

BRZOZA Andrzej

KONTAKT SKRĘTNY W RAMACH MODELU GREENWOODA-WILLIAMSONA

Streszczenie

W artykule omówiono kontakt skrętny dla stempla kulistego i sprężystej półprzestrzeni w ramach modelu chropowatości Greenwooda-Williamsona. Przedstawiono rozwiązania: rozkładu nacisków kontaktowych, rozkładu nacisków stycznych, rozkładu momentu skrętnego i kąta skrętnego oraz obszaru przyczepności w zależności od parametrów chropowatości. Prezentowane podejście jest odmienne, niż w rozwiązaniu klasycznym, w którym stosuje się teorię Hertza. Rozwiązanie sprowadza się do równań całkowych rozwiązywanych numerycznie. Obliczone wyniki porównano z klasycznym rozwiązaniem dla styku skrętnego w zagadnieniu Lubkina.

WSTĘP

Znana praca Hertza [1] podaje rozwiązanie zagadnienia kontaktowego dla styku idealnie sprężystych ciał o doskonale gładkich brzegach, na których nie występują siły tarcia. Jednak praktyczne zastosowania wymagają rozważenia rzeczywistych warunków charakteryzujących zjawiska i procesy występujące w styku ciał, nie uwzględnione w klasycznym rozwiązaniu. Wśród wielu czynników wpływających na kontakt ciał bardzo ważną rolę odgrywa chropowatość stykających się powierzchni.

Do opisu chropowatości użyjemy modelu Greenwooda-Williamsona [7]. Model ten traktuje chropowatość jako zbiór sferycznych segmentów o stałym promieniu, gęsto pokrywających płaski brzeg półprzestrzeni, tak że wysokość tych segmentów ponad powierzchnię nominalną ciała jest zmienną losową mającą rozkład Gaussa o funkcji gęstości prawdopodobieństwa

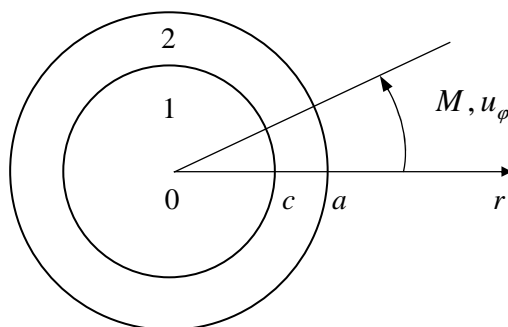
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right)$$

gdzie σ jest odchyleniem standardowym. W modelu zakłada się, że kontakt każdego z tych segmentów ze stemplem odbywa się zgodnie z teorią sprężystego kontaktu Hertza. Problem wyznaczenia efektywnych nacisków kontaktowych i wielkość strefy styku w rozpatrywanym zagadnieniu sprowadza się do nieliniowych równań całkowych, rozwiązanych numerycznie.

W rozdziale pierwszym przedstawione zostały ogólne relacje dotyczące zagadnienia skrętnego przy uwzględnieniu podziału strefy styku na obszary przyczepności i poślizgów. Następnie w rozdziale drugim rozpatrujemy zagadnienie chropowatego kontaktu skrętnego kulistego stempla i sprężystej półprzestrzeni w ramach modelu Greenwooda-Williamsona. Wyniki porównano z klasycznym rozwiązaniem styku skrętnego w zagadnieniu Lubkina [2].

1. UOGÓLNIONY KONTAKT SKRĘTNY Z UWZGLĘDNIENIEM CZĘŚCIOWYCH POŚLIZGÓW

Rozważamy zagadnienie osiowosymetrycznego styku ciał, z których jedno jest sztywnym stemplem, a drugie sprężystą półprzestrzenią, w układzie współrzędnych walcowych $0r\varphi z$. Zakładamy, że naciski normalne spełniają warunki, przy których w zagadnieniu kontaktu skrętnego we wspólnej strefie styku powstają poślizgi. Uważamy, że środkowa część strefy styku znajduje się w warunkach całkowitej przyczepności, podczas gdy na zewnętrznym pierścieniu tej strefy powstają poślizgi [5], co przedstawia rysunek 1.



Rys. 1. Osiowosymetryczny styk skręcający: 1 – strefa przyczepności (styk) i 2 – strefa poślizgu

Niech znany jest rozkład nacisków normalnych pomiędzy ciałami $p(r)$ oraz wielkość kołowej strefy styku a . Następnie przyłożony jest moment obrotowy M , który nie ma wpływu na zagadnienie normalne. Pod działaniem momentu obrotowego w półprzestrzeni powstaje stan czystego skręcania opisany jednym niezerowym przemieszczeniem w kierunku kątowym $u_\varphi(r, z)$, co powoduje dwie niezerowe składowe tensora naprężeń $\tau_{r\varphi}(r, z)$ i $\tau_{z\varphi}(r, z)$.

Biorąc pod uwagę relacje pomiędzy składowymi tensora naprężeń, a przemieszczeniem kątowym z prawa Hooke'a [3] otrzymujemy równanie równowagi na przemieszczenia:

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

Warunki brzegowe rozważonego problemu w strefie przyczepności:

$$u_\varphi(r, 0) = \kappa r, \quad 0 < r \leq c \quad (2a)$$

$$q(r) < fp(r), \quad 0 < r \leq c \quad (2b)$$

Warunki brzegowe rozważonego problemu w strefie poślizgów:

$$u_\varphi(r, 0) > 0, \quad c < r < a \quad (2c)$$

$$q(r) = fp(r), \quad c < r < a \quad (2d)$$

gdzie: $\kappa = \text{const}$ – dany kąt skręcania sztywnego stempla, c – niewiadomy promień obszaru przyczepności, f – współczynnik tarcia, q – naciski kątowe, u_φ – przemieszczenie kątowe.

Do rozwiązania rozpatrywanego zagadnienia stosujemy transformację całkową Hankela, równanie operatorowe Abela [6], natomiast do obliczenia całek, których nie da się rozwiązać analitycznie, zastosowano całkowanie numeryczne.

Rozwiązanie końcowe przedstawionego zagadnienia sprowadza się do wzorów [9]

dla nacisków kątowych:

$$q(r) = fp(r) - \begin{cases} \frac{d}{dr} \int_r^c \frac{\varphi_0(t)}{\sqrt{t^2 - r^2}} dt, & 0 \leq r \leq c < a \\ 0, & r > c \end{cases} \quad (3)$$

dla przemieszczenia kąowego:

$$u_\varphi(r,0) = -\frac{f}{\mu} R_1(r) - \frac{1}{\mu r} \begin{cases} \int_0^r \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & 0 \leq r \leq c < a \\ \int_0^c \frac{t\varphi_0(t)}{\sqrt{r^2 - t^2}} dt, & r > c \end{cases} \quad (4)$$

dla szukanej funkcji $\varphi_0(r)$ z rozwiązania równania Abela:

$$\varphi_0(r) = -\frac{4}{\pi} \mu \kappa r - \frac{2}{\pi} f r \int_r^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - r^2}} ds, \quad 0 \leq r \leq c \quad (5)$$

dla relacji pomiędzy kątem skrećania κ i promieniem strefy przyczepności c :

$$\kappa = -\frac{f}{2\mu} \int_c^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - c^2}} ds \quad (6)$$

dla relacji pomiędzy momentem skrętnym i naciskiem normalnym:

$$M = 2\pi \int_0^a r^2 p(r) dr - \frac{32}{3} \mu \kappa c^3 - 8f \int_0^c r \int_r^c \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} \int_t^a \frac{p(s)}{\sqrt{s^2 - t^2}} ds dt dr \quad (7)$$

Wzory (3)-(7) zależne są od funkcji $p(r)$ wyrażającej rozkład nacisków normalnych.

2. PRZYKŁAD PÓLPRZESTRZENI CHROPOWATEJ W RAMACH MODELU GREENWOODA-WILLIAMSONA

Uproszczone rozwiązanie zagadnienia chropowatego styku wykorzystujące model Greenwooda-Williamsona jest przytoczone w pracy [8]. Okazuje się, że efektywne naciski kontaktowe w tym zagadnieniu można wyznaczyć ze wzoru:

$$p(r) = (1 + \gamma) \frac{P}{\pi a^2} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^\gamma, \quad 0 \leq r \leq a \quad (10)$$

gdzie: parametr γ zależy jest od parametru chropowatości P_0^* i wyraża się wzorem:

$$\gamma = \frac{3}{2} P_0^* \cdot a^{*2} - 1 \quad (11)$$

Promień strefy styku a^* i parametr chropowatości P_0^* związane są formułą:

$$a^* = \begin{cases} \frac{1.605}{\sqrt{P_0^*}}, & P_0^* \leq 0.47 \\ 3.51 - 2.51 \cdot P_0^*, & 0.47 \leq P_0^* \leq 1 \end{cases} \quad (12)$$

Parametr chropowatości P_0^* w tym uproszczonym modelu wyraża się wzorem:

$$P_0^* = \frac{1}{1 + 1.22 \alpha \omega^{-0.16}} \quad (13)$$

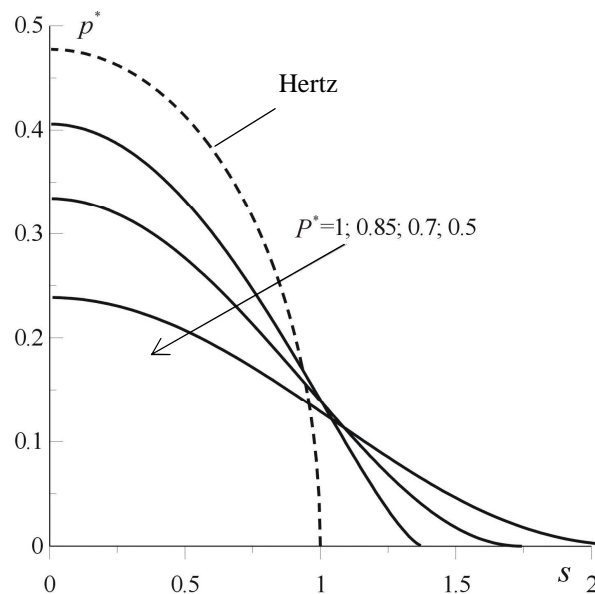
gdzie: występują znane parametry z modelu Greenwooda-Williamsona [7]: bezwymiarowy parametr $\omega = \frac{H_{mic}}{E' \sqrt{\rho/\sigma}}$ i parametr chropowatości $\alpha = \frac{\sigma R}{a_H^2}$.

W zmiennych bezwymiarowych $\rho = r/a_H$, $a^* = a/a_H$ rozkład nacisków kontaktowych (10) ma postać:

$$p^*(\rho) = \frac{1+\gamma}{\pi} \left[1 - \left(\frac{\rho}{a^*} \right)^2 \right]^\gamma, \quad 0 \leq \rho \leq a^* \quad (14)$$

Rozwiązanie przybliżone można określić poprzez jeden parametr P_0^* , który wyraża się wzorem (13). To rozwiązanie jest szacunkowe, jednak błąd nie przekracza 3%.

Rozkłady nacisków kontaktowych p^* w zależności od parametru chropowatości P_0^* przedstawione są na rysunku 2. Dla $P_0^* = 1$ zgodnie ze wzorami (12) i (14) uzyskujemy $a^* = 1$, $\gamma = 0.5$, co daje rozkład Hertza dla półprzestrzeni gładkiej (linia przerywana). Zmniejszenie parametru P_0^* (co oznacza zwiększenie chropowatości) powoduje wzrost obszaru styku i zmniejszenie nacisków normalnych. Cechą wyróżniającą badany model Greenwooda-Williamsona jest to, że pochodna funkcji nacisków kontaktowych w punkcie krańcowym strefy styku równa się zero.

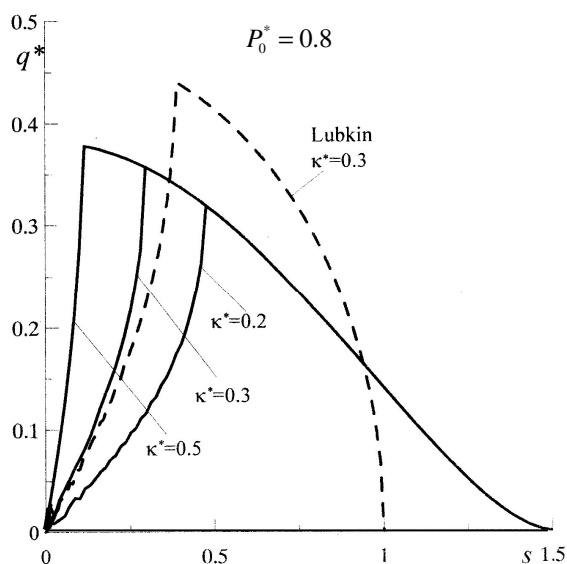


Rys. 2. Rozkłady nacisków kontaktowych p^* w zależności od parametru chropowatości P_0^*

Zakładamy, że w warunkach styku normalnego dodatkowo do stempla przyłożono moment obrotowy M . W oparciu o analizę dokonaną w [4] i [9] można stwierdzić, że w rozpatrywanym zagadnieniu kontaktu skrętnego powstają częściowe poślizgi i do rozwiązania niniejszego zagadnienia może być użyta ogólna teoria opisana wzorami (3), (4), (5), (6) i (7).

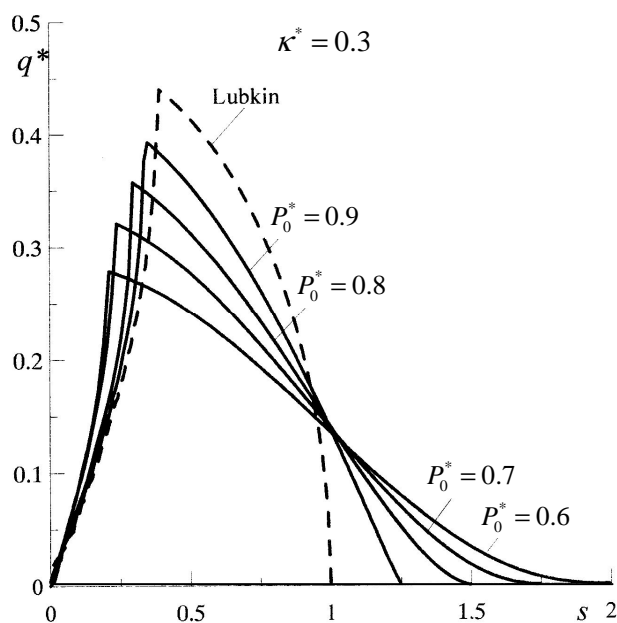
Wstawiając funkcję nacisków normalnych (14) do wzorów (3)-(7) otrzymuje się rozkład nacisków kątowych, zależności pomiędzy kątem obrotu i promieniem strefy przyczepności oraz momentem obrotowym i kątem obrotu. W rozpatrywanym przykładzie nie można policzyć całek zawierających nieliniową funkcję nacisków normalnych i do ich obliczenia użyto metodę numerycznego obliczania całek.

Rozkłady nacisków stycznych q^* w zależności od kąta skrętnego κ^* , przy ustalonej chropowatości $P_0^* = 0.8$, przedstawione są na rysunku 3. Na wykresie jest widoczne, że wzrost kąta skrętnego powoduje zwiększenie siły stycznej. Dla porównania linia przerywana przedstawia osiowosymetryczny kontakt skrętny Lubkina przy ustalonym kącie skrętnym $\kappa^* = 0.3$. Widać zmniejszenie poziomu nacisków stycznych dla chropowatej półprzestrzeni.



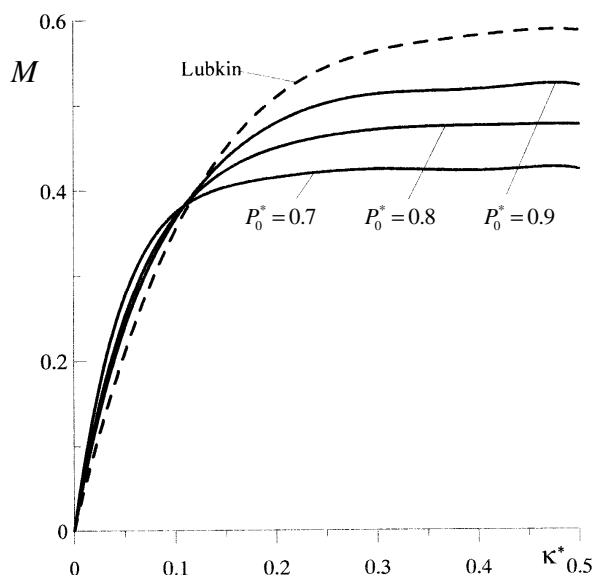
Rys. 3. Rozkłady nacisków stycznych q^* w zależności od kąta skrętnego κ^*

Natomiast rozkłady nacisków stycznych w zależności od parametrów chropowatości P_0^* , przy ustalonym kącie skrętnym $\kappa^* = 0.3$, przedstawione są na rysunku 4, z którego wynika, że chropowatość istotnie wpływa na rozkłady nacisków stycznych.



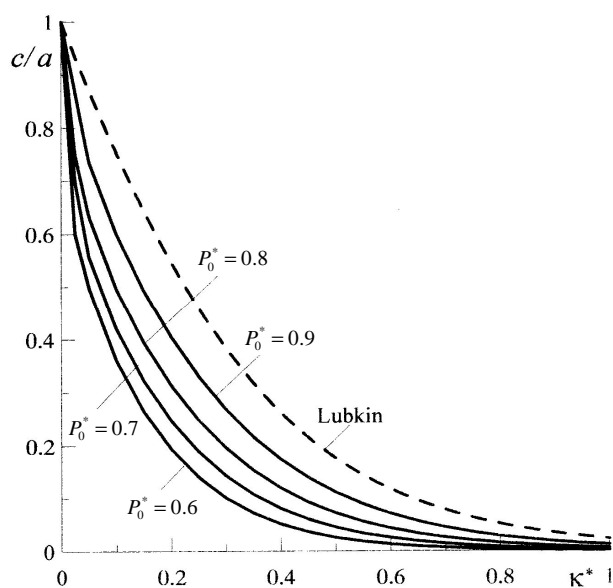
Rys. 4. Rozkłady nacisków stycznych q^* dla różnych parametrów chropowatości P_0^*

Rozkłady zależności momentu skrętnego M^* i kąta skrętnego κ^* , dla różnych parametrów chropowatości P_0^* , przedstawione zostały na rysunku 5. Zwiększenie wartości parametru chropowatości powoduje zmniejszenie nachylenia krzywych, które charakteryzują zwiększanie kąta skrętnego przy wzroście momentu skrętnego. Linią przerywaną zaznaczona jest ta zależność dla zagadnienia Lubkina.



Rys. 5. Zależności momentu skrętnego M^* i kąta skrętnego κ^* dla różnych parametrów P_0^*

Wielkość obszaru przyczepności $c^* = c/a$ jako funkcja kąta skręcania κ^* przedstawia rysunek 6 dla chropowatej (krzywe ciągłe) i gładkiej (krzywa przerywana) powierzchni dla zagadnienia Lubkina [2]. Widoczny jest wpływ chropowatości P_0^* na przyczepność, tzn. dla większej chropowatości obszar przyczepności jest szerszy.



Rys. 6. Obszar przyczepności c^* jako funkcja kąta skręcania κ^* dla różnych parametrów P_0^*

PODSUMOWANIE

Zaprezentowano inne od klasycznego podejście do kontaktu skrętnego uwzględniającego częściowe poślizgi, dla którego rozwiązanie przedstawiono w postaci uogólnionych wzorów. Przy założonych warunkach brzegowych w strefach przyczepności i poślizgów, dla stempla kulistego i chropowatej półprzestrzeni, otrzymano rozwiązanie problemu kontaktu skrętnego, z którego wynika klasyczne rozwiązanie w ramach modelu Greenwooda-Williamsona, jako szczególny przypadek ogólnego rozwiązania.

BIBLIOGRAFIA

1. Hertz H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92, pp. 156-171, 1881.
2. Lubkin J.L.: *The torsion of elastic spheres in contact*, ASME J. Appl. Mech., 18, pp. 183-187, 1951.
3. Nowacki W.: *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN, 1970.
4. Johnson K.L.: *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, UK, 1985.
5. Pauk V.: *Wybrane zagadnienia kontaktu ciał odkształcalnych*, ISSN 0239-4952, Wyd. Politechnika Świętokrzyska, Kielce, 2005.
6. Sneddon I.N.: *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1951.
7. Greenwood, J.A., Williamson, J.B.P., "Contact of nominally flat surfaces", Proceedings of Royal Society of London, Ser. A., A295, pp. 300–319, 1966.
8. Bahrami M., Yovanovich M.M., Culham J.R.: *A Compact Model for Spherical Rough Contact*, Journal of Tribology, Vol. 127, pp. 884–889, 2005.
9. Brzoza A.: *Kontakt skrętny z uwzględnieniem częściowych poślizgów*, ISSN 1231-5478, Logistyka, 3/2012, s. 193-202, Maj-Czerwiec, 2012.

TORSIONAL CONTACT INVOLVING GREENWOOD-WILLIAMSON MODEL

Abstract

The paper discusses torsional contact between a spherical punch and an elastic half-space using the Greenwood-Williamson model. It provides a general solution to the problem of axially symmetric torsion, taking into account partial slip for a known distribution of normal stress and a known contact area. The approach differs from the classical solution, in which the Hertz theory is used. The partial slip problem was reduced to integral equations solved numerically. The results are compared with those of the classical solution for a spherical punch and an elastic half-space in a Lubkin's problem.

Autor:

dr Andrzej BRZOZA – Politechnika Świętokrzyska w Kielcach, Wydział Budownictwa i Architektury, Katedra Inżynierii Komunikacyjnej, e-mail: a.brzoza@tu.kielce.pl