



Prosta metoda sprawdzania fundamentów ze względu na przebicie

Prof. dr hab. inż. Michał Knauff, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie, dr inż. Piotr Knyziak, Politechnika Warszawska

1. Wprowadzenie

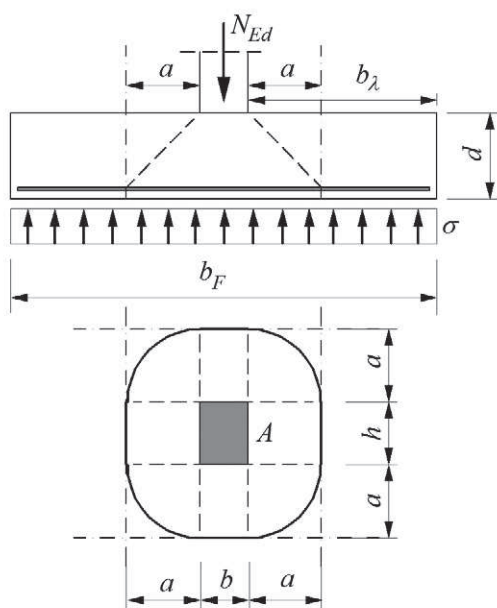
Projektując żelbetowe fundamenty według normy [1] wyznacza się zbrojenie potrzebne ze względu na zginanie, a następnie sprawdza się wymagania ze względu na przebicie. Sprawdzenie na przebicie polega na porównywaniu wartości średnich naprężeń stycznych na obwodzie kontrolnym v_{Ed} z granicznymi wartościami tych naprężeń v_{Rd} (rys. 1).

Według [1] należy przyjmować – inaczej niż przy sprawdzaniu stropów – że graniczne naprężenie styczne zależy od odległości pomiędzy rozpatrywanym obwodem a licem słupa:

$$v_{Rd} = v_0 \frac{2d}{a} \quad (1)$$

W powyższym wzorze v_0 oznacza naprężenie graniczne wyznaczone tak, jak przy sprawdzaniu stropów:

$$v_0 = \max \left[0,128k(100\rho_1 f_{ck})^{\frac{1}{3}}, 0,035k^{\frac{3}{2}} f_{ck}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (2)$$



Rys. 1. Obliczanie ze względu na przebicie przez słup o przekroju prostokątnym – obwód kontrolny i podstawowe oznaczenia

Wartości k i ρ_1 wyznacza się zgodnie z normą, tak samo jak w stropach.

Naprężenie graniczne v_{Rd} zależy od położenia rozpatrywanego przekroju, określonego przez wartość a , gdyż przyjmuje się, że wyczerpanie nośności przez rozciąganie wywołane ścinaniem, które zachodzi w przekrojach ukośnych, nie może wystąpić w mało nachylonych przekrojach, w których w strefie ściskanej oprócz naprężeń stycznych działają duże naprężenia ściskające.

Naprężenie v_{Ed} zależy od siły $V_{Ed,red}$, czyli siły w słupie zmniejszonej o reakcję podłoża pod fundamentem (reakcję obliczoną z pominięciem ciężaru własnego fundamentu i ciężaru gruntu, który leży na fundamencie), która działa na powierzchnię ograniczoną analizowanym obwodem kontrolnym.

Na każdym obwodzie kontrolnym oddalonym o a ($0 < a \leq 2d$) od brzegu słupa powinien być spełniony warunek

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed,red}}{u_0 d} \leq v_{Rd} = v_0 \frac{2d}{a} \quad (3)$$

W powyższym wzorze u_0 oznacza długość obwodu kontrolnego, a współczynnik β zależy od mimośrodowości siły działającej na fundament (zestawienie wzorów w tabeli 1); można go wyznaczyć np. według rysunku 6.21N w normie [1].

Im większa jest odległość, tym mniejsze jest naprężenie graniczne. Dla $a = 2d$ ma ono wartość taką jak w stropach. W przekrojach leżących bliżej słupa naprężenia graniczne są większe, ale naprężenia styczne też są większe (siła $V_{Ed,red}$ przyjmuje większe wartości). Krytyczny obwód, tzn. obwód najbardziej zagrożony przekroczeniem naprężeń granicznych, można znaleźć (w przybliżeniu) sprawdzając warunek (3) w kilku przekrojach. Krytyczny jest ten obwód, na którym stosunek v_{Ed} do v_{Rd} osiąga największą wartość. W punkcie 2 wyprowadzono wzory określające położenie tego obwodu i przedstawiono wyniki w postaci prostych wykresów, które umożliwiają sprawdzenie warunku (1) bez stosowania kilkakrotnych prób, równie prosto jak przy sprawdzaniu stropów.

To kilkakrotne sprawdzanie, jeżeli ma doprowadzić do dokładnego wyniku, wymaga znacznego nakładu pracy rachunkowej. W związku z tym w tabelach stosowanych w Niemczech [3] zaleca się, niezgodnie z Eurokodem, żeby dla $b_\lambda > 2$ (rys. 1) przyjmować



$a = d$, a tylko w innych przypadkach do wyznaczania wartości a stosować metodę iteracyjną.

W artykule T. Urbana, M. Sitnickiego i J. Krakowskiego [4] przedstawiono wstępne badania żelbetowych płyt krępych na przebicie mające na celu weryfikację procedury Eurokodu 2, która – jak wspomniano – nakazuje sprawdzanie naprężeń stycznych na wszystkich możliwych obwodach kontrolnych. Wyniki badania czterech modeli potwierdziły jakościową poprawność tego założenia, mała liczba wyników nie upoważnia jeszcze jednak do oceny ilościowej.

W artykule T. Urbana [5] można znaleźć obszerną analizę wpływu położenia przekroju kontrolnego na nośność na przebicie elementów obciążonych symetrycznie.

2. Wyznaczanie położenia krytycznego obwodu

Jeżeli fundament ma stałą grubość, to stosunek v_{Ed}/v_{Rd} można wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{v_{Ed}}{v_{Rd}} = \frac{\beta (V_{Ed} - \sigma A) a}{u d v_0} = \frac{\beta}{2d^2 v_0} \Omega \quad (4)$$

w którym A oznacza pole ograniczone przez rozpatrywany obwód, u oznacza długość tego obwodu,

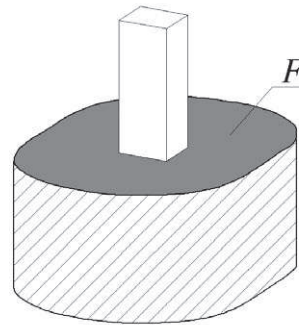
$$\Omega = \frac{(V_{Ed} - \sigma A) a}{u} \quad (5)$$

Krytyczny jest ten obwód kontrolny, dla którego wyrażenie Ω , rozpatrywane jako funkcja a , osiąga maksimum.

2a. Słup prostokątny o wymiarach $b \cdot h$ ($h \geq b$) (rys. 1)

Pole powierzchni podstawy bryły F wyciętej przez obwód kontrolny (rys. 2) jest równe

$$A = \pi a^2 + 2ab + 2ah + bh$$



Rys. 2.
Pole obwodu kontrolnego – słup o przekroju prostokątnym

Długość obwodu podstawy bryły F jest równa

$$u = 2\pi a + 2b + 2h$$

Współczynnik Ω , występujący we wzorze (2) można przedstawić w postaci

$$\Omega = \frac{\{V_{Ed} - [\pi a^2 + 2a(b+h) + bh]\sigma\}a}{2\pi a + 2(b+h)} \quad (6)$$

Po kilku przekształceniach stwierdza się, że pochodna wyrażenia (6) jest równa zero wtedy, gdy

$$\frac{V_{Ed}}{\sigma b h} - 1 - 4 \frac{1 + \chi}{\chi} \alpha_h - \frac{5\pi}{\chi} \alpha_h^2 - \frac{2\pi^2}{(1 + \chi)\chi} \alpha_h^3 = 0 \quad (7)$$

We wzorze (7)

$$\alpha_h = \frac{a}{h} \quad \chi = \frac{b}{h}$$

Poszukiwaną krytyczną wartość stosunku a/h otrzymuje się jako rozwiązanie równania (7). Rozwiązania tego równania w zależności od wartości $V_{Ed}/(\sigma b h)$ dla wybranych wartości b/h przedstawiono na rysunku 3. Wykresy przedstawione na tym rysunku można zastosować do natychmiastowego (tzn. bez sprawdzania kilku możliwości) wyznaczania krytycznej wartości a .

2b. Słup o przekroju kołowym

Pole powierzchni podstawy bryły wyciętej przez obwód kontrolny jest równe

$$A = \pi (r + a)^2$$

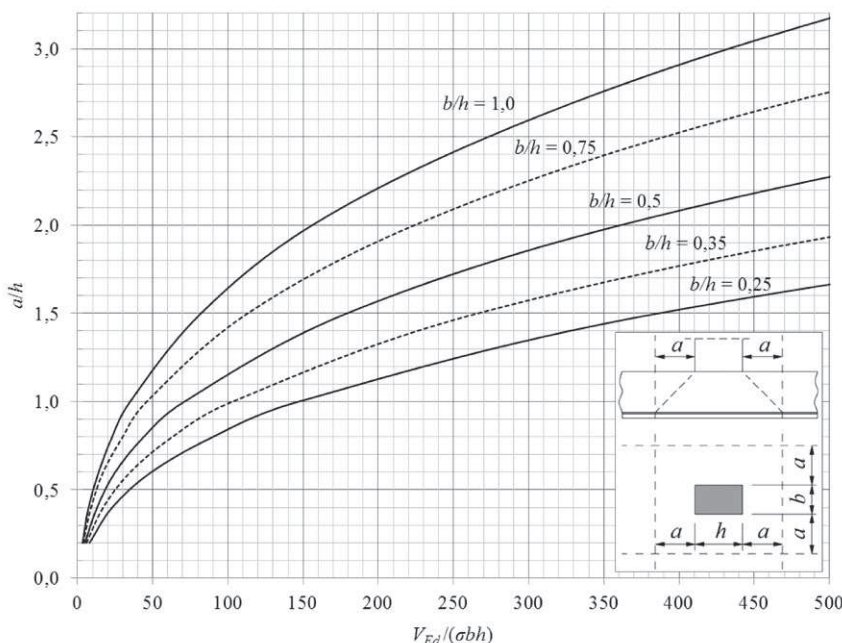
Długość obwodu kontrolnego wynosi

$$u = 2\pi (r + a)$$

a współczynnik Ω według wzoru (5) jest równy

$$\Omega = \frac{(V_{Ed} - \sigma A) a}{u} = \frac{(V_{Ed} - \pi \sigma (r + a)^2) a}{2\pi (r + a)}$$

Rys. 3. Słupy o przekroju prostokątnym – krytyczne wartości stosunku a/h . V_{Ed} oznacza siłę podłużną w słupie, σ – oddziaływanie podłoża na fundament, jeżeli $a/h > 2d/h$, to przyjmuje się $a = 2d$





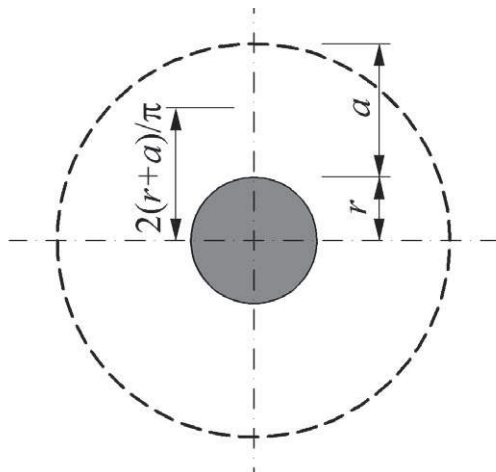
Po kilku przekształceniach stwierdza się, że pochodna tego wyrażenia jest równa zero wtedy, gdy

$$\frac{V_{Ed}}{\pi r^2 \sigma} = 2 \left(\frac{r+a}{r} \right)^3 - \left(\frac{r+a}{r} \right)^2$$

$$\frac{V_{Ed}}{\pi r^2 \sigma} = (1 + 2\alpha_r)(1 + \alpha_r)^2$$

(8)

We wzorze (8) $\alpha = a / r$.

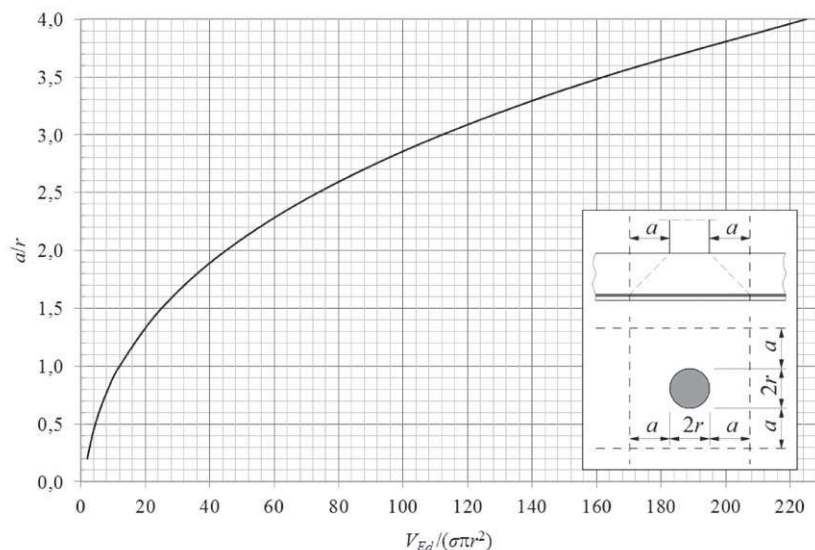


Rys. 4. Obliczanie ze względu na przebicie przez słup o przekroju kołowym – obwód kontrolny i podstawowe oznaczenia

Rozwiązując równanie (8) otrzymano wykres przedstawiony na rysunku 5.

3. Algorytm

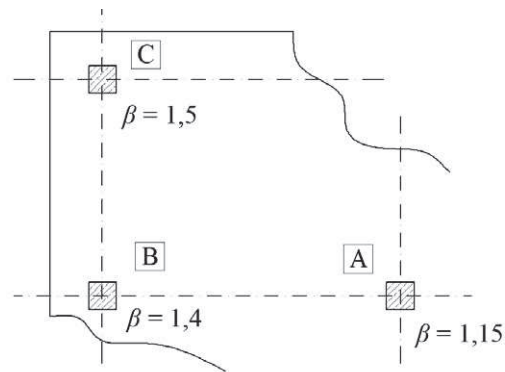
Wykorzystując zależności, które wyprowadzono w p. 2 i stosując przepisy normy [1] można sprawdzenie fundamentu na przebicie wykonać według algorytmu przedstawionego w dwóch tabelach – pierwsza z nich



Rys. 5. Słupy o przekroju kołowym – krytyczne wartości stosunku a/r . V_{Ed} oznacza siłę podłużną w słupie, σ – oddziaływanie podłoża na fundament, jeżeli $a/r > 2d/r$, to przyjmuje się $a = 2d$

dotyczy współczynnika, druga sprawdzania stanu granicznego nośności na przebicie.

Przy obciążeniu mimośrodowym współczynnik β we wzorze na naprężenie styczne przyjmuje wartości większe od jedności. Jeżeli słupy można uznać za usztywnione, to do układów, w których przylegające do siebie przęsła nie różnią się długościami o więcej niż 25%, można stosować wartości β według rysunku 6.



- A – słup wewnętrzny
- B – słup krawędziowy
- C – słup narożny

Rys. 6. Wartości β stosowane do obliczania na przebicie w układach usztywnionych

W innych przypadkach trzeba stosować wzory zestawione w tabeli 1. Wzory umieszczone w punktach 2a i 2b tej tabeli są inne niż wzory (6.41) i (6.42) w normie [1], gdyż wzory w normie dotyczą przypadku, w którym $a = 2d$, a przy sprawdzaniu fundamentów zmienia a najczęściej przybiera inne wartości.

Tak np. do słupa o przekroju kołowym (rys. 4) wzór w punkcie 2b tabeli 1 otrzymuje się zauważając, że środek ciężkości połowy okręgu leży w odległości $2(r+a)/\pi$ od osi środkowej, a więc

$$W = 2 \cdot \pi(r+a) \cdot 2(r+a)/\pi = 4(r+a)^2$$

$$\frac{u}{W} = \frac{2\pi(r+a)}{4(r+a)^2} = 0,5 \frac{\pi}{r+a}$$

co przy $k = 0,6$ prowadzi do wzoru umieszczonego w tabeli.



Tabela 1. Wyznaczanie współczynnika β

1. Zasada ogólna

$$\beta = 1 + k \frac{M_{Ed}}{V_{Ed}} \frac{u}{W}$$

u – długość rozpatrywanego obwodu kontrolnego,
 k – współczynnik równy udziałowi pionowych naprężeń stycznych w przenoszeniu momentu (pozostała część momentu jest przenoszona przez zginanie i skręcanie) wg tabeli w punkcie 2a
 W – wskaźnik oporu plastycznego rozpatrywanego obwodu kontrolnego u

Często odpowiednie będą proste wzory zestawione w punkcie 2.

2a. Słup wewnętrzny, przekrój prostokątny, zginany w jednej płaszczyźnie, cały rozpatrywany obwód kontrolny mieści się w płycie.

Wartość β wyznacza się ze wzoru w punkcie 1, do którego podstawia się

$$W = 0,5h^2 + bh + 2ba + 4a^2 + \pi ah$$

h – wymiar przekroju słupa równoległy do mimośrodów obciążenia,
 k – wg tabeli poniżej

h/b	$\leq 0,5$	1,0	2,0	$\geq 3,0$
k	0,45	0,60	0,70	0,80

2b. Słup wewnętrzny, przekrój kołowy o promieniu r (rys. 4), całe podstawowe pole kontrolne mieści się w płycie

$$\beta = 1 + 0,3 \frac{M_{Ed}}{N_{Ed}} \frac{\pi}{r + a}$$

2c. Słup wewnętrzny, przekrój prostokątny, słup zginany ukośnie względem obu osi przekroju (mimośrodów e_z i e_y), całe podstawowe pole kontrolne mieści się w płycie

$$\beta = 1 + 1,8 \sqrt{\left(\frac{e_y}{b_z}\right)^2 + \left(\frac{e_z}{b_y}\right)^2}$$

e_y i e_z – mimośrodów M_{Edy}/V_{Ed} i M_{Edz}/V_{Ed} odpowiednio wzdłuż osi y i z ,
 b_y i b_z – wymiary obwodu kontrolnego.

4. Przykład – sprawdzenie stopy fundamentowej ze względu na przebicie

Przyjęto, że stopa, kwadratowa w planie, ma wymiary 3,70 · 3,70 m, wysokość 0,9 m, przyjęto $d = 0,83$ m. Przyjęto wymiary słupa 30x40 cm. Beton C30/37, $f_{cd} = 30/1,4 = 21,43$ MPa. Siła V_{Ed} wynosi 3395 kN.

I. Zakłada się, że słup jest słupem wewnętrznym w układzie usztywnionym i według rysunku 6 otrzymuje się $\beta = 1,15$.

Według punktu 1 tabeli 2 oblicza się średnie oddziaływanie podłoża gruntowego na stopę:

Tabela 2. Sprawdzenie na przebicie fundamentów, które nie mają zbrojenia na przebicie

Dane: klasa betonu, kształt konstrukcji, powierzchnia obciążenia, siła w słupie V_{Ed} , pole i średnica zbrojenia rozciąganego fundamentu, σ – nacisk podłoża działający na pole wewnątrz obwodu kontrolnego, pomniejszony o oddziaływanie ciężaru własnego fundamentu i gruntu leżącego na fundamencie.

1. Oblicza się nacisk σ ; dla stóp fundamentowych $\sigma = V_{Ed}/A_F$ (A_F – pole fundamentu).

2. Nośność ze względu na siły styczne na obwodzie słupa u_0 . Oblicza się (podstawiając f_{ck} w MPa): $v = 0,6(1 - f_{ck}/250)$, $v_{Rd,max} = 0,4vf_{cd}$. Wyznacza się współczynnik β według rysunku 6 lub według tabeli 1 (przyjmując $a = 0$). Oblicza się długość obwodu słupa u_0 i $v_{Ed} = \beta V_{Ed}/(u_0 d)$. Sprawdza się wymaganie $v_{Ed} \leq v_{Rd,max}$.

3. Nośność ze względu na siły styczne na krytycznym obwodzie u

a) Oblicza się:
dla słupów o przekroju prostokątnym $V_{Ed}/(bh\sigma)$,
dla słupów o przekroju kołowym $V_{Ed}/(\pi r^2 \sigma)$
i wyznacza się krytyczną wartość a według rysunku 3 lub rysunku 5.

b) Oblicza się:
dla słupów o przekroju prostokątnym

$$V_{Ed,red} = V_{Ed} - \sigma [bh + 2a(b+h) + \pi a^2]$$

dla słupów o przekroju kołowym

$$V_{Ed,red} = V_{Ed} - \pi \sigma (r + a)^2$$

c) Według rysunku 6 lub tabeli 1 wyznacza się współczynnik β (przy obc. osiowym $\beta = 1$) i oblicza się
dla słupów o przekroju prostokątnym $u = 2(b+h+\pi a)$
dla słupów o przekroju kołowym $u = 2\pi(r+a)$

$$v_{Ed} = \frac{\beta V_{Ed,red}}{ud}$$

W powyższym wzorze u oznacza długość obwodu kontrolnego, który leży w odległości a od brzegu słupa.

d) Oblicza się: $v_{Rd} = 0,128k(100\rho_1 f_{ck})^{1/3} \frac{2d}{a}$
lecz nie mniej niż $v_{min} \frac{2d}{a}$ [MPa]

W powyższym wzorze stosuje się wartość a obliczoną według punktu 3a. Inne oznaczenia jak w punkcie 6.4.4 normy [1].

e) Sprawdza się wymaganie $v_{Ed} \leq v_{Rd}$.

$$A_F = 3,70^2 = 13,69 \text{ m}^2 \quad \sigma = \frac{3,395}{13,69} = 0,248 \text{ MPa}$$

Według punktu 2 tabeli 2:

$$v = 0,6(1 - f_{ck}/250) = 0,6(1 - 30/250) = 0,528$$

$$v_{Rd,max} = 0,4vf_{cd} = 0,4 \cdot 0,528 \cdot 21,43 = 4,526 \text{ MPa}$$

$$v_{Ed} = 1,15 \frac{V_{Ed}}{u_0 d} = 1,15 \frac{3,395}{(2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,4) \cdot 0,83} = 3,36 < v_{Rd,max} = 4,526 \text{ MPa}$$

a więc wymaganie normy jest spełnione.



Według punktu 3 tabeli 2

a) Wyznacza się krytyczną wartość a

$$\frac{V_{Ed}}{\sigma_{bh}} = \frac{3,395}{0,248 \cdot 0,30 \cdot 0,40} = 114,1$$

Z wykresu na rysunku 3 dla $b/h = 30/40 = 0,75$ otrzymuje się $a/h = 1,46$,

$a = 1,46h = 1,46 \cdot 0,40 = 0,584 < 2d = 2 \cdot 0,83 \text{ m}$.

b) Efektywna siła

$$\begin{aligned} V_{Ed,red} &= V_{Ed} - \sigma [bh + 2a(b+h) + \pi a^2] = \\ &= 3,395 - 0,248 [0,3(2 \cdot 0,584 + 0,4) + \\ &+ 0,4(2 \cdot 0,584 + 0,3) + 3,1416 \cdot 0,584^2] = \\ &= 3,395 - 0,248 \cdot 2,009 = 2,897 \text{ MN} \end{aligned}$$

c) Słup jest słupem wewnętrznym w układzie usztywnionym i według rysunku 6 otrzymuje się $\beta = 1,15$

$$\begin{aligned} u &= 2(b + h + \pi a) = \\ &= 2(0,3 + 0,4 + 3,1416 \cdot 0,584) = 5,069 \text{ m} \end{aligned}$$

$$v_{Ed} = \beta \frac{V_{Ed,red}}{ud} = 1,15 \frac{2,897}{5,069 \cdot 0,83} = 0,792 \text{ MPa}$$

d) Według punktu 6.4.4 normy

$$k = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} = 1 + \sqrt{\frac{200}{830}} = 1,49$$

Najpierw sprawdza się, czy wystarczająca będzie nośność obliczona bez uwzględniania wpływu zbrojenia podłużnego :

$$v_{min} = 0,035k^{3/2} f_{ck}^{1/2} = 0,035 \cdot 1,49^{1,5} \cdot \sqrt{30} = 0,349 \text{ MPa}$$

$$v_{min} \frac{2d}{a} = 0,349 \frac{2 \cdot 0,830}{0,584} = 0,992 \text{ MPa}$$

e) $v_{Ed} = 0,792 < v_{min} \frac{2d}{a} = 0,992 \text{ MPa}$

a więc wymaganie normy jest spełnione i nie ma potrzeby sprawdzania nośności na przebicie z uwzględnieniem wpływu zbrojenia głównego stopy.

II. Zakłada się, że słup taki sam jak w punkcie I przykładu jest częścią układu usztywniającego budynek. Moment zginający słup wynosi $M_{Ed} = 300 \text{ kNm}$.

Według punktu 2 tabeli 2:

$$u_0 = 2(0,3 + 0,4) = 1,4 \text{ m}$$

Dla $a = 0$ otrzymuje się

$$W = 0,5 \cdot 0,4^2 + 0,3 \cdot 0,4 = 0,20 \text{ m}^3$$

$$\beta = 1 + k \frac{M_{Ed} u_0}{V_{Ed} W} = 1 + 0,633 \frac{0,300 \cdot 1,4}{3,395 \cdot 0,20} = 1,392$$

Wartość $v_{Rd,max}$ jest taka sama jak w części I przykładu

$$\begin{aligned} v_{Ed} &= 1,392 \frac{V_{Ed}}{u_0 d} = 1,392 \frac{3,395}{1,4 \cdot 0,83} = \\ &= 4,066 < v_{Rd,max} = 4,526 \text{ MPa} \end{aligned}$$

i wymaganie normy jest spełnione.

Według punktu 3 tabeli 2

Obliczenie według punktów 3a i 3b są takie same jak w części I przykładu.

Według punktu 3c:

$$\begin{aligned} u &= 2(b + h + \pi a) = \\ &= 2(0,3 + 0,4 + 3,1416 \cdot 0,584) = 5,069 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= 0,5h^2 + bh + 2ba + 4a^2 + \pi ah = \\ &= 0,5 \cdot 0,4^2 + 0,4 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 \cdot 0,584 + 4 \cdot 0,584^2 + \\ &+ 3,1416 \cdot 0,584 \cdot 0,40 = 2,648 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

$$\beta = 1 + k \frac{M_{Ed} u}{V_{Ed} W} = 1 + 0,633 \frac{0,300 \cdot 5,069}{3,395 \cdot 2,648} = 1,107$$

Otrzymało wartość β mniejszą niż w części I, a więc wymagania normy będą spełnione z nadmiarem większym niż w części I przykładu.

5. Podsumowanie

Opracowana przez autorów metoda, przedstawiona w tabelach 2 i 3 i zilustrowana przykładami, pozwala na sprawdzanie ze względu na przebicie w jednym kroku, podobnie jak w stropach, bez iteracyjnego wyznaczania krytycznego obwodu kontrolnego. Metoda jest zgodna z normą [1] i może być stosowana do sprawdzania płyt i stóp fundamentowych pod warunkiem, że obwód kontrolny mieści się w obrębie fundamentu.

BIBLIOGRAFIA

- [1] PN-EN 1992-1-1: 2008/NA: 2010 Eurokod 2: Projektowanie konstrukcji z betonu. Część 1-1: Reguły ogólne i reguły dla budynków
- [2] PN-B-03264:2002. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone, obliczenia statyczne i projektowanie
- [3] Schneider K. J., Bautabellen für Ingenieure mit Berechnungshinweisen und Beispielen. 20. Auflage, Werner Verlag, 2012
- [4] Urban, T. Sitnicki, M. Krakowski, J., O przebicciu żelbetowych płyt krępych. Zeszyty Naukowe Politechniki Rzeszowskiej. Budownictwo i Inżynieria Środowiska, z. 59, nr 3/II, 2012
- [5] Urban T., Komentarz do zasad obliczania fundamentów na przebicie według PN-EN 1992-1-1: 2008/NA: 2010. Inżynieria i budownictwo, nr 3/2011