

**Adam ŻUCHOWSKI**ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW  
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin**Eksperymentalne wyznaczanie parametrów modelu Strejca z uwzględnieniem korekcji**

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Katedrze Sterowania i Pomiarów w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wrocławska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku około 350 publikacji. W kwietniu 2010 roku upłynęło 55 lat jego działalności naukowej.



e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

**Streszczenie**

Dla eksperymentalnego wyznaczenia parametrów zastępczego modelu Strejca dynamiki obiektów liniowych, w warunkach niewielkich zakłóceń, wykorzystuje się zwykle przebieg i cechy charakterystyki skokowej. Takie metody są proste, szybkie, nie wymagają użycia specjalnych programów obliczeniowych, ale mogą wprowadzić pewne specyficzne błędy. Jedną z nich wymaga graficznego wyznaczania punktu przegięcia charakterystyki, co stanowi operację mało dokładną, druga wykorzystuje wzór asymptotyczny Stirlinga dla obliczenia wartości silni z pewnym uproszczeniem, oraz pozornie wspólny punkt wszystkich charakterystyk skokowych dla różnych wartości rzędu dynamiki obiektu, choć w rzeczywistości taki punkt nie istnieje, a uproszczenia – zwłaszcza przy małych wartościach rzędu dynamiki,  $1 \leq n \leq 2$ , prowadzą do błędów rzędu kilku procent. Zaproponowano wyznaczone eksperymentalnie współczynniki korekcyjne dla tej metody, a wyniki ich zastosowania zilustrowano przykładem symulacyjnym.

**Słowa kluczowe:** model Strejca, charakterystyki skokowe, wyznaczanie parametrów, korekcja wyników.

**Experimental calculation of parameters for Strejca model including correction****Abstract**

For the experimental calculation of parameters for Strejca model replacement of dynamics of linear plants, under small disturbances conditions, usually the shape and features of a step response are used. Such methods are simple, fast and do not require the usage of special computational software but can introduce some specific errors. One of those requires a graphical calculation of an inflection point which is not a very precise operation, and the second uses Stirling asymptotic equation in order to calculate the factorial with a specific simplification and the apparent common point for all step responses for different dynamics orders, while in reality such point does not exist, and simplification, especially with small orders of dynamics  $1 \leq n \leq 2$ , leads to errors of several percent. Experimentally calculated correction coefficients for this method are proposed, and their applications are illustrated with a simulated example.

**Keywords:** Strejca model, step response, parameters calculation, results correction.

**1. Wstęp**

Istnieje kilka metod eksperymentalnego wyznaczania parametrów modelu Strejca [1, 2, 3, 4] w tym metoda [4] wykorzystująca cechy pozornego punktu wspólnego charakterystyk skokowych tego modelu, zapisanego w postaci transmitancji:

$$K_m(s) = \frac{k}{\left(1 + s \cdot \frac{T}{n}\right)^n} \quad (1)$$

dla wszystkich wartości rzędu dynamiki  $n$ , przy identycznych wartościach współczynnika wzmocnienia  $k$  i stałej czasowej  $T$ . Wykresy rodziny takich charakterystyk uzyskane dla  $k=1$ ,  $T=1$  pokazano na rysunku 1 i w omawianej metodzie przyjęto, że ów punkt wspólny występuje dla wartości charakterystyki skokowej  $h_m(t)=0,65k$  przy  $t_p=1,11T$ . Po odchyleniu czasu  $t$  o  $\pm t_1$  w stosunku do wartości  $t_p$ , wyznaczeniu wartości  $h_m(t_p \pm t_1)$  przy niewielkich wartościach stosunku  $t_1/t_p$  otrzymuje się zależność:

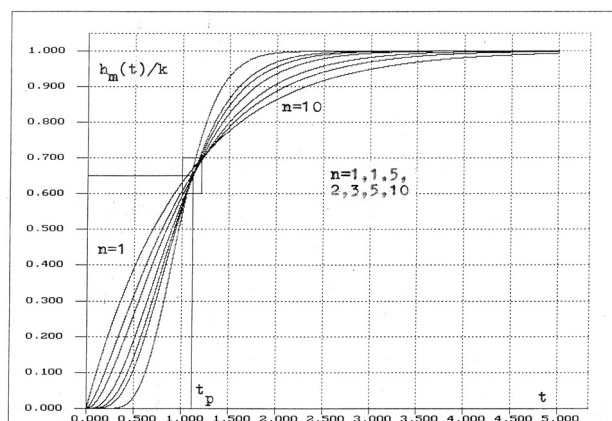
$$\Delta h_m = h_m(t_p + t_1) - h_m(t_p - t_1) = S(n) \cdot k \cdot \frac{t_1}{t_p} \cdot \sqrt{n} \quad (2)$$

i w przybliżeniu wolno przyjąć, że  $S(n)=0,758=\text{const}$ .

Pozwala to wyznaczyć parametry modelu Strejca po eksperymentalnym wyznaczeniu charakterystyki skokowej badanego obiektu. W rzeczywistości:

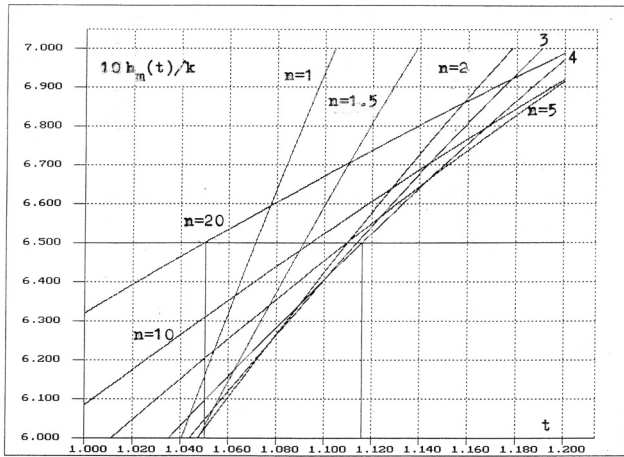
$$S(n) = [1,11 \cdot \exp(-0,11)]^n \cdot \exp(-r/12n) \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad (3)$$

gdzie  $r$  jest zmienne w granicach  $0 < r < 1$  (wynika to z wykorzystania wzoru Stirlinga dla wyznaczenia wartości  $n!$ ), a ponadto w rzeczywistości ów punkt wspólny charakterystyk skokowych nie istnieje, co ilustruje powiększony fragment rodziny wykresów z rys. 1, pokazany na rys. 2. Wartość  $h_m(t)=0,65k$  uzyskuje się dla  $1 \leq t_p/T \leq 1,18$  przy zmianach wartości  $1 \leq n \leq \infty$ , a  $t_p/T \cong 1,11$   $t_p$ , dla  $n = 2 \dots 6$ , to jest dla rzędów  $n$  o wartościach często spotykanych. Jak widać – wykorzystanie przybliżonego wzoru (2) wprowadza błędy, zwłaszcza dla  $n$  bliskich jedności.



Rys. 1. Rodzina charakterystyk skokowych  $h_m(t)$  dla modelu Strejca (1) przy różnych wartościach parametru  $n$  dla  $T=1$

Fig. 1. The family of step responses  $h_m(t)$  for Strejca model (1) for different values of parameter  $n$ , with  $T=1$



Rys. 2. Powiększony fragment rodziny charakterystyk skokowych z rys. 1  
Fig. 2. An enlarged fragment of the family of step responses from Fig. 1

### 2. Współczynniki korekcyjne

Ponieważ dokładna wartość  $r$  we wzorze (3) nie jest znana (zależy od rzędu  $n$ ), można wprowadzić dwa współczynniki korekcyjne.  $k_n$  i  $k_T$ , tak dobrane eksperymentalnie, by przy wykorzystaniu założeń metody wyznaczać  $T_{rzecz} = T_{mierz} \cdot k_T$ , oraz  $n_{rzecz} = n_{mierz} \cdot k_n$  znając zależności  $k_n$  i  $k_T$  od rzędu dynamiki  $n$ . Należy w tym celu wyznaczyć przy wykorzystaniu modelowania charakterystyki  $h_m(t)$  dla różnych, także ułamkowych, ale znanych rzędów dynamiki  $n$  i przy znanych wartościach  $T$ , wyznaczyć te wartości wykorzystując uzyskane charakterystyki i założenia metody i następnie wyznaczyć odpowiednie współczynniki korekcyjne. Uzyskanie charakterystyk skokowych dla ułamkowych rzędów dynamiki jest możliwe przy wykorzystaniu wzoru:

$$k_m(t) = \frac{k \cdot n}{(n-1)! \cdot T} \cdot \left(\frac{n \cdot t}{T}\right)^{n-1} \cdot \exp\left(-\frac{n \cdot t}{T}\right) \quad (4)$$

oraz

$$h_m(t) = \int_0^t k_m(t) \cdot dt \quad \text{przy} \quad h_m(\infty) = k,$$

co uwalnia od konieczności wykorzystywania tablic funkcji  $n!$  dla ułamkowych  $n$ . Uzyskane w ten sposób wartości współczynników korekcyjnych  $k_n$  i  $k_T$  zestawiono w tabeli 1 i przedstawiono w postaci wykresów na rys. 3. Istnieje oczywiście możliwość aproksymowania tych zależności odpowiednimi wzorami przybliżonymi.

$$\begin{aligned} k_n &= 0,99 + 0,408 \cdot (0,48 - \log n + 0,225 \cdot (\log n)^2)^{2,4} \\ k_T &= 0,995 + 0,425 \cdot (0,48 - 0,52 \cdot \log n + 0,133 \cdot (\log n)^{3,4})^{2,6} \end{aligned} \quad (5)$$

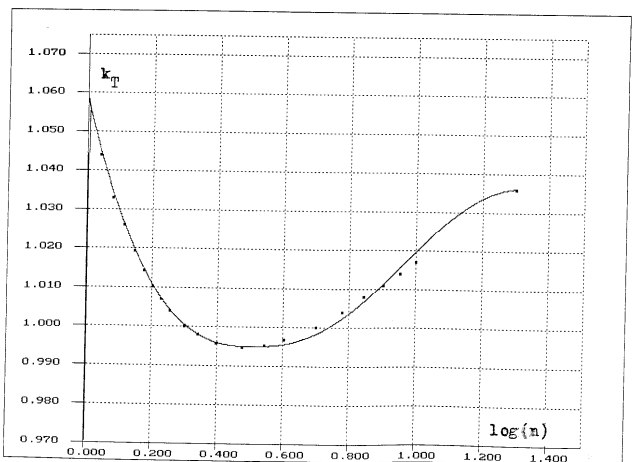
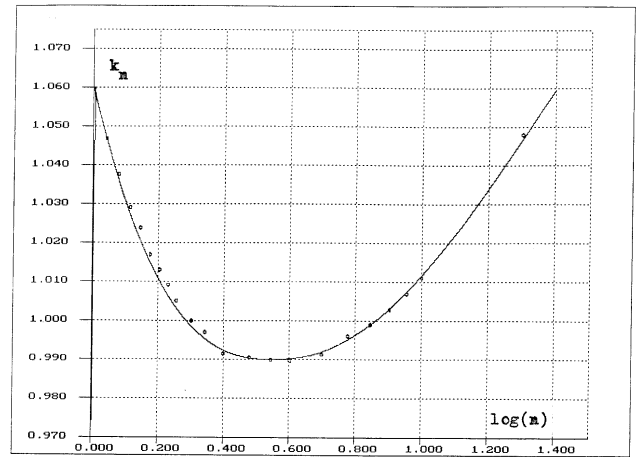
ważnymi w zakresie  $n = 1 \dots 20$ .

Tab. 1. Wartości współczynników korekcyjnych  $k_n$  i  $k_T$   
Tab. 1. The values of correction coefficients  $k_n$  and  $k_T$

$n$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5
$k_n$	1,060	1,047	1,038	1,029	1,024	1,017	1,013	1,005	1,000	0,992
$k_T$	1,058	1,044	1,033	1,027	1,019	1,014	1,010	1,004	1,000	0,996

$n$	3,0	3,5	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	20,0
$k_n$	0,001	0,990	0,989	0,991	0,996	0,999	1,003	1,007	1,011	1,048
$k_T$	0,995	0,995	0,997	1,000	1,004	1,008	1,011	1,014	1,017	1,036



Rys. 3. Wykresy zależności współczynników korekcyjnych  $k_n$  i  $k_T$  od wyznaczonego rzędu dynamiki  $n$  modelu Strejca  
Fig. 3. The plots of the dependency of the correction coefficients  $k_n$  and  $k_T$  on the calculated dynamics order  $n$  of Strejz model

### 3. Celowość stosowania korekcji

Celowość stosowania korekcji może się wydawać dyskusyjna z dwóch powodów. Po pierwsze zazwyczaj wykorzystuje się modele Strejca o rzędzie dynamiki  $n$  zaokrąglonym do wartości całkowitych z wykorzystaniem zależności:

$$T = T_{zaokr} \quad (6)$$

gwarantującej zachowanie w modelu o zaokrągleniach tej samej skali czasu. Wydaje się to zgodne z rzeczywistością i ułatwia obliczenia, ale wprowadza dodatkowe błędy modelu, gdyż ułamkowe wartości  $n$  są wynikiem zastąpienia modelu rzeczywistego modelem Strejca. W wielu przypadkach owe trudności obliczeniowe są jednak możliwe do pokonania (dobór nastaw regulatora, warunki stabilności) i „psucie” modelu nie wydaje się konieczne.

Po drugie – pomiary charakterystyki skokowej badanego obiektu są zwykle obciążone błędami choćby z powodu występujących zakłóceń i możliwości odczytu danych z wykresów. Jeśli nawet przyjąć, że pomiary te są wykonane np. z błędem nie przekraczającym 1% co wydaje się zbyt optymistyczne, to już w tych warunkach obliczenie  $\Delta h_m$  - metoda różnicowa - nie zagwarantuje dokładności lepszej niż 5%, a nawet 10%. W tej sytuacji stosowanie współczynnika korekcyjnego zmieniającego wartość parametru o nawet 6% ma wątpliwe uzasadnienie, ale - bez tej korekcji maksymalny błąd może już sięgnąć nawet 15%, więc korekcja jednak jest zasadna w zakresie rzędów dynamiki mniejszych od dwóch.

Przy wyznaczaniu wartości współczynników korekcyjnych starano się uzyskać możliwie dokładne wyniki wyznaczenia wartości  $h_m(t)$  (modelowanie przy użyciu programów komputerowych), a mimo to na wykresie (rys. 3) widoczne są odchylenia wartości tych współczynników aproksymacyjnych od linii o przebiegu gładkim.

#### 4. Przykład, podsumowanie

Stosując symulację komputerową zdjęto charakterystykę skokową obiektu o transmitancji

$$K(s) = \frac{1 + 0,2 \cdot s}{(1 + s)(1 + 0,4 \cdot s)}$$

i wyznaczono model Strejca o parametrach  $n=1,29$ ,  $T=1,17$ . Po zastosowaniu korekcji otrzymano  $n_{kor}=1,33$ ,  $T_{kor}=1,21$ . Wykresy błędów obu tych modeli (korygowanego i niekorygowanego) w funkcji wartości charakterystyki skokowej prawdziwej) przedstawia rys. 4. Sporządzono także wykres błędów dla modelu o rzędzie dynamiki zaokrąglonym do całkowitej wartości  $n=1$ , oraz odpowiednio  $T=1,21$ .

Warto też wspomnieć o możliwości zastąpienia modelu (1) modelem o transmitancji:

$$K_m(s) = \frac{k}{(1 + s \cdot T_1)^m \cdot (1 + s \cdot T_2)} \quad (7)$$

dokładniejszym od modelu o rzędzie dynamiki  $n$  zaokrąglonym do liczby całkowitej, przy założeniu, że  $m$  jest liczbą całkowitą będącą zaokrągleniem ułamkowego  $n$  do najbliższej, mniejszej.

Dla zachowania tej samej skali czasu w obu modelach należy spełnić warunek [5, 6]:

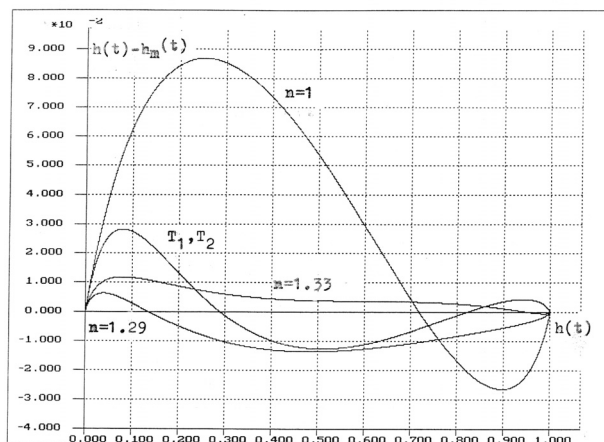
$$T = m \cdot T_1 + T_2 \quad (8)$$

i dodatkowo, wynikający z metody [5] warunek:

$$\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n = \left(1 + 2 \cdot \frac{T_1}{T}\right)^m \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{T_2}{T}\right) \quad (9)$$

co stanowi układ dwóch równań pozwalających wyznaczyć parametry  $T_1$  i  $T_2$ . W omawianym przykładzie, przy  $m = 1$  otrzymuje się:  $T_1=1,078$  oraz  $T_2=0,132$ . Odpowiedni wykres na rys. 4 dowodzi, że model taki stanowi lepsze przybliżenie od modelu o  $n = 1$  oraz  $T = 1,21$ . Najlepsze przybliżenie rzeczywistości otrzymuje się dla modelu o ułamkowym rzędzie dynamiki z uwzględnieniem

korekcji. Istotne jest natomiast pytanie, jaka jest wymagana dokładności modelu z uwagi na jego praktyczne zastosowania, ale ten problem nie mieści się w ramach, prezentowanej pracy.



Rys. 4. Wykresy błędów wszystkich uzyskanych modeli w omawianym przykładzie w funkcji przebiegu charakterystyki skokowej obiektu  $h(t)$

Fig. 4. The plots of all obtained models in the analysed example in the function of a step response of the plant  $h(t)$

#### 5. Literatura

- [1] Ziegler J. G.: Nichols N. B.: Optimum settings for automatic controllers. Transactions of the ASME 64, pp. 759-768, 1942.
- [2] Sundarsen K.R., Prasad C.C., Krishnaswamy P.R.: Evaluating parameters from process transients. Industrial and Eng. Chemistry Process Design and Development. 17: pp. 237-241, 1978.
- [3] Skoczowski S.: Eine Bemerkungen zur Approximierung von Regelstrecken mit Ausgleich Regelungstechnik 7, 1983.
- [4] Żuchowski A.: O pewnej metodzie wyznaczania parametrów modelu Strejca. PAK, nr 10, 1993.
- [5] Papliński J.: Wykorzystanie modelu Strejca dla tworzenia pochodnych modeli dynamiki liniowych obiektów. Rozprawa doktorska. Politechnika Szczecińska, 1996.
- [6] Żuchowski A.: Wyznaczanie parametrów rozszerzonego modelu Strejca w oparciu o pomiar charakterystyki skokowej. PAK, nr 7, 2000.

otrzymano / received: 11.04.2013

przyjęto do druku / accepted: 03.11.2014

artykuł recenzowany / revised paper

## INFORMACJE

### Informacja redakcji dotycząca artykułów współautorskich

W miesięczniku PAK od numeru 06/2010 w nagłówkach artykułów współautorskich wskazywany jest autor korespondujący (Corresponding Author), tj. ten z którym redakcja prowadzi wszelkie uzgodnienia na etapie przygotowania artykułu do publikacji. Jego nazwisko jest wyróżnione drukiem pogrubionym. Takie oznaczenie nie odnosi się do faktycznego udziału współautora w opracowaniu artykułu. Ponadto w nagłówku artykułu podawane są adresy korespondencyjne wszystkich współautorów.

Wprowadzona procedura wynika z międzynarodowych standardów wydawniczych.