

Krzysztof WIERZCHOLSKI\*

## OCENA ZATARCIA ŁOŻYSK W ASPEKCIE ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH

### THE APPRECIATION OF BEARING SEIZURE RELATED TO STANDARD DEVIATIONS

#### Słowa kluczowe:

łożyska, prognoza zatarcia, średnia probabilistyczna, odchylenie standardowe

#### Key words:

bearing, seizure, expected utility (EV), standard deviation

#### Streszczenie

Analiza prognozy prawdopodobieństwa wystąpienia zatarcia łożysk ślizgowych i tocznych podczas określonej ilości uruchomień maszyny stanowi istotny element diagnostyki oraz niezawodności eksploatowanych maszyn. Problem ten możemy rozwiązać wyłącznie na bazie teorii prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej z wykorzystaniem danych eksperymentalnych.

Na podstawie informacji o materiałach łożyskowych, obciążeniu, sposobie montażu łożyska, błędach konstrukcyjnych, korozji, zanieczyszczeniach łoży-

---

\* Politechnika Koszalińska, Wydział Technologii i Edukacji, Katedra Mechatroniki i Mechaniki Stosowanej, ul. Śniadeckich 2, 75-453 Koszalin, Polska, tel.: (94 3478344, e-mail: krzysztof.wierzchowski@wp.pl.

ska, przegrzaniu węzła tarcia, drganiach łożyska określić można zakres ogólnego prawdopodobieństwa zatarcia przy dużej ilości uruchomień maszyny.

Niniejsza praca opisuje i wyznacza algorytm prognozowania prawdopodobieństwa ilości zatarcia przy różnej ilości uruchomień wału, ponieważ wiedza na ten temat ma duże znaczenie w teorii niezawodności maszyny. Przeprowadzona analiza związana z wyznaczaniem prawdopodobieństwa zatarcia powiązana jest z określaniem podstawowych parametrów teorii prawdopodobieństwa, takich jak średnia probabilistyczna oraz odchylenie standardowe ilości zatarcia łożyska. Narzędziem badawczym w rozpatrywanych problemach jest rozkład normalny Gaussa.

## WPROWADZENIE

Ogólne wartości prawdopodobieństwa zatarcia  $p_A$ ,  $p_B$ ,  $p_C$ ,  $p_D$  dla typowych nieuszkodzonych łożysk ślizgowych dostarczonych przez producentów, a następnie występujących w trakcie eksploatacji maszyn można przyjąć w zakresie od 0,010 do 0,050 [L. 1]. Wartości te zależą między innymi od prawdopodobieństw:  $p_a$ ,  $p_b$ ,  $p_c$ ,  $p_d$ ,  $p_e$ ,  $p_f$ ,  $p_g$ ,  $p_h$ , ... wywołanych kolejno niewłaściwymi materiałami łożyskowymi, nadmiernym obciążeniem, nieodpowiednim montażem, błędami konstrukcyjnymi, korozją, zanieczyszczeniem, przegrzaniem, drganiami.

Wymienione przyczyny zatarcia mogą być rozłączne lub pomiędzy nimi może zachodzić zasada superpozycji. Dlatego ogólne prawdopodobieństwo  $p$  występowania zatarcia z zakresu  $0 \leq p \leq 1$  można określić w postaci funkcji wielu zmiennych w następującej formie [L. 2–5]:

$$\begin{aligned} p_A &= p_A(p_a, p_b, p_c, \dots, p_h), & p_B &= p_B(p_a, p_b, p_c, \dots, p_h), \\ p_C &= p_C(p_a, p_b, p_c, \dots, p_h), & p_D &= p_D(p_a, p_b, p_c, \dots, p_h) \end{aligned} \quad (1)$$

Odporność na zatarcie można zwiększyć, używając smarów uszlachetnionych reagujących z materiałami pary ciernej, wytwarzając na powierzchniach tarcia warstewki ochronne. Materiały wykazujące niskie tarcie przy współpracy mają również dobrą odporność na zatarcie. Decyduje tutaj niska wytrzymałość na ścinanie i twardość [L. 6–8]. Na podstawie badań literaturowych i doświadczalnych przeprowadzonych dla materiałów łożyskowych pod kątem odporności na zatarcie przyjmujemy, że orientacyjne przedziały wartości prawdopodobieństw mają następujące średnie wartości [L. 8]:

- od 0.005 do 0.010 dla białych metali cynowych, ołowiowych, kadmowych,
- od 0.010 do 0.020 dla brązów ołowiowych i stopów aluminiowych,
- od 0.020 do 0.030 dla brązów cynowych z ołowiem,
- od 0.030 do 0.040 dla spiżu,
- od 0.040 do 0.050 dla mosiądzu,
- od 0.050 do 0.070 dla brązów aluminiowych.

## ROZKŁAD GAUSSA ZMIENNEJ LOSOWEJ ZATARCIA

Ogólne wartości prawdopodobieństwa zatarcia dla typowych nieuszkodzonych łożysk ślizgowych dostarczonych przez producentów, a następnie występujących w trakcie eksploatacji maszyn umożliwiają przyporządkowanie prawdopodobieństw dla dowolnej zmiennej losowej zatarcia.

Jeśli znamy ogólne prawdopodobieństwa zatarcia  $p$  w szczególnym przypadku prawdopodobieństwa  $p_A, p_B, p_C, p_D$  zdefiniowane wzorem (1), to również znamy prawdopodobieństwo braku zatarcia równe  $q = 1 - p$ , ponieważ na mocy ogólnych zasad teorii prawdopodobieństwa  $p + q = 1$  [L. 5].

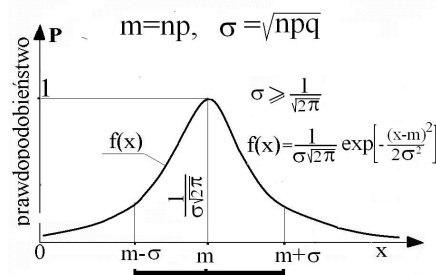
Wtedy prawdopodobieństwo  $p_k$  dla losowego  $x = k$ -krotnego wystąpienia zatarcia w niezależnych wielokrotnych  $n$  próbach  $k \leq n$  uruchomienia maszyny wyznaczyć możemy za pomocą rozkładu normalnego Gaussa [L. 5].

Rozkład normalny Gaussa oznacza prawdopodobieństwo zajścia sukcesów w sposób  $k$ -krotny dla  $k \leq n$  w  $n$  niezależnych próbach (może ich być nieskończenie wiele), jeśli prawdopodobieństwo zatarcia w ogóle jest równe  $p$ , natomiast prawdopodobieństwo braku zatarcia jest równe  $q$ . Wykonujemy bardzo dużo, nawet praktycznie nieskończenie wiele uruchomień maszyny, czyli  $n \rightarrow \infty$ . Zapytujemy o wystąpienie pewnej ilości zatarcia w liczbie  $0, 1, 2, 3, \dots, n-1, n$  w tych przeprowadzonych  $n$ - uruchomieniach łożyska. Prawdopodobieństwo zajścia zatarcia we wskazanych ilościach oznaczmy kolejno przez [L. 5]:  $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n, \dots, p_\infty$ .

Są to rzędne funkcji gęstości prawdopodobieństwa rozkładu normalnego Gaussa zmiennej losowej ciągłej, które można wyznaczyć z następującej funkcji gęstości Gaussa [L. 5]:

$$p_k = f(x = k) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(k - m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (2)$$

gdzie przyjęto następujące oznaczenia:  $m = np$  jest to stała, dla której funkcja gęstości (2) osiąga wartość maksymalną równą  $\sigma^{-1}(2\pi)^{-0.5}$ ,  $\sigma$ -odchylenie standardowe o wartości  $(npq)^{0.5}$ . Funkcja (3) jest pokazana na **Rys. 1**.



**Rys. 1.** Funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla rozkładu normalnego Gaussa zmiennej losowej  $x = k$  zatarcia z uwidocznieniem odchylenia standardowego  $\sigma$  według wzoru (2)

Fig. 1. The Gaussian probability density function for the random variable  $x = k$  of bearing seizure with the visibly standard deviation  $\sigma$  after formula (2)

Ponieważ funkcja (2) przedstawiona wykresem na **Rys. 1** jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa, zatem jej największa wartość  $\sigma^{-1}(2\pi)^{-0.5}$  nie może przekroczyć wartości jeden, a więc ten fakt wymusza ściśle określone wartości odchylenia standardowego  $\sigma$  ujęte następującą nierównością [**L. 2, 5**]:

$$\left(0 \leq \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \leq 1\right) \Rightarrow \left(\sigma \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0.3989\dots\right) \quad (3)$$

### Przykład 1.

Prawdopodobieństwo ogólne zatarcia łożyska podane przez producentów wynosi  $p = 0,0001$ , natomiast tym samym prawdopodobieństwo braku zatarcia  $q = 0,9999$ . Jakie jest prawdopodobieństwo, że na 10 000 uruchomień łożyska nastąpi dwa razy zatarcie?

*Rozwiązanie przykładu 1 metodą rozkładu normalnego*

Rozpatrywany problem określa rozkład normalny Gaussa. Mamy następujące dane:  $p = 0,0001$ ,  $q = 0,9999$ ,  $n = 10\ 000$ ,  $m = np = 10\ 000 \cdot (0,0001) = 1$ ,  $\sigma = (npq)^{0.5} = (10\ 000 \cdot 0,0001 \cdot 0,9999)^{0.5} = 1$ .

Rzędna prawdopodobieństwa  $p_2$  określającą dwukrotne zatarcie, czyli  $x = 2$  podczas  $n = 10000$  niezależnych uruchomień wału, gdy prawdopodobieństwo ogólne zatarcia  $p = 0,0001$  oraz braku zatarcia  $q = 0,9999$  obliczamy ze wzoru (2), który po podstawieniu wymienionych powyżej danych przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} p_2 = f(x=2) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right]_{x=2} = \\ &= \frac{1}{1 \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(2-1)^2}{2 \cdot 1^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\right] = 0.241\dots \end{aligned} \quad (4)$$

Uzyskany wzorem (4) wynik świadczy o tym, że prawdopodobieństwo dwukrotnego zatarcia łożyska w trakcie 10 000 uruchomień maszyny wynosi 0,241.

### NUMERYCZNA PROGNOZA WARTOŚCI ZATARĆ

Analiza numeryczna prawdopodobieństw dla określonej ilości zatarć będzie przeprowadzona z wykorzystaniem rozkładu normalnego Gaussa (2) dla podanej ilości uruchomień maszyny przy jednoczesnym wyznaczeniu wartości średniej probabilistycznej  $m$  oraz odchylenia standardowego  $\sigma$ .

Wartość średniej probabilistycznej rozkładu normalnego Gaussa jest postaci:  $m = np$ . Rośnie ze wzrostem iloczynu ilości uruchomień maszyny  $n$  przez prawdopodobieństwo ogólne  $p = p_A$  lub  $p = p_B, \dots$  dla występujących zdarzeń zatarcia. Wartości średniej probabilistycznej  $m_A = np_A, m_B = np_B, \dots$  określają średnią ilość zdarzeń zatarcia, dla których prawdopodobieństwo określiliśmy funkcją gęstości (2) w rozpatrywanych uruchomieniach maszyny.

Analizowane odchylenie standardowe jest arytmetycznym pierwiastkiem kwadratowym z różnicy pomiędzy średnią probabilistyczną z kwadratu zmiennej losowej zatarcia a kwadratem średniej probabilistycznej zmiennej losowej tego zatarcia. Po wykonaniu obliczeń uzyskujemy odchylenie standardowe jako pierwiastek kwadratowy z iloczynu średniej probabilistycznej zatarcia przez prawdopodobieństwo braku zatarcia  $q = 1 - p$ . Odchylenie standardowe jest więc przedziałem wokół wartości średniej probabilistycznej, w którym koncentruje się największa ilość zachodzących zdarzeń zatarcia podczas wykonywanych doświadczeń. W **Tab. 1** i **2** przedstawiono wyniki analizy numerycznej na podstawie rozkładu normalnego Gaussa (2). **Rys. 2** prezentuje graficznie wyniki obliczeń numerycznych zawartych w **Tab. 1**.

**Tabela 1. Prognozowane wartości prawdopodobieństw  $p_k(p_A), p_k(p_B), p_k(p_C), p_k(p_D)$  dla  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  przypadków zatarcia przy 100 uruchomieniach łożyska dla najbardziej typowych prawdopodobieństw ogólnych  $p_A, p_B, p_C, p_D$ , ich średnich probabilistycznych  $m_A = 1, m_B = 2, m_C = 3, m_D = 4$  oraz odchyłeń standardowych  $\sigma_A=0.994, \sigma_B=1.400, \sigma_C=1.705, \sigma_D=1.959$**

Table 1. Probability values  $p_k(p_A), p_k(p_B), p_k(p_C), p_k(p_D)$  for seizing  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  during 100 starts of machine where we take typical general probabilities  $p_A, p_B, p_C$  their EV values  $m_A, m_B, m_C, m_D$  and their standard deviations  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$

n	k	$p_A,$ $m_A$ $\sigma_A$	$p_k(p_A)$	$p_B,$ $m_B$ $\sigma_B$	$p_k(p_B)$	$p_C,$ $m_C$ $\sigma_C$	$p_k(p_C)$	$p_D,$ $m_D$ $\sigma_D$	$p_k(p_D)$
100	0	0.01 0 1.00 0 0.99 4	0.2419	0.020 2.000 1.400	0.1026	0.030 3.000 1.705	0.0497	0.040 4.000 1.959	0.0253
100	1	0.01 0 1.00 0 0.99 4	<b>0.4013</b>	0.020 2.000 1.400	0.2207	0.030 3.000 1.705	0.1175	0.040 4.000 1.959	0.0630
100	2	0.01 0 1.00 0 0.99 4	0.2419	0.020 2.000 1.400	<b>0.2849</b>	0.030 3.000 1.705	0.1969	0.040 4.000 1.959	0.1209

100	3	0.01 0 1.00 0 0.99 4	0.0532	0.020 2.000 1.400	0.2207	0.030 3.000 1.705	<b>0.2339</b>	0.040 4.000 1.959	0.1787
100	4	0.01 0 1.00 0 0.99 4	0.0041	0.020 2.000 1.400	0.1026	0.030 3.000 1.705	0.1969	0.040 4.000 1.959	<b>0.2036</b>
100	5	0.01 0 1.00 0 0.99 4	0.0004	0.020 2.000 1.400	0.0286	0.030 3.000 1.705	0.1175	0.040 4.000 1.959	0.1787

Na mocy wzorów (2) wyznaczone zostały w **Tab. 1** wartości oczekiwane i odchylenia standardowe dla rozpatrywanych czterech rodzajów łożysk A, B, C, D:  $m_A = np_A = 100 \cdot 0,010 = 1,000$ ,  $m_B = np_B = 100 \cdot 0,020 = 2,000$ ,  $m_C = np_C = 100 \cdot 0,030 = 3,000$ ,  $m_D = np_D = 100 \cdot 0,040 = 4,000$ , oraz

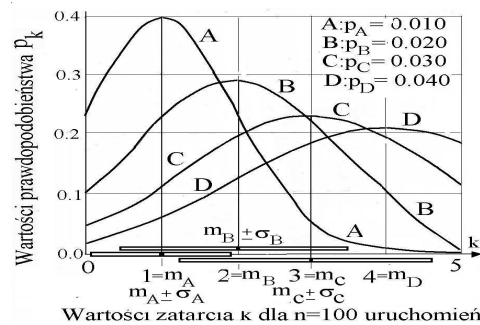
$$\begin{aligned}
 \sigma_A &= [np_A(1-p_A)]^{0,5} = [1,000(1-0,010)]^{0,5} = 0,994, \\
 \sigma_B &= [np_B(1-p_B)]^{0,5} = [2,000(1-0,020)]^{0,5} = 1,400, \\
 \sigma_C &= [np_C(1-p_C)]^{0,5} = [3,000(1-0,030)]^{0,5} = 1,705, \\
 \sigma_D &= [np_D(1-p_D)]^{0,5} = [4,000(1-0,040)]^{0,5} = 1,959
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

**Tabela 2. Prognozowane wartości prawdopodobieństw  $p_k(p_A)$ ,  $p_k(p_B)$ ,  $p_k(p_C)$ ,  $p_k(p_D)$  dla  $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  przypadków zatarcia przy 500 uruchomieniach łożyska dla najbardziej typowych prawdopodobieństw ogólnych  $p_A, p_B, p_C, p_D$ , ich średnich probabilistycznych  $m_A = 2,225$ ,  $m_B = 3,130$ ,  $m_C = 3,3814$ ,  $m_D = 4,382$  oraz odchyłeń standardowych  $\sigma_A = 5,0$ ,  $\sigma_B = 10,0$ ,  $\sigma_C = 15,0$ ,  $\sigma_D = 20,0$**

Table 2. Probability values  $p_k(p_A)$ ,  $p_k(p_B)$ ,  $p_k(p_C)$ ,  $p_k(p_D)$  for seizing  $k = 0, 1, 2, 3, 4$  during 500 starts of machine where we take typical general probabilities  $p_A, p_B, p_C$  their EV values  $m_A, m_B, m_C, m_D$  and their standard deviations  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C, \sigma_D$

n	k	$p_A,$ $m_A$ $\sigma_A$	$p_k(p_A)$	$p_B,$ $m_B$ $\sigma_B$	$p_k(p_B)$	$p_C,$ $m_C$ $\sigma_C$	$p_k(p_C)$	$p_D,$ $m_D$ $\sigma_D$	$p_k(p_D)$
500	0	0.010 5.000 2.225	0.0143	0.020 10.00 3.130	0.0007	0.030 15.00 3.814	0.0000	0.040 20.00 4.382	0.0000
500	1	0.010 5.000 2.225	0.0356	0.020 10.00 3.130	0.0020	0.030 15.00 3.814	0.0001	0.040 20.00 4.382	0.0000

500	2	0.010 5.000 2.225	0.0722	0.020 10.00 3.130	0.0048	0.030 15.00 3.814	0.0003	0.040 20.00 4.382	0.0000
500	3	0.010 5.000 2.225	0.1197	0.020 10.00 3.130	0.0104	0.030 15.00 3.814	0.0007	0.040 20.00 4.382	0.0000
500	4	0.010 5.000 2.225	0.1621	0.020 10.00 3.130	0.0202	0.030 15.00 3.814	0.0016	0.040 20.00 4.382	0.0001
500	5	0.010 5.000 2.225	<b>0.1793</b>	0.020 10.00 3.130	0.0355	0.030 15.00 3.814	0.0033	0.040 20.00 4.382	0.0002



**Rys. 2. Graficzna ilustracja wyników numerycznych podanych w Tabeli 1**  
 Fig. 2. Graphical illustration of numerical results presented in **Table 1**

Wartości  $m_A$ ,  $m_B$ ,  $m_C$ ,  $m_D$  przedstawiają średnią probabilistyczną ilość zdarzeń zatarcia łożysk A, B, C, D w trakcie 100 uruchomień maszyny. Wartości  $\sigma_A$ ,  $\sigma_B$ ,  $\sigma_C$ ,  $\sigma_D$  oznaczają odchylenia standardowe zdarzeń zatarcia przyporządkowane łożyskom A, B, C, D. Odchylenia te obrazują przedziały, w których ilość występującego zatarcia  $x = k$  może się wahać, przyjmując wartości zawarte wewnątrz tych przedziałów wokół średniej probabilistycznej zdarzeń zatarcia. Przedziały te dla poszczególnych typów łożysk dla obliczeń podanych w **Tabeli 1** oraz prezentowanych graficznie na **Rys. 2** są następujące:

$$\begin{aligned}
 m_A - \sigma_A < k < m_A + \sigma_A &\leftrightarrow 0,006 < k < 1,994, \\
 m_B - \sigma_B < k < m_B + \sigma_B &\leftrightarrow 0,600 < k < 3,400, \\
 m_C - \sigma_C < k < m_C + \sigma_C &\leftrightarrow 1,295 < k < 4,705, \\
 m_D - \sigma_D < k < m_D + \sigma_D &\leftrightarrow 2,041 < k < 5,959.
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że wzrost ilości zatarć łożyska na 100 uruchomień odznacza się najpierw wzrostem do pewnej maksymalnej wartości, a następnie spadkiem prawdopodobieństw wystąpienia zatarcia. Wzrost średniej probabilistycznej wystąpienia zatarcia, wraz ze wzrostem odchylenia

standardowego przy ustalonej ilości 100 uruchomień łożyska, powoduje zmniejszanie się prawdopodobieństw poszczególnych ilości zatarć.

Wzrost ilości uruchomień łożyska przy zachowaniu stałej wartości średniej probabilistycznej zatarcia wraz z odchyleniem standardowym powoduje zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia zdarzeń zatarcia.

## WNIOSKI

1. W niniejszej pracy przyporządkowane zostały na drodze eksperymentalnej ogólne prawdopodobieństwa zatarcia łożysk dla rozpatrywanych materiałów łożyskowych.
2. Z wykorzystaniem uzyskanych prawdopodobieństw ogólnych oraz rozkładu normalnego Gaussa wyznaczono algorytm do obliczania prawdopodobieństw wybranej ilości zatarć przy obranych dowolnie ilościach uruchomień maszyny w powiązaniu z wartościami średnich probabilistycznych zatarcia oraz z uwzględnieniem odchyłeń standardowych.
3. Przeprowadzona analiza numeryczna wartości prawdopodobieństwa występowania zdarzeń zatarcia w łożysku jest ściśle związana z ilością uruchomień maszyny oraz zależy od wartości ogólnego prawdopodobieństwa zatarcia uzależnionego algorytmami (1) między innymi od materiałów łożyskowych.

## LITERATURA

1. Bhushan B.: Nanotribology and nanomechanics of MEMS/NEMS and BioMEMS/BioNEMS materials and devices, *Microelectronic Engineering*, 2007, 84, pp. 387–412.
2. Fisz M.: *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN Warszawa 1958.
3. Gnienenko B., Chinczyn A.: *Elementarny wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. PWN, Warszawa 1965.
4. Grądkowski P.: *Aprioryczna ocena niezawodności segmentowych łożysk wzdłużnych podpartych zespołami sprężyn śrubowych*. Akademia Górniczo-Hutnicza (rozprawa doktorska), Kraków 2011.
5. Hellwig Z.: *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*. PWN, Warszawa 1965.
6. Jang G.H., Seo C.H., Ho Scong Lee: Finite element model analysis of an HDD considering the flexibility of spinning disc-spindle, head-suspension-actuator and supporting structure, *Microsystem Technologies*, 2007, 13, pp. 837–847.
7. Młynarczak M., Wasiaś Z.: *Podstawy eksploatacji remontów maszyn*. Wrocław 2009: [www://marek.mlynarczak@pwr.wroc.pl](http://www://marek.mlynarczak@pwr.wroc.pl).
8. Yang L.J.: A test methodology for the determination of wear coefficient, *Wear*, 2005, 259, pp. 1453–1461.



### Summary

The analysis of the seizing prognosis for slide and rolling bearings during the numbers of starts of a machine constitute the important element of diagnostic and machine operational reliability. This problem can be solved only on the basis of mathematical probability and statistics, simultaneously using experimental data. In this paper, an attempt is made to determine the seizing probability values during the starts and stops of a machine depended on bearing material, bearing load, bearing montage, errors of construction, corrosion, mechanical impurities, bearing superheating, and vibrations. The paper describes and determines the prognosis algorithm for the seizing probability number of a bearing for various starts of engine, because such knowledge has numerous applications in machine operational reliability. The performed analysis of the seizing probability determination is compactly connected with the fundamental parameters of the probability theory, such as expected value (EV), with the standard deviation of seizing. The distribution of the Gaussian density function constitutes the main tool used to resolve this problem in this paper.