MINUT 2023 (5), s. 1–16
ISSN 2719-3063

Barbara BIŁY[1]

[1]Katedra Matematyki, Politechnika Śląska, ul. Kaszubska 23, 44-100 Gliwice

Ekstremum funkcji wielu zmiennych

Streszczenie. Szukanie ekstremum funkcji wielu zmiennych jest zadaniem często spotykanym w różnych problemach technicznych i ekonomicznych. Zagadnienie to rozpatruje się w podstawowym kursie analizy dla studentów szkół wyższych, lecz w zakresie ograniczonym do funkcji dwóch zmiennych.
W tym artykule zostanie rozpatrzony ogólniejszy przypadek, dla funkcji wielu zmiennych, z wykorzystaniem macierzy Hessego dla sformułowania warunków koniecznych i wystarczających dla znalezienia ekstremum.

Słowa kluczowe: określoność macierzy, pochodne cząstkowe, hesjan, ekstremum.

1. Określoność macierzy

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą kwadratową, stopnia n, o elementach rzeczywistych. Zakładamy, że $\mathbf{A}$ jest macierzą symetryczną, tzn. $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$.

Definicja 1.
Funkcję $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ postaci

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, x_i\, x_j = \mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T$$

nazywamy formą kwadratową n zmiennych. Macierz symetryczną $\mathbf{A}$ występującą w tym równaniu nazywamy macierzą formy kwadratowej.

Definicja 2.
Macierz $\mathbf{A}$ (i skojarzoną z nią formę kwadratową) nazywamy:
a) dodatnio określoną, jeżeli $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T > 0$, dla każdego $x \in \mathbf{R}^n$ poza początkiem układu,
b) ujemnie określoną, jeżeli $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T < 0$, dla każdego $x \in \mathbf{R}^n$ poza początkiem układu,
c) dodatnio półokreśloną, jeżeli $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T \geqslant 0$, dla każdego $x \in \mathbf{R}^n$,
d) ujemnie półokreśloną, jeżeli $\mathbf{x} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^T \leqslant 0$, dla każdego $x \in \mathbf{R}^n$,
e) nieokreśloną, jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych warunków.

Autor korespondencyjny: B. Biły (barbara.bily@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 06.10.2022.

Przykład 1.

Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ jest dodatnio określona,

gdyż $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 + 2x_2^2 > 0$ dla każdego $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Przykład 2.

Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ jest ujemnie określona,

gdyż $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -x_1^2 - 3x_2^2 < 0$ dla każdego $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Przykład 3.

Macierz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ jest nieokreślona, gdyż dla formy kwadratowej:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= -x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

zachodzi $f(1, 0, 0) = -1$ i $f(0, 1, 0) = 1$; czyli forma kwadratowa przyjmuje wartości różnych znaków.

Uwaga 1. Łatwiejszym warunkiem do badania określoności macierzy jest kryterium Sylvestera.

Niech $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ będzie macierzą symetryczną, stopnia n, o elementach rzeczywistych.

Określamy tzw. minory główne macierzy $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{M}_1 = a_{11}; \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \qquad \mathbf{M}_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{vmatrix}$$

dla każdego $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Twierdzenie 1. *(Kryterium Sylvestera)*

Macierz symetryczna $\mathbf{A}$ *(forma kwadratowa) jest:*

a) dodatnio określona $\Leftrightarrow$ *dla każdego* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad \mathbf{M}_k > 0$.

b) ujemnie określona $\Leftrightarrow$ *dla każdego* $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ $\quad (-1)^k \cdot \mathbf{M}_k > 0$.

c) dodatnio półokreślona $\Leftrightarrow$ *wszystkie minory główne są nieujemne i istnieje minor* $\mathbf{M}_i = 0$.

d) dodatnio półokreślona $\Leftrightarrow$ *wszystkie minory główne stopnia parzystego są nieujemne, stopnia nieparzystego są niedodatnie i istnieje minor* $\mathbf{M}_i = 0$.

e) nieokreślona, jeżeli nie zachodzi żaden z powyższych warunków.

Przykład 4.

Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ mamy:

$$\mathbf{M}_1 = 2 > 0, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \qquad \mathbf{M}_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

zatem $\mathbf{A}$ jest dodatnio określona.

Przykład 5.

Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ mamy:

$$\mathbf{M}_1 = -2 < 0, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 > 0, \qquad \mathbf{M}_3 = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6 < 0$$

zatem $\mathbf{A}$ jest ujemnie określona.

Przykład 6.

Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ zachodzi:

$$\mathbf{M}_1 = 1 > 0, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 < 0,$$

zatem $\mathbf{A}$ jest nieokreślona.

Przykład 7.

Dla macierzy $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ zachodzi:

$$\mathbf{M}_1 = 1 > 0, \qquad \mathbf{M}_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

zatem $\mathbf{A}$ jest dodatnio półokreślona.

2. Macierz Hessego

Definicja 3.

Macierzą Hessego (hesjanem) dla funkcji n zmiennych $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, *gdzie* $x \in D \subset \mathbf{R}^n$, *nazywamy macierz w postaci:*

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Uwaga 2. Przy założeniu, że pochodne cząstkowe rzędu 2 mieszane są ciągłe, z twierdzenia Schwarza wynika ich równość:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \text{dla}\, i \neq j;$$

co implikuje, że macierz Hessego jest symetryczna.

Przykład 8.

Wyznaczyć hesjan funkcji $f(x, y, z) = x^2 z + xy^2 + z^3$ w punkcie (-1,2,3).

Obliczamy pochodne cząstkowe rzędu pierwszego, w dowolnym punkcie (x, y, z):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xz + y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = x^2 + 3z^2$$

oraz pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Macierz Hessego:

$$H_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 2z & 2y & 2x \\ 2y & 2x & 0 \\ 2x & 0 & 6z \end{bmatrix}; \qquad H_f(-1, 2, 3) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 18 \end{bmatrix}.$$

Uwaga 3. Macierz Hessego jest macierzą formy kwadratowej n zmiennych, będącej różniczką zupełną rzędu drugiego funkcji $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3. Ekstremum lokalne funkcji n-zmiennych (maksimum lub minimum)

Niech $f : D \to \mathbf{R}$, gdzie $D \subset \mathbf{R}^n$.

Definicja 4.

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in D$ maksimum (minimum) lokalne $\Leftrightarrow$ istnieje takie sąsiedztwo punktu x_0 : $S(x_0) \subset D$, takie, że $\forall x \in S(x_0)$ zachodzi $f(x) \leq f(x_0)$ (dla minimum $f(x) \geq f(x_0)$).

Uwaga 4. Jeżeli w powyższej definicji zastąpimy nierówności słabe nierównościami ostrymi, to mówimy o ekstremum właściwym.

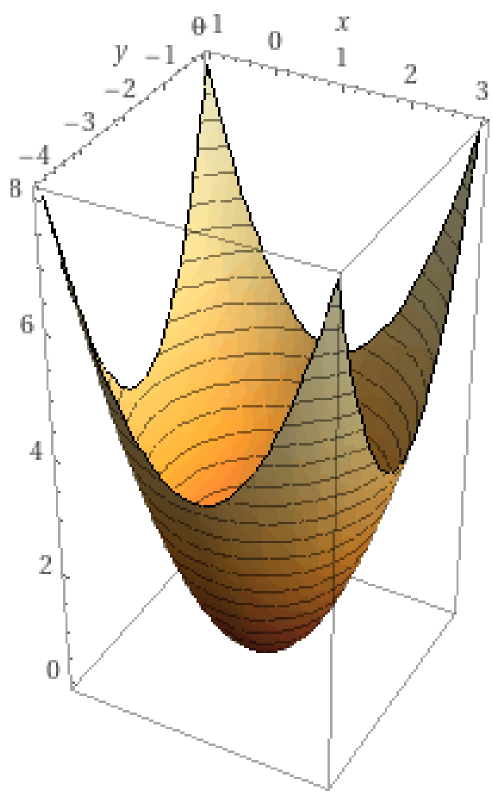
Przykład 9.

Funkcja dwóch zmiennych:

$$f(x, y) = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$$

ma minimum lokalne w punkcie $(1, -2)$. Łatwo zobaczyć, że:

$$f(x, y) > 0 = f(1, -2) \text{ w punktach } (x, y) \neq (1, -2).$$



Rysunek 1. $z = (x - 1)^2 + (y + 2)^2$

Powyższą powierzchnię nazywamy paraboloidą.

Twierdzenie 2.

Jeżeli funkcja $f(x) = f(x_1, x_1, \dots, x_n)$ *ma ekstremum lokalne w punkcie* x_0 *i istnieją wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w* x_0*, to są one równe zeru, czyli dla każdego* $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ *zachodzi* $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

Dowód.

Załóżmy, dla ustalenia uwagi, że funkcja $f(x)$ ma w x_0 maksimum. Zatem istnieje sąsiedztwo punktu $x_0 : S(x_0)$, takie, że wartości funkcji dla $x \in S(x_0)$ spełniają warunek $f(x) \leq f(x_0)$.

Niech $x_0 = (x_1^{(0)}, x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ i $x = (x_1, x_1, \dots, x_n)$.

Jeżeli $x_i^{(0)} < x_i$, wtedy $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x_i - x_i^{(0)}} \leq 0$,

zatem, ponieważ pochodna cząstkowa $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ istnieje, poprzez przejście graniczne $\lim_{x_i \to x_i^{(0)}}$ i z twierdzenia o zachowaniu nierówności w granicy, otrzymamy $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \leq 0$.

Jeżeli $x_i^{(0)} > x_i$, wtedy $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x_i - x_i^{(0)}} \geq 0$, stąd $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \geq 0$.

Ostatecznie, z faktu że $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \geq 0$ i $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \leq 0$ wynika że $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

Z dowolności wyboru “i” mamy tezę twierdzenia. □

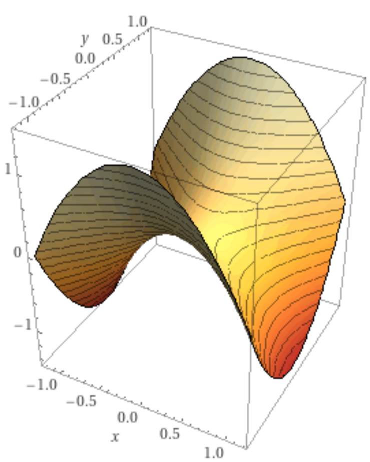
Uwaga 5. Powyższe twierdzenie jest warunkiem koniecznym, ale nie jest wystarczającym na istnienie ekstremum. Ilustuje to poniższy przykład.

Przykład 10.

Funkcja $f(x, y) = y^2 - x^2$ ma w punkcie $(0, 0)$ obie pochodne cząstkowe równe zeru:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Ekstremum jednak w tym punkcie nie ma. Biorąc bowiem dowolne sąsiedztwo $S(0, 0)$ i punkty $x_1 = (x, 0)$ dla $x \neq 0$ oraz $x_2 = (0, y)$ dla $y \neq 0$ należące do tego sąsiedztwa, mamy $f(x, 0) = -x^2 < 0$ i $f(0, y) = y^2 > 0$, czyli istnieją punkty, w których wartości funkcji są mniejsze lub większe od $f(0, 0) = 0$.



Rysunek 2. $z = y^2 - x^2$

Uwaga 6. Funkcja n-zmiennych może mieć ekstremum w punkcie x_0, w którym nie istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego lub niektóre pochodnie się zerują, a pozostałe nie istnieją.

Przykład 11.

Funkcja $f(x,y) = |x| + |y|$ ma minimum lokalne w punkcie $(0,0)$, co łatwo sprawdzić z definicji, ale pochodne cząstkowe rzędu 1 nie istnieją w tym punkcie.

Przykład 12.

Funkcja $f(x,y) = |x| + y^2$ ma minimum lokalne w punkcie $(0,0)$, gdyż $f(x,y) > f(0,0)$ dla każdego punktu $(x,y) \neq (0,0)$. Pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, ale $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ nie istnieje.

Uwaga 7. Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach krytycznych (stacjonarnych lub w takich, w których pochodne cząstkowe rzędu pierwszego się zerują albo nie istnieją).

Twierdzenie 3.

Niech $x_0 \in U \subseteq D \subseteq \mathbf{R}^n$, gdzie U jest otoczeniem punktu x_0;

$f : D \longrightarrow \mathbf{R}$ będzie funkcją taką, że:

a) wszystkie pochodne cząstkowe rzędu pierwszego i drugiego są ciągłe w U;

b) dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$.

Wtedy mamy:

1. jeżeli macierz Hessego w punkcie x_0 jest dodatnio określona, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 minimum lokalne.

2. jeżeli macierz Hessego w punkcie x_0 jest ujemnie określona, to funkcja $f(x)$ ma w punkcie x_0 maksimum lokalne.

3. jeżeli macierz Hessego jest nieokreślona w punkcie x_0, to funkcja $f(x)$ nie ma w punkcie x_0 ekstremum.

Dowód.

Z założenia funkcja n zmiennych ma wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 2 ciągłe w pewnym otoczeniu punktu x_0. Możemy zatem rozwinąć ją z twierdzenia Taylora następująco:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{df(x_0)}{1!} + \frac{d^2 f(x_\Theta)}{2!}$$

gdzie różniczki rzędu 1 i 2 liczone są dla tych samych przyrostów zmiennych niezależnych Δx_i, dla $i = 1, 2, \ldots, n$.

Mamy: $x_0 = (x_1^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$, $x = (x_1, x_1, \ldots, x_n)$,

$\Delta x_i = x_i - x_i^{(0)}$;

$x_\Theta = (x_1^{(0)} + \Theta(x_1 - x_1^{(0)}), x_2^{(0)} + \Theta(x_2 - x_2^{(0)}), \ldots, x_n^{(0)} + \Theta(x_n - x_n^{(0)}))$;

$0 < \Theta < 1$

Z założenia $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$, stąd:

$$df(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot \Delta x_i = 0$$

i dalej:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot d^2 f(x_\Theta) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_\Theta) \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (x - x_0) \cdot H_f(x_\Theta) \cdot (x - x_0)^T$$

1) Załóżmy, że hesjan $H_f(x_0)$ jest dodatnio określony, czyli wszystkie minory główne są dodatnie. Z ciągłości pochodnych cząstkowych rzędu 2 w hesjanie wnioskujemy, że również $H_f(x_\Theta)$ będzie dodatnio określony (funkcje ciągłe lokalnie zachowują znak). Zatem, dla $x \neq x_0$ wynika, że:

$$\frac{1}{2}(x - x_0) \cdot H_f(x_\Theta) \cdot (x - x_0)^T > 0$$

a to implikuje:

$$f(x) - f(x_0) > 0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

dla x z pewnego sąsiedztwa x_0. Zatem teza pkt.1) została udowodniona.

Dla dowodu pkt. 2) wystarczy zauważyć, że jeżeli hesjan H jest ujemnie określony, to $(-H)$ jest dodatnio określony i dowód przebiega analogicznie do przedstawionego wyżej.

Dla dowodu pkt.3) - jeżeli H jest nieokreślony, to istnieją punkty x_1, x_2 takie, że:

$$(x - x_1) \cdot H_f(x_\Theta) \cdot (x - x_1)^T > 0 \qquad \text{i} \qquad (x - x_2) \cdot H_f(x_\Theta) \cdot (x - x_2)^T < 0$$

czyli różnica $f(x) - f(x_0)$ nie jest stałego znaku, co uzasadnia brak ekstremum. □

Uwaga 8. Powyższe twierdzenie stanowi warunek wystarczajacy na ekstremum lokalne funkcji wielu zmiennych, ale nie dotyczy punktów, w których któras z pochodnych cząstkowych nie istnieje.

Przykład 13.

Wyznaczyć ekstremum funkcji

$$f(x, y, z) = x^3 - 3x + y^2 + 2y + z^2, \qquad D = \mathbf{R}^3$$

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

Istnieją one w każdym punkcie dziedziny. Następnie z warunku koniecznego, wszystkie pochodne muszą się zerować. Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3 &= 0 \\ 2y + 2 &= 0 \\ 2z &= 0 \end{cases}$$

z którego wyznaczamy tzw. punkty stacjonarne:

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \ \vee \ x = -1 \\ y = -1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Z powyższego układu otrzymujemy dwa punkty stacjonarne; (1,-1,0) i (-1,-1,0). Następnie liczymy pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Na ich podstawie tworzymy macierz Hessego:

$$H_f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości minorów dla pierwszego punktu stacjonarnego:

$$H_f(1, -1, 0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_1 = 6 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0.$$

Wszystkie minory są dodatnie, czyli macierz jest dodatnio określona, z czego wynika, że w punkcie (1,-1,0) występuje minimum tej funkcji.

Obliczamy wartości minorów dla drugiego punktu stacjonarnego:

$$H_f(-1, -1, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_1 = -6 < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12 < 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -24 < 0.$$

Otrzymaliśmy macierz nieokreśloną, zatem w tym punkcie ekstremum nie występuje.

Liczymy wartość funkcji w punkcie minimum:

$$f_{min} = f(1, -1, 0) = -3$$

Przykład 14. Wyznaczyć ekstremum lokalne funkcji trzech zmiennych:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz, \qquad D = \mathbf{R}^3$$

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - y - z, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 2 - x$$

Istnieją one w każdym punkcie dziedziny. Następnie z warunku koniecznego, wszystkie pochodne muszą się zerować. Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 4x - y - z &= 0 \\ 2y - x &= 0 \\ 2 - x &= 0 \end{cases}$$

z którego wyznaczamy punkt stacjonarny: $P_0(2,1,7)$. Następnie liczymy pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0.$$

Na ich podstawie tworzymy macierz Hessego:

$$H_f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości minorów dla punktu stacjonarnego:

$$H_f(2,1,7) = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_1 = 4 > 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 > 0, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 < 0.$$

Macierz Hessego jest nieokreślona w punkcie $P_0(2,1,7)$, zatem z twierdzenia 3 wynika, że w tym punkcie nie ma ekstremum.

Przykład 15. Wyznaczyć ekstremum lokalne funkcji trzech zmiennych:

$$f(x,y,z) = 3\ln(x) + 2\ln(y) + 5\ln(z) + \ln(22 - x - y - z)$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji:

$$D = \{ \quad f(x,y,z) \in \mathbf{R}^3; \quad x > 0 \quad \wedge \quad y > 0 \quad \wedge \quad z < 22 - x - y \quad \}$$

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3}{x} - \frac{1}{22 - x - y - z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{y} - \frac{1}{22 - x - y - z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{5}{z} - \frac{1}{22 - x - y - z}$$

Przyrównując powyższe pochodne do 0, tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} \frac{3}{x} &= \frac{1}{22 - x - y - z} \\ \frac{2}{y} &= \frac{1}{22 - x - y - z} \\ \frac{5}{z} &= \frac{1}{22 - x - y - z} \end{cases}$$

Rozwiązaniem powyższego układu jest punkt $P_0(6,4,10)$ należący do dziedziny funkcji.

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu drugiego:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{-3}{x^2} - \frac{1}{(22-x-y-z)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2}{y^2} - \frac{1}{(22-x-y-z)^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{-5}{z^2} - \frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{1}{(22-x-y-z)^2}$$

Licząc wartości tych pochodnych w punkcie P_0 otrzymamy macierz Hessego w postaci:

$$H_f(6,4,10) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{27}{100} \end{bmatrix}, \quad M_1 = -\frac{1}{3} < 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{3}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{16} > 0, \qquad M_3 = \det(H_f(6,4,10)) = -\frac{37}{9600} < 0.$$

Zatem macierz Hessego w punkcie P_0 jest ujemnie określona, czyli w punkcie P_0 funkcja osiąga maksimum lokalne, o wartości:

$$f_{max} = f(6,4,10) = \ln(32 \cdot 6^3 \cdot 10^5)$$

Uwaga 9. W przypadku funkcji dwóch zmiennych, sprawdzenie warunku wystarczającego jest nieco szybsze. Jeżeli hesjan ma postać

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

to warunek, że macierz jest dodatnio określona oznacza, że:

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0 \quad \text{i} \quad \det H_f(x_0,y_0) > 0$$

natomiast jeżeli

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0 \quad \text{i} \quad \det H_f(x_0,y_0) > 0$$

to macierz jest ujemnie określona.

Przypadek $\det H_f(x_0,y_0) < 0$ oznacza, że macierz jest nieokreślona, czyli ekstremum nie występuje.

Jeżeli zaś $\det H_f(x_0,y_0) = 0$, to jest to przypadek wątpliwy. Kryterium nie rozstrzyga o istnieniu ekstremum. Wymaga on dodatkowego badania, na przykład korzystając z definicji.

Przykład 16.

Wyznaczyć ekstremum funkcji:

$$f(x,y) = x^2 + 4y^2 - \ln(-x \cdot y)$$

Wyznaczamy dziedzinę funkcji:

$$D = \{\ (x,y) \in \mathbf{R}^2\ ; \quad -xy > 0\ \}$$

Warunek $\qquad -xy > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Zatem geometrycznym odzwierciedleniem dziedziny są punkty leżące w I i III ćwiartce układu współrzędnych, poza punktami osi $0X$ i $0Y$.

Z warunku koniecznego mamy $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ i $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, gdzie:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - \frac{-1}{xy}(-y) = 2x - \frac{1}{x} = 0 = \frac{2x^2 - 1}{x} \Leftrightarrow \left(x = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee \left(x = -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 8y - \frac{-1}{xy}(-x) = 8y - \frac{1}{y} = 0 = \frac{8y^2 - 1}{y} \Leftrightarrow \left(y = \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \vee \left(y = -\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

mamy zatem cztery punkty, z których jedynie dwa należą do dziedziny:

$$P_1(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}) \notin D, \qquad P_2(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) \in D,$$

$$P_3(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}) \in D, \qquad P_4(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) \notin D$$

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{1}{x^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8 + \frac{1}{y^2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

Tworzymy hesjan:

$$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 + \dfrac{1}{x^2} & 0 \\ 0 & 8 + \dfrac{1}{y^2} \end{bmatrix}$$

$$H_f(P_2) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \qquad \det H_f(P_2) = 64 > 0$$

Ponieważ:

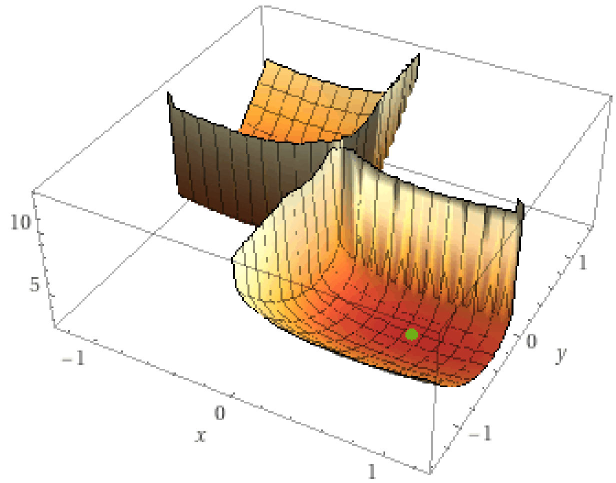
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_2) = 4 > 0$$

zatem mamy do czynienia z minimum funkcji. Analogicznie dla punktu P_3:

$$H_f(P_3) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}, \qquad \det H_f(P_3) = 64 > 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_3) = 4 > 0$$

Ostatecznie:

$$f_{min} = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{2}}{4}) = \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{8} - \ln(\frac{2}{8}) = 1 + \ln(4)$$



Rysunek 3. $z = x^2 + 4y^2 - \ln(-xy)$

Przykład 17. Wyznaczyć ekstemum funkcji dwóch zmiennych:

$$f(x, y) = x^4 + y^2, \qquad D = \mathbf{R}^2$$

Liczymy pochodne cząstkowe rzędu 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Istnieją one w każdym punkcie dziedziny. Następnie z warunku koniecznego, wszystkie pochodne muszą się zerować. Tworzymy układ równań:

$$\begin{cases} 4x^2 & = 0 \\ 2y & = 0 \end{cases}$$

którego jedynym rozwiązaniem jest punkt $P_0(0, 0)$. Następnie liczymy pochodne cząstkowe rzędu 2:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Na ich podstawie tworzymy macierz Hessego:

$$H_f(x, y) = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Obliczamy wartości minorów dla punktu stacjonarnego:

$$H_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad M_1 = 0,$$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Kryterium nie rozstrzyga o istnieniu ekstremum, zatem wymagane jest dodatkowe badanie, korzystając z definicji ekstremum.

W dowolnym sąsiedztwie S punktu $P_0(0,0)$, dla punktów $(x,y) \in S$, takich że $(x,y) \neq (0,0)$, zachodzą nierówności

$$f(x,y) = x^4 + y^2 > 0 = f(0,0)$$

czyli z definicji ekstremum wynika, że w punkcie $P_0(0,0)$ jest minimum lokalne.

Przykład 18.

Znaleźć na płaszczyźnie $0xy$ taki punkt, aby suma kwadratów jego odległości od trzech prostych o równaniach:

$$\begin{cases} x &= 0 \\ y &= 0 \\ x - 2y - 16 &= 0 \end{cases}$$

była najmniejsza.

Rozwiązanie.

Jeżeli $P(x,y)$ jest szukanym punktem, to odległość od pierwszej prostej wynosi $|x|$, od drugiej $|y|$, a od trzeciej $\dfrac{|x-2y-16|}{\sqrt{5}}$. Suma kwadratów tych odległości jest równa:

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + \frac{(x-2y-16)^2}{5}$$

Dziedziną funkcji jest $\mathbf{R}^2$.

Wyznaczmy ekstremum tej funkcji:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + \frac{2}{5}(x-2y-16) = \frac{4}{5}(3x-y-8)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{5}(9y-2x+32)$$

Szukamy punktu stacjonarnego rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} 3x - y &= 8 \\ -2x + 9y &= -32 \end{cases}$$

Punktem stacjonarnym jest punkt $\left(\dfrac{8}{5}, -\dfrac{16}{5}\right)$.

Pochodne cząstkowe rzędu drugiego wynoszą:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{12}{5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{18}{5} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{4}{5}$$

Hesjan dla tego punktu:

$$H_f\left(\frac{8}{5}, -\frac{16}{5}\right) = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

Ponieważ oba minory są dodatnie:

$$M_1 = \frac{12}{5} > 0 \qquad M_2 = \frac{12}{5} \cdot \frac{18}{5} - \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 8 > 0$$

zatem mamy do czynienia z minimum:

$$f_{min} = f\left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right) = \frac{128}{5}$$

4. Zadania

1. Wyznaczyć ekstremum funkcji wielu zmiennych.

a) $f(x, y, z) = -x^2 - y^2 + yz - z^2 + x + y$
Odp. $f_{max} = f(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{7}{12}$

b) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$
Odp. $f_{min} = f(24, -144, -1) = -6913$

c) $f(x, y, z) = x + y + z + \dfrac{16}{xyz}$
Odp. $f_{max} = f(-2, -2, -2) = 14$ $\qquad f_{min} = f(2, 2, 2) = 14$

d) $f(x, y, z) = \sin x + \sin y - \sin(x + y + z)$,
$D : 0 < x < \pi, 0 < y < \pi, 0 < z < \pi$
Odp. $f_{max} = f(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 4$

e) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2$
Odp. Brak ekstremum.

2. Wyznaczyć ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

a) $f(x, y) = x^2 + 8y^3 - 6xy + 1$ Odp. $f_{min} = f(1, -\frac{1}{2}) = 0$

b) $f(x, y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$ Odp. $f_{max} = f(4, 4) = 12$

c) $f(x,y) = e^{(x/2)} \cdot (x + y^2)$ Odp. $f_{min} = f(-2,0) = -\frac{2}{e}$

d) $f(x,y) = 4xy - 4x - 2y$ Odp. Brak ekstremum.

e) $f(x,y) = 3\ln(\frac{x}{6}) + 2\ln(y) + \ln(12 - x - y)$ Odp. $f_{max} = f(6,4) = 5\ln(2)$

3. Rozwiązać zadania z treścią.

a) Obliczyć największą objętość prostopadłościanu przy warunku, że długość jego przekątnej wynosi $2\sqrt{3}$.

Odp. $V = 8$.

b) Na paraboli $y^2 = 4x$ wyznaczyć punkt położony najbliżej prostej $x - y + 4 = 0$.

Odp. $P(1,2)$.

c) Liczbę dodatnią a przedstawić w postaci sumy takich trzech składników x, y, z dodatnich, żeby ich iloczyn był największy.

Odp. $x = \frac{a}{3}, \quad y = \frac{a}{3}, \quad z = \frac{a}{3}$.

d) W trójkącie o wierzchołkach $A(x_1, y_1)$,$B(x_2, y_2)$,$C(x_3, y_3)$ wyznaczyć taki punkt $P(x,y)$, aby suma kwadratów jego odległości od trzech wierzchołków była minimalna.

Odp. $P(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3})$.

Podziękowania

Autorka chce podziękować recenzentom za wnikliwą analizę i cenne uwagi do artykułu.

Literatura

1. M.Góra, *Formy kwadratowe*, `https://home.agh.edu.pl/~gora/algebra_ggios/Wyklad10.pdf`, /dostęp 2022 X/
2. R. Grzymkowski, *Matematyka zadania i odpowiedzi*, WPKJS, Gliwice 2022.
3. W.P.Minorski, *Zbiór zadań z matematyki wyższej*, WNT, Warszawa 1974.
4. J. Piszczała, M. Piszczała, B. Wojcieszyn, *Matematyka w zadaniach*, PWN, Warszawa 1981.
5. R.Rałowski, *Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych*, `http://prac.im.pwr.edu.pl/~ralowski/dydaktyka/analiza/pomoce/maxima.pdf`, /dostęp 2022 X/