MINUT 2020 (3), s. 52–60
ISSN 2719-3063

Alicja SAMULEWICZ[1], Andrzej STAROSOLSKI[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Dwa spojrzenia na nieskończoność

Streszczenie. Z nieskończonością spotykamy się bardzo często w wielu działach matematyki. Celem tego artykułu jest przybliżenie Czytelnikowi, czym właściwie jest ta nieskończoność, a raczej czym są *te* nieskończoności.

Słowa kluczowe: nieskończoność, równoliczność.

1. Wstęp

Ponieważ artykuł ten jest skierowany przede wszystkim do zainteresowanych matematyką studentów szeroko pojętych nauk ścisłych i technicznych, autorzy proszą znawców tematu o wyrozumiałość ze względu na celowe odejście od formalnego i precyzyjnego języka zapisu na korzyść opisu bardziej intuicyjnego i metajęzykowego, dodatkowo zawężonego do zakresu omawianego materiału.

Pierwsze spotkanie Czytelnika z nieskończonością prawdopodobnie miało miejsce na gruncie analizy („ciąg dąży do nieskończoności") lub teorii mnogości („zbiór jest nieskończony") i na tych dwu zakresach skupimy się w tym opracowaniu.

2. ∞

W analizie rzeczywistej nieskończoność traktowana jest jako „liczba większa od wszystkich innych" i, co zaskakujące, mimo że formalnie taka nieskończoność nie jest liczbą, jest to dość poprawne podejście. „Dość" poprawne, ponieważ nie opisuje struktury zbioru, który powstaje przez dorzucenie do zbioru liczb rzeczywistych dwóch nowych obiektów: ∞ i $-\infty$. (Zwróćcie, proszę, uwagę: „$-\infty$" nie jest „rezultatem odejmowania nieskończoności od zera", tylko jest samodzielnym, złożonym z dwóch znaków, symbolem pewnego dodatkowego obiektu, który dołączamy do liczb rzeczywistych.)

Czym jest ta „struktura", której nam brakuje? Otóż na zbiorze liczb rzeczywistych klasycznie określa się dwa typy struktur: algebraiczną (związaną z dodawaniem, mnożeniem) i topologiczną (związaną ze

Autor korespondencyjny: A. Starosolski (Andrzej.Starosolski@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 28.02.2021.

zbieżnością ciągów, otwartością zbiorów itd.). I choć rozszerzanie struktury algebraicznej może się wydawać bardziej naturalne, to właśnie struktura topologiczna pozwoli nam wygodnie opisać „zbieżność do nieskończoności" i tym podobne zagadnienia.

Strukturę topologiczną można by opisywać przez granice ciągów, ale ponieważ chcemy przy okazji przybliżyć jak rozumiemy te granice, wybierzemy drugą drogę – opiszemy strukturę topologiczną poprzez zbiory otwarte. Rozważana przez nas topologia nosi nazwę *euklidesowej* i jest najczęściej stosowaną topologią w analizie i geometrii.

Co to jest odcinek (przedział) otwarty, to wiemy. *Zbiór otwarty* to suma dowolnie wielu odcinków otwartych. Zgodnie z tą definicją zbiorami otwartymi są wszystkie przedziały postaci (a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$, ale także np. zbiory $(-1, 3) \cup (4, 5) \cup (5, 7)$ i $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. *Otoczeniem otwartym* liczby nazywamy dowolny zbiór otwarty, do którego należy ta liczba. Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych nazywamy *topologią* i oznaczamy ją przeważnie symbolem τ, a zbiór z określoną na nim topologią nazywamy *przestrzenią topologiczną* i oznaczamy (w naszym wypadku) $(\mathbb{R}, \tau)$. Przyjmijmy więc $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Naszym zadaniem jest opisanie przestrzeni topologicznej $(\bar{\mathbb{R}}, \bar{\tau})$, tak by była zgodna ze zbieżnością ciągów rozumianą tak jak w definicjach poniżej.

Definicja 1. *Mówimy, że liczba rzeczywista g (nie nieskończoność!) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że dla każdego $n \geq N$ zachodzi $g - \varepsilon \leq a_n \leq g + \varepsilon$.*

Łatwo zauważyć, że powyższy warunek jest równoważny następującej definicji:

Definicja 2. *Mówimy że liczba rzeczywista g (nie nieskończoność!) jest granicą ciągu (a_n) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego otoczenia otwartego U liczby g istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że $a_n \in U$ dla każdego $n \geq N$.*

Dowód równoważności polega na spostrzeżeniu, że skoro zbiór U składa się z odcinków otwartych, to jest wśród nich taki, do którego należy g. Powiedzmy, że jest to odcinek $(g - \alpha, g + \beta)$ dla pewnych dodatnich liczb rzeczywistych α i β. Jeśli za ε przyjmiemy mniejszą z nich (tzn. $\varepsilon = \min\{\alpha, \beta\}$), to natychmiast dostajemy równoważność definicji.

Definicja 3. *Mówimy, że ciąg (a_n) dąży*[1] *do ∞, jeśli dla każdego ε istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że dla wszystkich $n > N$ zachodzi $\varepsilon < a_n$.*

Aby podać topologiczną definicję zbieżności do nieskończoności, musimy wreszcie zdefiniować otoczenia otwarte ∞, czyli zbiory otwarte, do których należy ∞.

Zdefiniujmy więc: każde otoczenie otwarte ∞ jest sumą pewnego zbioru otwartego w $\mathbb{R}$, dowolnej półprostej prawej otwartej (r, ∞) i zbioru $\{\infty\}$.

Definicja 4. *Mówimy, że ciąg (a_n) dąży do ∞, jeśli dla każdego zbioru otwartego U, do którego należy ∞, istnieje $N \in \mathbb{N}$, takie że dla wszystkich $n > N$ zachodzi $a_n \in U$.*

Dowód równoważności definicji 3 i 4 polega na spostrzeżeniu, że rolę ε z definicji 3 pełni w definicji 4 taka liczba r, że półprosta (r, ∞) zawiera się w U.

Dla $-\infty$ otoczenia otwarte definiujemy analogicznie, ale z użyciem półprostej lewej.

[1] Wielu powie, że „ciąg jest rozbieżny do nieskończoności".

Dobrze – zdefiniowaliśmy strukturę topologiczną na $\bar{\mathbb{R}}$, ale ciągle możemy nie czuć o co w niej chodzi. Może zatem warto na tę strukturę (a więc i na ∞ i $-\infty$) spojrzeć w inny, równoważny sposób.

Rozważmy odcinek domknięty $[-\pi/2, \pi/2]$ i na nim topologię: U jest otwarty w $[-\pi/2, \pi/2]$, jeśli jest śladem zbioru otwartego w $\mathbb{R}$, to znaczy, jeśli istnieje W – zbiór otwarty w $\mathbb{R}$, taki że $U = W \cap [-\pi/2, \pi/2]$. Równoważnie, co łatwo zobaczyć, powiemy, że U jest otwarty w $[-\pi/2, \pi/2]$, jeśli jest sumą pewnej ilości odcinków otwartych zawartych w $[-\pi/2, \pi/2]$, pewnej ilości odcinków $(r, \pi/2]$ dla $r \in (-\pi/2, \pi/2)$ i pewnej ilości odcinków $[-\pi/2, r)$ dla $r \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Mamy więc strukturę topologiczną odcinka domkniętego $[-\pi/2, \pi/2]$ i przy jej pomocy możemy (równoważnie) zdefiniować strukturę topologiczną zbioru $\bar{\mathbb{R}}$.

Określmy funkcję $f : [-\pi/2, \pi/2] \to \bar{\mathbb{R}}$ jak następuje:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{gdy } x \in (-\pi/2, \pi/2) \\ \infty & \text{gdy } x = \pi/2 \\ -\infty & \text{gdy } x = -\pi/2. \end{cases}$$

Jest to funkcja różnowartościowa (różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości), dziedziną jej jest cały zbiór $[-\pi/2, \pi/2]$, a jej wartościami są wszystkie elementy zbioru $\bar{\mathbb{R}}$. Zauważmy też, że f przeprowadza odcinki otwarte (r, s) na odcinki otwarte $(\operatorname{tg} r, \operatorname{tg} s)$, odcinki $[\pi/2, r)$ na odcinki $[-\infty, \operatorname{tg} r)$, a odcinki $(r, \pi/2]$ na odcinki $(\operatorname{tg} r, \infty]$. W związku z tym funkcja ta pozwala przeprowadzić topologię odcinka $[-\pi/2, \pi/2]$ na topologię na $\bar{\mathbb{R}}$ w następujący sposób:

Zbiór U jest otwarty w $\bar{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f^{-1} przekształca go na zbiór otwarty w $[-\pi/2, \pi/2]$.[2] Równoważnie: zbiór W jest otwarty w $[-\pi/2, \pi/2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy f przeprowadza go na zbiór otwarty w $\bar{\mathbb{R}}$.

Na powyższą tezę możecie spojrzeć jak na definicję otwartości zbioru w $\bar{\mathbb{R}}$ (jeśli nie zdefiniowaliście tam wcześniej topologii) lub jak na twierdzenie, jeśli już macie topologię.

Zauważmy jeszcze jedną własność powyższej funkcji f.

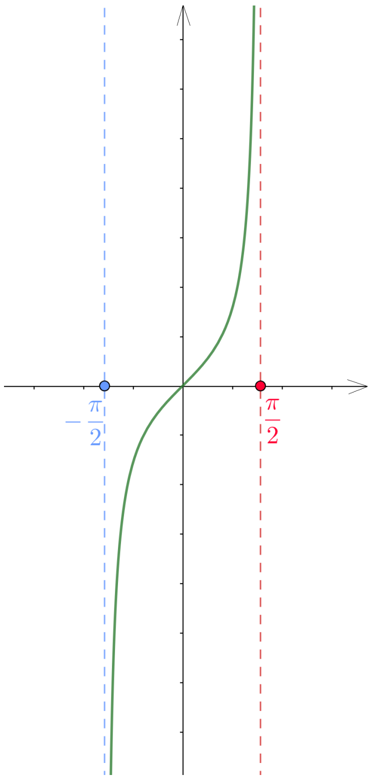
Ciąg (a_n) punktów odcinka $[-\pi/2, \pi/2]$ dąży do $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(f(a_n))$ dąży do $f(x)$. Gdy przeczytamy tę własność w drugą stronę, dostajemy: ciąg (b_n) liczb rzeczywistych (uwaga, tu *de facto* jako wyrazy ciągu mogłyby też występować ∞ lub $-\infty$) jest zbieżny do $x \in \bar{\mathbb{R}}$ wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg $(f^{-1}(b_n))$ jest zbieżny do $f^{-1}(x)$.

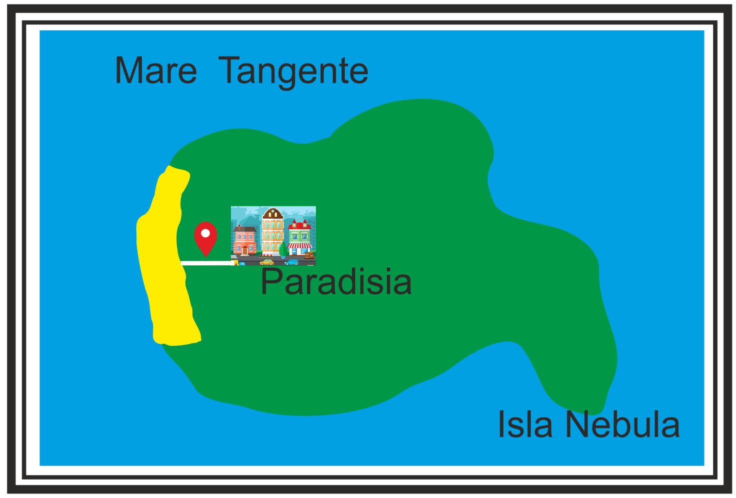
Wszystkie powyższe rozważania prowadzą do następującego nieformalnego wniosku: **jeśli chodzi o zbieżność ciągów, to $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$ możemy traktować jak zwykły odcinek domknięty prostej rzeczywistej.**

Jak to możliwe? Spróbujemy to wytłumaczyć przez analogię.

Wyobraźmy sobie, że natrafiliśmy ogłoszenie o willi do wynajęcia na pięknej tropikalnej wyspie Nebula. Cena jest wyjątkowo atrakcyjna, na wyspę można dolecieć samolotem, a właściciel oferuje bezpłatny transport śmigłowcem z lotniska do posiadłości. Rzucamy okiem na dołączoną do ogłoszenia mapę, na której widzimy, że willa znajduje się blisko nadmorskiej plaży i w podobnej odległości od miasteczka Paradisia, w którym można zrobić zakupy czy zjeść kolację w restauracji. Zachwyceni ofertą wynajmujemy willę na dwa tygodnie i kupujemy bilety na samolot. Na miejscu okazuje się, że do plaży jest rzeczywiście około 80 metrów. W poziomie. Na mapie nie było widać, że posiadłość jest położona na półce skalnej

[2] f^{-1} oznacza tu funkcję odwrotną do f, tzn. taką, że $f^{-1}(y) = x \iff y = f(x)$.





Wykres funkcji tangens dla $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ i plan wyspy dołączony do ogłoszenia z historyjki o Isla Nebula.

w połowie wysokości klifu, ponad 100 metrów nad poziomem morza... Zarówno na plażę, jak i do miasteczka można się dostać tylko śmigłowcem albo pieszo po wąskiej ścieżce, która wije się po zboczu. Oznacza to, że droga na plażę jest zacznie dłuższa niż sugerowałaby to mapa. Wyobraźmy sobie teraz, że ścieżka wije się coraz bardziej w miarę zbliżania się (w poziomie) do brzegu i trzeba pokonywać coraz dłuższą drogę żeby znaleźć się o metr bliżej morza; tak samo jest w przypadku drogi do miasteczka. Załóżmy, że każdej liczbie $x \in (-80, 80)$ odpowiada dokładnie jeden punkt na ścieżce, oddalony od willi w poziomie o $|x|$ metrów, przy czym liczbom ujemnym przypisujemy punkty na trasie prowadzącej w kierunku morza, a dodatnim — punkty na drodze do Paradisii. Przyjmijmy, że od punktu odpowiadającego liczbie x_1 do punktu odpowiadającego liczbie x_2 musimy przemierzyć $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{160} \cdot x_1\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{160} \cdot x_2\right)\right|$ metrów. W efekcie zarówno plaża, jak i miasteczko stają się nieosiągalne dla osoby idącej pieszo z posiadłości! Długość drogi z willi na plażę staje się nieskończona, chociaż odległość w poziomie wynosi zaledwie 80 metrów i nie stanowi problemu dla śmigłowca; to samo dotyczy drogi do Paradisii. (Na pocieszenie mamy piękny widok na morze, basen w ogrodzie, świetnie zaopatrzoną spiżarnię i obietnicę transportu na lotnisko po upływie dwóch tygodni, więc długość dróg na plażę i do miasteczka jest jedyną niedogodnością.)

W tej historii plaża odpowiada liczbie $-\frac{\pi}{2}$ w $[-\pi/2, \pi/2]$ (dla lecącego śmigłowcem) i $-\infty$ w $\bar{\mathbb{R}}$ (dla piechura), a Paradisia — liczbie $\frac{\pi}{2}$ w $[-\pi/2, \pi/2]$ i ∞ w $\bar{\mathbb{R}}$.

Uwaga 1. Licząc granice ciągów często spotykamy się z symbolami $[\infty + \infty]$, $[\infty - \infty]$, $[\infty/a]$, $[\infty \cdot 0]$, itd. Symbole te są nazywane symbolami oznaczonymi i nieoznaczonymi. Właśnie **symbolami**, ponieważ rozszerzenie działań (struktury algebraicznej, o której mówiliśmy wcześniej) z $\mathbb{R}$ na $\bar{\mathbb{R}}$ z zachowaniem zgodności granic ciągów jest niemożliwe, wymagałoby bowiem np. jednoznacznego określenia rezultatu dodawania $\infty + (-\infty)$, a wiemy, że jeśli ciąg (a_n) dąży do nieskończoności, (b_n) do $-\infty$, to ciąg $(a_n + b_n)$ może dążyć do dowolnej liczby rzeczywistej, do którejś z nieskończoności lub być rozbieżny — nie można więc zgodnie z granicami ciągów określić wyniku dodawania $\infty + (-\infty)$.

3. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, ... ω_0, ω_1, ... , $\aleph_0$, $\aleph_1$, ...

Zastanówmy się najpierw czym jest liczba 5. Po chwili okaże się, że prawdopodobnie nie potraficie odpowiedzieć precyzyjnie – i dobrze! Zdefiniujemy więc sobie 5 – najpierw dorzucając „niewłaściwy" obiekt do standardowego świata matematycznego. Możemy powiedzieć, że 5 to *jedyna wspólna cecha wszystkich zbiorów pięcioelementowych*. Ta definicja, choć już coś mówiąca, ma trzy wady:

1) odwołuje się do pojęcia „cechy", o którym nie wiemy co dokładnie ma znaczyć,

2) odnosi się do „wszystkich zbiorów" mających tę cechę (nie wchodząc w szczegóły – choć nie wiemy czym jest *zbiór*, to o niektórych obiektach wiemy, że to są zbiory, o niektórych wiemy, że zbiorami nie są, bo są „za duże" – są *klasami właściwymi*),

3) wykorzystuje pojęcie „zbioru pięcioelementowego", a nie wiemy jak go zdefiniować, zwłaszcza jeśli nie możemy posłużyć się liczbą 5.

Możemy uciec od kłopotu 1) próbując definiować 5 jako klasę wszystkich zbiorów pięcioelementowych. Tu już jest lepiej, ale zostają jeszcze 2) i 3), przy czym z kłopotem 3) za chwilę sobie poradzimy, a na koniec kłopot 2) ominiemy przedefiniowując jeszcze raz liczbę 5.

Aby zdefiniować 5 chcemy zdefiniować pojęcie „zbiór pięcioelementowy" (w rozumieniu wyróżnienia zbiorów pięcioelementowych spośród wszystkich zbiorów). Narzuca się „zbiór jest pięcioelementowy, jeśli ma 5 elementów" – no fajnie, ale my właśnie to „5" chcemy zdefiniować, zaproponuję więc Wam inną definicję: „zbiór jest pięcioelementowy, jeśli ma *tyle samo* elementów ile zbiór palców mojej prawej ręki (w chwili gdy to piszę)".

— Dobrze, — powiecie — tylko co to znaczy: „mieć tyle samo elementów"?

Wreszcie możemy zdefiniować coś formalnie.

Mówimy, że zbiory A i B *mają tyle samo elementów* lub, że *są równoliczne*, jeśli istnieje funkcja $g : A \to B$ taka, że:

1) g jest różnowartościowa, czyli różnym argumentom przyporządkowuje różne wartości,

2) każdy element zbioru B jest wartością funkcji g.

Takie funkcje nazywamy *bijekcjami*. Zwróćcie uwagę, że funkcja f z poprzedniego rozdziału była bijekcją!

W przypadku zbiorów skończonych (ich definicję podamy za chwilę) równoliczność dwóch zbiorów oznacza, że mają one tę samą liczbę elementów. Jeśli chcemy rozważać również zbiory nieskończone, zamiast o liczbie elementów będziemy mówić o *mocy zbioru*. Moc zbioru jest uogólnieniem pojęcia liczby elementów i także jest pewnego rodzaju liczbą (tzw. liczbą kardynalną), chociaż dla zbiorów nieskończonych nie jest to liczba naturalna ani nawet rzeczywista. Definicja równoliczności jest kluczowa dla teorii mocy i pozwala nam (przy pewnych założeniach co do „świata matematycznego", w którym pracujemy) porównywać moce zbiorów między sobą.

Mówimy, że zbiór A jest nie mniej liczny niż zbiór B, jeśli istnieje bijekcja z B na pewien podzbiór zbioru A. (Uwaga: ma być to funkcja „w A", niekoniecznie „na A". Różnica polega na tym, że nie wszystkie elementy A muszą być wartościami funkcji.)

Formalne zdefiniowanie liczby 5 odłożymy sobie na „za chwilę", a teraz zajmijmy się wnioskami z definicji równoliczności. Wracamy do funkcji $\mathrm{tg} : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Jest to niewątpliwie bijekcja, czyli odcinek $(-\pi/2, \pi/2)$ jest równoliczny z prostą rzeczywistą.

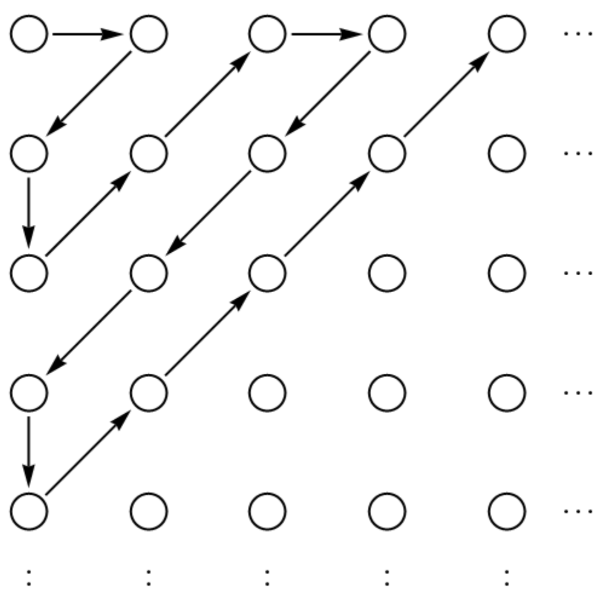
— Halo! — powiecie. — Jak to? Przecież $\mathbb{R}$ ma więcej elementów niż $(-\pi/2, \pi/2)$, bo choćby liczba 2 jest w $\mathbb{R}$, a nie ma jej w $(-\pi/2, \pi/2)$, czyli w $\mathbb{R}$ jest przynajmniej o jeden element więcej!

Otóż nie! To, że jeden zbiór zawiera drugi i jeszcze inne elementy, nie znaczy, że ma ich więcej – w świetle naszej definicji może mieć ich tyle samo, a żeby przekonać się „bardziej namacalnie", spójrzmy na takie rozumowanie:

Wyobraźmy sobie zaczynający się w pewnym miejscu nieskończony prosty chodnik z dużych płyt ułożonych jedna za drugą. Na każdej płycie, plecami w stronę początku chodnika, stoi człowiek – jest więc tyle samo ludzi co płyt. Teraz wszyscy naraz zrobili krok na następną (dla nich) płytę. Zobaczmy co się stało. Nie zmieniła się ilość płyt, nie zmieniła się ilość ludzi, ale pierwsza płyta jest już pusta! Czyli jeśli od nieskończoności odejmiemy jeden, to wciąż będzie tyle samo. Teraz wszyscy robią krok w tył – wciąż jest tyle samo płyt co ludzi, jednak wszystkie płyty są już zajęte. Jeśli do nieskończoności dodamy jeden, to wciąż będzie ta sama nieskończoność. I to właśnie jest definicja zbioru nieskończonego – **zbiór jest nieskończony, jeśli dodanie jednego elementu nie zmienia ilości elementów tego zbioru.** Zbiory, które nie są nieskończone, nazywamy skończonymi.

Przekonaliśmy się już o równoliczności $\mathbb{R}$ i $(-\pi/2, \pi/2)$. Bardzo podobnie można pokazać, że każdy odcinek (a, b) dla $a < b$ jest równoliczny z $\mathbb{R}$. A jakie inne zbiory są ze sobą równoliczne? Pokażemy najpierw, że zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$ i zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ są równoliczne.

Opiszmy więc bijekcję między $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Zacznijmy od uwagi: 0 (zero) jest liczbą naturalną. Funkcja f liczbie 0 przypisuje 0, liczbie 1 przypisuje 1, liczbie 2 przypisuje -1, liczbie 3 przypisuje 2, liczbie 4 przypisuje -2 i tak dalej. Łatwo zobaczyć, że rzeczywiście f jest bijekcją z $\mathbb{N}$ na $\mathbb{Z}$.[3]



Okazuje się, że także zbiór liczb wymiernych dodatnich $\mathbb{Q}^+$ jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych. Wyobraźmy sobie nieskończoną tabelę składającą się z nieskończenie wielu wierszy ponumerowanych liczbami naturalnymi dodatnimi i nieskończenie wielu kolumn, także ponumerowanych liczbami naturalnymi dodatnimi. W n-tym wierszu i w m-tej kolumnie stoi liczba n/m – czyli wszystkie dodatnie

[3] Jeśli chcecie opisać f wzorem, to musimy najpierw zdefiniować funkcję $\lceil r \rceil$, zwaną *cechą górną* albo *sufitem*, przyporządkowującą liczbie r najmniejszą liczbę całkowita większą lub równą r. I teraz niech $f(n) = (-1)^n \cdot \lceil n/2 \rceil$.

liczby wymierne są elementami naszej tabeli. Teraz budujemy bijekcję $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$ wypełniając tabelę „wężykiem" jak na obrazku powyżej, przy pominięciu tych liczb wymiernych, które już są w naszym wężyku. Równoliczność $\mathbb{Q}^+$ z $\mathbb{Q} \setminus 0$ uzasadniamy tak jak równoliczność $\mathbb{N}$ z $\mathbb{Z}$, a równoliczność $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ z $\mathbb{Q}$ tak jak w przykładzie z chodnikiem, czyli bierzemy ciąg elementów zbioru, przesuwamy każdy element ciągu o jedno miejsce, a na miejsce pierwszego wstawiamy 0.

Po tych przykładach można odnieść wrażenie, że wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne. Okazuje się, że tak nie jest.

Zbiorem potęgowym ustalonego zbioru X nazywamy zbiór 2^X, którego elementami są wszystkie podzbiory zbioru X. W przypadku $X = \emptyset$ zbiór potęgowy ma tylko jeden element — zbiór $\emptyset$, a więc $2^\emptyset = \{\emptyset\}$. Jeśli $X = \{1\}$, to $2^X = \{\emptyset, \{1\}\}$; jeśli $X = \{1, 2\}$, to $2^X = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$, itd.

Twierdzenie Cantora mówi nam, że dla dowolnego zbioru X (również dla zbioru nieskończonego) zbiór potęgowy zbioru X ma więcej elementów niż zbiór X.

Twierdzenie Cantora

Żaden zbiór X nie jest równoliczny ze swoim zbiorem potęgowym 2^X.

Dowód oparty jest na pomysłowym triku zastosowanym w dowodzie nie wprost. Ponieważ funkcja przyporządkowująca elementom X jednoelementowe zbiory złożone z tych elementów ($f(x) = \{x\}$) jest bijekcją między X a podzbiorem 2^X, zbiór potęgowy jest nie mniej liczny niż X. Pokażemy, że nie ma relacji odwrotnej, tzn. że nie ma bijekcji z (podzbioru zbioru) X na 2^X, czyli że nie ma funkcji „na" idącej z X w 2^X. Dowodząc nie wprost przyjmijmy, że istnieje zbiór X taki, że istnieje funkcja „na" $f : X \to 2^X$.

Niech A będzie zbiorem wszystkich takich elementów $x \in X$, że $x \notin f(x)$. Skoro funkcja f jest „na", to istnieje taki element $x_0 \in X$, że $A = f(x_0)$. Gdyby x_0 należało do A, to dostalibyśmy sprzeczność z definicją zbioru A, bo do A należą tylko te elementy $x \in X$, dla których $x \notin f(x)$. Gdyby z kolei x_0 nie należało do A, to spełniałoby warunek definiujący zbiór A, a więc należałoby do zbioru A. Sprzeczność kończy dowód.

Wracamy do liczb. Spróbujemy bardzo nieformalnie omówić liczby porządkowe. Należą do nich m.in. wszystkie liczby naturalne. Każda liczba naturalna jest liczbą elementów pewnego zbioru, możemy więc podać jej reprezentację w postaci zbioru, podobnie jak, licząc na palcach, utożsamiamy liczby od 1 do 5 z określonym układem zgiętych lub wyprostowanych palców. John von Neumann zaproponował następującą reprezentację liczb naturalnych:

- liczba 0 utożsamiana jest ze zbiorem pustym, który ma zero elementów,
- liczbie 1 odpowiada zbiór jednoelementowy $\{\emptyset\}$, którego jedynym elementem jest zbiór reprezentujący 0,
- liczbie 2 odpowiada zbiór dwuelementowy $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, do którego należą zbiory reprezentujące 0 i 1,
- każdej liczbie $n \geq 1$ odpowiada zbiór n–elementowy, do którego należą zbiory reprezentujące wszystkie liczby naturalne mniejsze od n.

Liczbę porządkową utożsamianą ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych oznaczamy symbolem ω. Jest to pierwsza nieskończona liczba porządkowa.

Można powiedzieć, że każda liczba porządkowa w sensie von Neumanna większa od zera jest reprezentowana przez zbiór, którego elementami są wszystkim liczby porządkowe mniejsze od niej (a właściwie zbiory, ktore te liczby reprezentują).

Liczby porządkowe w sensie von Neumanna definiowane zwykle w następujący sposób.

Zbiór[4] X jest *liczbą porządkową w sensie von Neumanna*, gdy

1. Jeśli $x \in X$, to $x \subset X$;
2. Jeśli $x, y \in X$, to $x = y$ lub $x \subset y$ lub $y \subset x$;
3. Jeśli $X \neq \emptyset$, to istnieje takie $x \in X$, że $x \cap X = \emptyset$.

Jakie zbiory są liczbami porządkowymi w sensie von Neumanna? Oto kilka z nich

$\emptyset$,

$\{\emptyset\}$,

$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$,

$\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$,

$\omega = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots\}$,

$\omega + 1 = \omega \cup \{\omega\}$,

$\omega + 2 = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\} = (\omega \cup \{\omega\}) \cup \{\omega \cup \{\omega\}\}$,

$\vdots$

ω_1.

Zauważcie: każdy zbiór składa się ze wszystkich poprzednich, przy czym $\emptyset$ traktujemy jako 0, $\{\emptyset\}$ jako 1, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ jako 2, $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ jako 3, ... a 5 to już chyba sami sobie wypiszecie. Zwróćcie też, proszę, uwagę, że ω to nic innego jak cały zbiór liczb naturalnych, jest więc równoliczny z $\omega + 1$, $\omega + 2$ i $\omega + k$ dla wszystkich $k \in \mathbb{N}$. Pierwszą nieskończoną liczbę porządkową, która nie jest równoliczna z ω, oznaczamy symbolem ω_1.

W poprzednim rozdziale mówiliśmy o strukturze algebraicznej (czy raczej niemożliwości jej „rozsądnego” wprowadzenia) na $\mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$. Na zbiorze liczb porządkowych wprowadza się taką strukturę. Jej własności są uzasadnione przez tak zwane *typy porządkowe*, ale tu tylko napomkniemy, że prowadzi to do tak (na pierwszy rzut oka) nienaturalnych własności jak nieprzemienność mnożenia i dodawania.

Zwróćmy jeszcze uwagę, że ∞ z poprzedniego rozdziału możemy traktować jak ω z tego rozdziału.

Wśród liczb porządkowych wyróżnia się *liczby początkowe* – to takie liczby porządkowe, które nie są równoliczne z żadną wcześniejszą od siebie (czyli z żadnym ze swoich elementów). Te właśnie liczby nazywa się też *liczbami kardynalnymi*, czyli mocami zbiorów. Innymi słowy, liczba kardynalna κ jest mocą zbioru X, jeśli κ jest równoliczna z X, co zapisujemy $\mathrm{card}\,(X) = \kappa$. Gdy mamy na myśli liczby kardynalne, to skończone oznaczamy tak jak naturalne: 0,1,2,3, ..., natomiast nieskończone oznaczamy innymi symbolami, w jakimś sensie zaniedbując ich strukturę i korzystając tylko z liczności. Odpowiednikiem ω będzie hebrajski symbol $\aleph_0$ (czytaj: *alef zero*), odpowiednikiem ω_1 będzie $\aleph_1$.

Co ciekawe, dla liczb kardynalnych wprowadza się zupełnie inną strukturę algebraiczną — odpowiadającą nie porządkom, a mocom właśnie — i tak dodawanie i mnożenie jest przemienne, ale stosunkowo nudne, bo np. dla nieskończonych liczba kardynalnych $\kappa + \kappa = \kappa$ i $\kappa \cdot \kappa = \kappa$.

Zobaczcie co się stało, gdy zdefiniowaliśmy liczby kardynalne. Pamiętacie jak definiowaliśmy zbiór pięcioelementowy przez zbiór palców mojej prawej ręki? Czym był ten zbiór palców? Był „przymiarem”, z którym mogliśmy porównać każdy zbiór i stwierdzić (bądź nie) równoliczność. Teraz mamy liczby kardynalne, które tworzą pełną skalę takich „przymiarów”. Każdy zbiór jest równoliczny z jakąś liczbą kardynalną, dlatego klasa liczb kardynalnych zawiera **wszystkie nieskończoności** rozumiane jako możliwe ilości elementów (moce) zbiorów nieskończonych[5].

[4] W standardowej teorii mnogości pracujemy wyłącznie na zbiorach, więc elementy zbioru muszą być zbiorami – innych nie rozpatrujemy.

[5] Formalnie powyższe stwierdzenie wymaga *pewnika wyboru*, ale nie on jest tematem tego artykułu.

Ponieważ wszystkie przedstawione tu definicje, własności i twierdzenia są powszechnie znane i stosowane w analizie, topologii i teorii mnogości, zamiast tradycyjnej bibliografii przedstawiamy listę publikacji, do których warto sięgnąć by poszerzyć wiedzę, której wycinki tu zaprezentowaliśmy. Zainteresowanym obszerniejszym i bardziej precyzyjnym opracowaniem omawianych tematów polecamy z analizy [9], [10] i zbiór zadań [5], z topologii [4], [6] i zbiór zadań [2], a z teorii mnogości [3], [7] i zbiór zadań [8]. Czytelnicy zainteresowani bardziej popularnym ujęciem tematyki mogą sięgnąć po książki [1] i [11].

Podziękowania

Autorzy dziękują magistrowi Michałowi Różańskiemu za pomoc w LaTeX-owych kłopotach.

Literatura

1. A. D. Aczel, *Tajemnice alefow*, REBIS, Poznań 2004.
2. A. W. Archangielski, W.I. Ponomariow, *Podstawy topologii ogólnej w zadaniach*, PWN, Warszawa 1986.
3. A. Błaszczyk, S. Turek, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 2007.
4. R. Engelking, *Topologia ogólna*, PWN, Warszawa 2012.
5. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, PWN, Warszawa 2015.
6. K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1980.
7. K. Kuratowski, A. Mostowski, *Teoria mnogości*, PWN, Warszawa 1978.
8. W. Marek, J. Onyszkiewicz, *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, PWN, Warszawa 1998.
9. W. Rudin, *Podstawy analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 1982.
10. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, PWN, Warszawa 2001.
11. R. Smullyan, *Szatan, Cantor i nieskończoność oraz inne łamigłówki*, Wydawnictwo Książka i Wiedza, Warszawa 2009.