja w 50% osiągalnej przestrzeni, co bezpośrednio związane jest z występowaniem w nich części całkującej.

5. Podsumowanie

W pracy zaprezentowano różne metody stabilizacji położenia lewitacji magnetycznej. W przypadku każdej z nich określono wpływ metody syntezy regulatora na współczynniki jakości regulacji, co pozwoliło na porównanie ich własności dynamicznych oraz wybranie układu o najlepszych parametrach. Główną zaletą regulacji liniowo-kwadratowej, szczególnie w stosunku

do regulatora PI-PID, jest brak przeregulowania wynikający z położenia biegunów układu zamkniętego dla tego typu regulacji, które posiadają zerowe części urojone. Wspomniany już regulator PI-PID odznacza się najgorszymi wskaźnikami jakości regulacji. W tym przypadku występuje największy wskaźnik całkowity oraz najdłuższy czas regulacji, co bezpośrednio związane jest ze znacznym przeregulowaniem występującym w układzie.

Wyznaczenie modelu oraz jego poprawna identyfikacja pozwoliły na syntezę różnych układów regulacji. Należy zaznaczyć, że na potrzeby omówionych badań wykorzystano liniowe układy regulacji automatycznej. W celu pełnego przeglądu możliwości sterowania lewitacją magnetyczną warto porównać otrzymane wyniki z innymi niż liniowe układy regulacji.

Bibliografia

- Bączek R., Lewandowski D., Pluciński P., *Pomiary i sterowanie w dydaktycznym modelu lewitacji magnetycznej*, „Pomiary Automatyka Robotyka”, R. 16, Nr 2, 2012, 456–462.
- Unni A.C., Junghare A.S., Mohan V., Ongsakul W., *PID, fuzzy and LQR controllers for magnetic levitation system*. [in:] 2016 International Conference on Cogeneration, Small Power Plants and District Energy (ICUE), DOI: 10.1109/COGEN.2016.7728977.
- Piłat A., *Sterowanie układami magnetycznej lewitacji*. PhD thesis, Akademia Górniczo-Hutnicza im. Stanisława Staszica, Wydział Elektrotechniki, Automatyki, Informatyki i Elektroniki, Kraków, 2002.
- Ghosh A., Krishnan T.R., Tejaswy P., Mandal A., Pradhan J.K., Ranasingh S., *Design and implementation of a 2-DOF PID compensation for magnetic levitation systems*. “ISA Transactions”, Vol. 53, Iss. 4, 2014, 1216–1222, DOI: 10.1016/j.isatra.2014.05.015.
- Bauer W., Dziwiński T., Baranowski J., Piątek P., Zagórska M., *Comparison of Performance Indices for Tuning of PI^λD^μ Controller for Magnetic Levitation System*. [in:] Advances in Modelling and Control of Non-integer-Order Systems, Springer, Cham, 2015, 125–133, DOI: 10.1007/978-3-319-09900-2_12.
- Piłat A., *A comparative study of PI^λD^μ controller approximations exemplified by active magnetic levitation system*. [in:] Mitkowski W., Kacprzyk J., Baranowski J. (eds.) Theory & Appl. of Non-integer Order Syst. LNEE, Vol. 257, 2013, Springer, Heidelberg, 231–241, DOI: 10.1007/978-3-319-00933-9_21.

7. Baranowski J., Piątek P., *Nonlinear dynamical feedback for motion control of magnetic levitation system*, [in:] Proceedings of 13th International Power Electronics and Motion Control Conference, 2008, DOI: 10.1109/EPEPEMC.2008.4635471.
8. Jaroszyński J., Ziętkiewicz J., *Feedback linearization based nonlinear control of magnetic levitation system*, "Studia z Automatyki i Informatyki", Vol. 41, 2016, 35–46.
9. Jasik D., *Badanie lewitacji magnetycznej z wykorzystaniem karty dSpace ds1104*, praca dyplomowa, Politechnika Opolska, Opole 2017.
10. Nota katalogowa czujnika BAW M30ME-UAC10BS04G firmy Balluff.
11. Wajnert D., *Charakterystyki pracy łożyska magnetycznego z uwzględnieniem jego układu regulacji*, praca doktorska, Politechnika Opolska, Opole 2011.

Research on Linear Regulators for the Magnetic Levitation

Abstract: This work presents the implementation of the control algorithms for the magnetic levitation with using a rapid prototype system based on dSPACE DS1104 card and MATLAB/Simulink software. The work presents the possibility of obtaining the phenomenon of magnetic levitation and description of the object on which the research was conducted. The mathematical model of the object was formulated, its parameters were determined, and the simulation model was developed in MATLAB/Simulink. After introducing control system performance indices, three different regulators were defined: PI-PID, LQR and LQI. Finally, the results of implemented control algorithms for different settings has been shown. Control system performance indices of all three regulators were compared.

Keywords: magnetic levitation, rapid prototyping, control system synthesis

mgr inż. Denis Jasik

deniojas@gmail.com

Absolwent Wydziału Mechanicznego Politechniki Opolskiej na kierunku Mechatronika, specjalność: Systemy Automatyki i Robotyki w Mechatronice, studia ukończone z wyróżnieniem. Obecnie zatrudniony na stanowisku Młodszy Konstruktor w firmie Filplast Sp. z o.o. w Głogówku. Prywatnie aktywny sportowiec-amator, poświęcający część wolnego czasu na inną pasję – muzykę.



dr inż. Dawid Wajnert

d.wajnert@po.opole.pl

Pracownik Katedry Elektrotechniki i Mechatroniki Politechniki Opolskiej. Obszar działalności naukowej obejmuje projektowanie siłowników aktywnych oraz hybrydowych łożysk magnetycznych.

