TECHNIKA TRANSPORTU SZYNOWEGO

Stanisław BOCIAN

NOWY SPOSÓB WYZNACZANIA NAJMNIEJSZEJ WSPÓLNEJ WIELOKROTNOŚCI (NWW) LICZB NATURALNYCH. INTERPRETACJA GRAFICZNA, WIZUALIZACJA ORAZ PROGRAMY W JĘZYKU BASIC I C^{++}

Streszczenie

W artykule omówiony został nowy sposób wyznaczania Najmniejszej Wspólnej Wielokrotności (NWW) liczb naturalnych. Może on być stosowany do wszelkiego rodzaju obliczeń w różnych programach komputerowych. Jest znacznie prostszy od obecnie stosowanych algorytmów NWW liczb naturalnych, co znacznie zmniejsza złożoność czasową i pamięciową obliczeń wykonywanych przez komputer.

WSTĘP

W pracy [1] przedstawiono wraz z dowodem nowy sposób wyznaczania NWW liczb naturalnych. Obecnie zostanie przedstawiona interpretacja graficzna, wizualizacja oraz programy napisane w języku C^{++}.

Nowy algorytm wyznaczania NWW liczb naturalnych umożliwił przeprowadzenie dowodu na, złożoność półgrup charakterystycznych automatów skończonych asynchronicznych zdeterminowanych silnie spójnych $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected) i jego rozszerzeń stanowych związanych z izomorfizmami EXT $DFASC_2$ (deterministic finite asynchronous strongly connected extensions). Korzystając z nowego sposobu wyznaczania Najmniejszej Wspólnej Wielokrotności (NWW) liczb naturalnych obliczono złożoność półgrup charakterystycznych automatów z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ pod wpływem alfabetu dwuliterowego $\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1\}$ dla słów $x_0 = \sigma_0\sigma_1$; $x_1 = \sigma_1\sigma_0$, [2÷4]. Stwierdzono także, że suma prosta i iloczyn prosty automatów z klasy $DFASC_2$ oraz EXT $DFASC_2$ są izomorficzne [5].

Tradycyjny sposób wyznaczania NWW liczb naturalnych przedstawiono między innymi w następujących pracach [6÷8]. Obecnie przedstawimy interpretacje graficzną nowego sposobu wyznaczania NWW liczb naturalnych.

1. INTERPRETACJA GRAFICZNA NOWEGO SPOSOBU WYZNACZANIA NWW LICZB NATURALNYCH

Dla przeprowadzania dowodów na złożoności półgrup charakterystycznej sumy i iloczynu prostego automatów z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ istotne jest pokazanie NWW w odpowiedniej interpretacji graficznej.

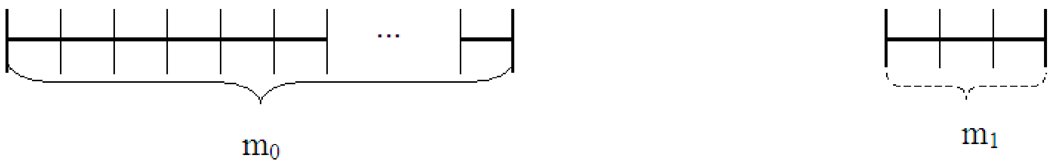
Niech m_0, m_1 liczby naturalne, $m_0 > m_1$; „k” najmniejsza wielokrotność liczby m_1 w m_0.

$d_0 = m_0 - k\cdot m_1$.

Jeśli $d_0 = 0$, to $m_0 = k\cdot m_1$, wtedy najmniejsza wspólna wielokrotność liczb naturalnych

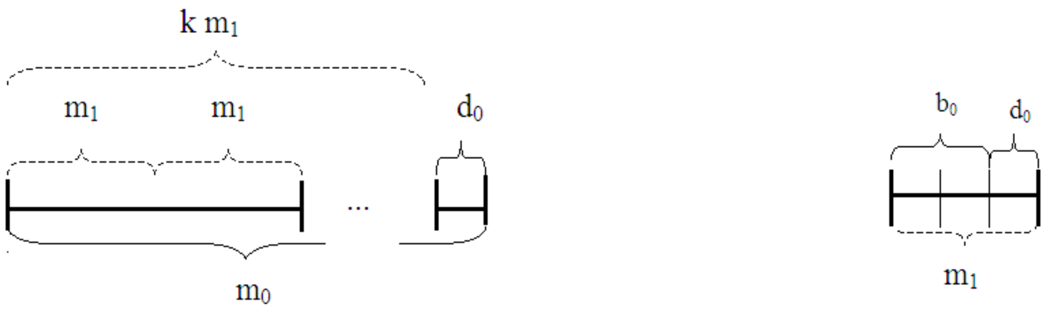
$[m_0, m_1] = m_0$

W przypadku $d_0 \neq 0$ wyznaczamy $[m_0, m_1]$ następująco:



Rys. 1. Graficzne przedstawienie liczby $m_{0,}$ $m_{1,}$ (liczby stanów automatu A i B)

$d_0 = m_0 - k\, m_1$; $b_0 = m_1 - d_0$.



Rys. 2. Pierwszy etap wyznaczania NWW $[m_0, m_1]$

$d_1 = m_0 - b_0 - k\, m_1$; $b_1 = m_1 - d_1$

albo

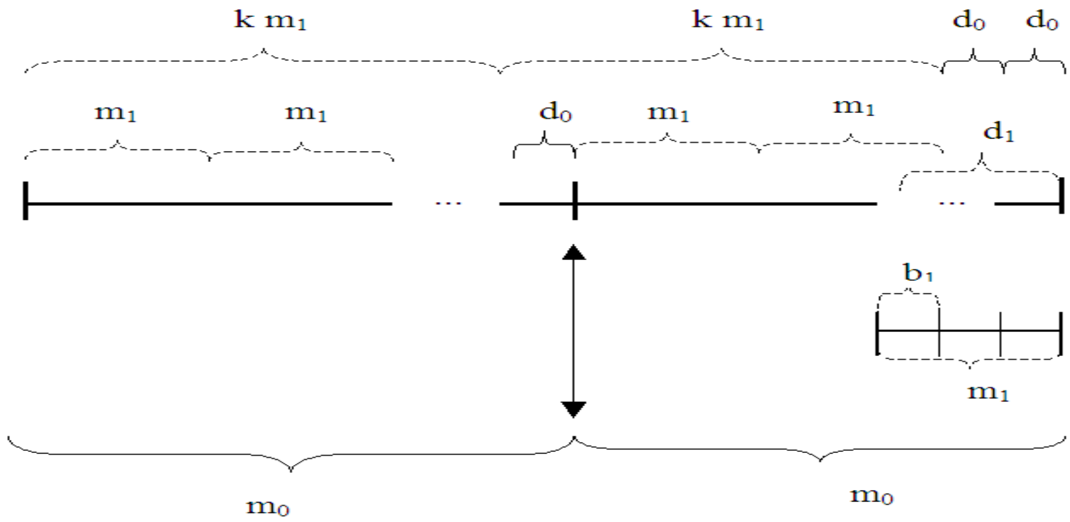
$d_1 = d_0 - b_0$

$d_1 = d_0 - (m_1 - d_0\,) = \mathbf{2\, d_0 - m_1}$

$d_1 = m_0 - k_0\, m_1 - m_1 + d_0$ czyli

$d_1 = m_0 - m_1\,(k_0 +1) + d_0$

Graficznie możemy to przedstawić wykorzystując jedną z zależności na $\mathbf{d_1}$ czyli $\mathbf{d_1 = 2d_0 - m_1}$ w następujący sposób:



Rys. 3. Drugi etap wyznaczania NWW $[m_0, m_1]$

Postępując analogicznie według podanego algorytmu wyznaczamy d_2 ,..., d_{w-2}, d_{w-1} oraz b_1 ,..., b_{w-2}, aż do $d_{w-1} = m_0 - b_{w-2} - k \cdot m_1 = 0$, co umożliwi nam wyznaczanie NWW liczb naturalnych m_0, m_1 i wtedy $[m_0, m_1] = w \cdot m_0$

Niech m_0, m_1 liczby naturalne, $m_0 > m_1$; $k = m_0/m_1$ (liczba całkowita z dzielenia bez reszty)

$d_0 = m_0 - k \cdot m_1$.

Jeśli $d_0 = 0$, to $m_0 = k \cdot m_1$, i wtedy $[m_0, m_1] = m_0$

W przypadku $d_0 > 0$ wyznaczamy $[m_0, m_1]$ następująco:

$\mathbf{d_0 = m_0 - k \cdot m_1}$	$\mathbf{b_0 = m_1 - d_0}$
$\mathbf{d_1 = d_0 - b_0}$	$\mathbf{b_1 = m_1 - d_1}$
$\mathbf{d_2 = d_0 - b_1}$	$\mathbf{b_2 = m_1 - d_2}$
.	.
.	.
.	.
$\mathbf{d_{w-2} = d_0 - b_{w-3}}$	$\mathbf{b_{w-2} = m_1 - d_{w-2}}$
$\mathbf{d_{w-1} = d_0 - b_{w-2} = 0}$	

W przypadku, gdy $d_i < 0$; gdzie: $0 < i < w - 1$, to w miejsce b_i wpisujemy bezwzględną wartość liczby d_i i obliczenia kontynuujemy. Przedstawiony sposób umożliwia obliczenie najmniejszej wspólnej wielokrotności według następującego wzoru: $\mathbf{[m_0, m_1] = m_0 \cdot w}$.

Dowód.

Załóżmy, że $0 < m_1 < m_0$ są liczbami naturalnymi. Wtedy $m_0 = k \cdot m_1 + d_0$, gdzie „k" jest liczbą naturalną oraz $0 \le d_0 < m_1$.

Gdyby $d_0 = 0$, to $[m_0, m_1] = m_0$.

Załóżmy więc, że $d_0 > 0$

Określmy ciąg liczb całkowitych b_i i d_i w następujący sposób:

$b_0 = m_1 - d_0$; $d_1 = d_0 - b_0$

$$b_i = \begin{cases} m_1 - d_i & \text{gdy} \quad 0 < d_i < m_1 \\ -d_i & \text{gdy} \quad d_i < 0 \end{cases}$$

$d_{i+1} = d_0 - b_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$

Gdyby dla pewnego „i", $d_i = 0$, to kończymy proces wyznaczania d_i

Załóżmy zatem, że $d_i \neq 0$.

I. Pokażemy najpierw, że

$0 < b_i < m_1$ oraz $|d_i| < m_1$. (1)

Oczywiście $0 < b_0 < m_1$, gdyż $0 < d_0 < m_1$

$-m_1 < d_1 = d_0 - b_0 < d_0 < m_1$

$$b_1 = \begin{cases} m_1 - d_1 & \text{gdy} \quad d_1 > 0 \\ -d_1 & \text{gdy} \quad d_1 < 0 \end{cases}$$

zatem $0 < b_1 < m_1$

Załóżmy teraz, że (1) jest prawdziwa dla pewnego „i".

Wtedy $-m_1 < d_0 - m_1 < d_{i+1} = d_0 - b_i < d_0 < m_1$

$$b_{i+1} = \begin{cases} m_1 - d_{i+1} & \text{gdy} \quad m_1 > d_{i+1} > 0 \\ -d_{i+1} & \text{gdy} \quad -m_1 < d_{i+1} < 0 \end{cases}$$

Stąd widać, że $0 < b_{i+1} < m_1$.

Zatem potwierdziliśmy, że z prawdziwości (1) dla „i" wynika prawdziwość (1) dla (i+1).

II. Pokażemy teraz, że $d_i \equiv (i+1) \cdot d_0 \pmod{m_1}$; (2)

$m_0 \equiv d_0 \pmod{m_1}$; $b_0 = m_1 - d_0 \equiv -d_0 \pmod{m_1}$

Wynika to z faktu, że:

$$\begin{array}{ll} & m_1 \equiv 0 \pmod{m_1} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + \\ & -d_0 \equiv -d_0 \pmod{m_1} \\ \hline \text{to} & m_1 - d_0 \equiv -d_0 \pmod{m_1} \end{array}$$

$d_1 = d_0 - b_0 \equiv d_0 + d_0 \pmod{m_1} = 2\, d_0 \pmod{m_1}$

Zatem (2) jest prawdziwa dla i = 0, i = 1 ,

Załóżmy, że (2) zachodzi dla pewnego „i"

$$\text{wtedy} \quad b_i = \begin{cases} m_1 - d_i & \text{gdy} \quad d_i > 0 \\ -d_i & \text{gdy} \quad d_i < 0 \end{cases}$$

Zatem $b_i \equiv -d_i \pmod{m_1} \equiv -(i+1) \cdot d_0 \pmod{m_1}$ (z założenia indukcyjnego).

Stąd $d_{i+1} = d_0 - b_i \equiv d_0 + (i+1) \cdot d_0 \pmod{m_1} \equiv (i+2) \cdot d_0 \pmod{m_1}$.

To dowodzi (2) dla (i + 1).

III. Z równości $w \cdot m_0 = w \cdot k \cdot m_1 + w \cdot d_0$ wynika, że $w \cdot m_0 = [m_0, m_1]$ wtedy i tylko wtedy „w" jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $w \cdot d_0 \equiv 0 \pmod{m_1}$.

Niech „w" będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $w \cdot d_0 \equiv 0 \pmod{m_1}$.

Wtedy z (2) ; $d_{w-1} \equiv w \cdot d_0 \pmod{m_1} \equiv 0 \pmod{m_1}$.

Ponieważ z (1) wynika, że $|d_{w-1}| < m_1$, więc musi być $d_{w-1} = 0$.

Odwrotnie, jeśli „w" jest najmniejszą liczbą naturalną taką, że $d_{w-1} = 0$, to z powyższej konstrukcji najmniejszej wspólnej wielokrotności wynika, że $w \cdot d_0 \equiv 0 \pmod{m_1}$ i $w \cdot m_0 = [m_0, m_1]$.

W przypadku trzech liczb naturalnych m_0, m_1, m_2 wyznaczanie NWW $[m_0, m_1, m_2]$ odbywa się w sposób sekwencyjny $[[m_0, m_1], m_2]$. Wyznaczamy $[m_0, m_1] = p$ i dalej $[p, m_2]$. Stąd $[m_0, m_1, m_2] = [p, m_2]$.

W tym przypadku wyznaczamy nowe k_1. Wtedy k_1 oznacza całkowitą wielokrotność liczby p w m_2 dla $m_2 > p$ lub m_2 w p gdy $p > m_2$.

Wtedy dla trzech liczb naturalnych wyznaczamy NWW w następujący sposób:

$\mathbf{d_{0,0} = m_2 - k_1 p}$, $\mathbf{b_{0,0} = p - d_{0,0}}$, $\mathbf{m_2 > p}$

$\mathbf{d_{1,1} = d_{0,0} - b_{0,0}}$, $\mathbf{b_{1,1} = p - d_{1,1}}$

$\mathbf{d_{2,2} = d_{0,0} - b_{1,1}}$ $\mathbf{b_{2,2} = p - d_{2,2}}$

.

.

.

$\mathbf{d_{t-2,t-2} = d_{0,0} - b_{t-3,\ t-3}}$ $\mathbf{b_{t-2,\ t-2} = p - d_{t-2,\ t-2}}$

$\mathbf{d_{t-1,t-1} = d_{0,0} - b_{t-2,\ t-2} = 0}$

Wtedy $\mathbf{[m_0, m_1, m_2] = [[m_0, m_1]\ m_2] = [p, m_2]}$ **.**

W przypadku gdy $p > m_2$ to $d_{0,0} = p - k_1 \cdot m_2$, $b_{0,0} = m_2 - d_{0,0}$ i dalej postępujemy jak wyżej

W przypadku większej ilości liczb obliczenia wykonujemy sekwencyjnie

$[m_0, m_1] = a_1$

$[a_1, m_2] = a_2$

$[a_2, m_3] = a_3$

.

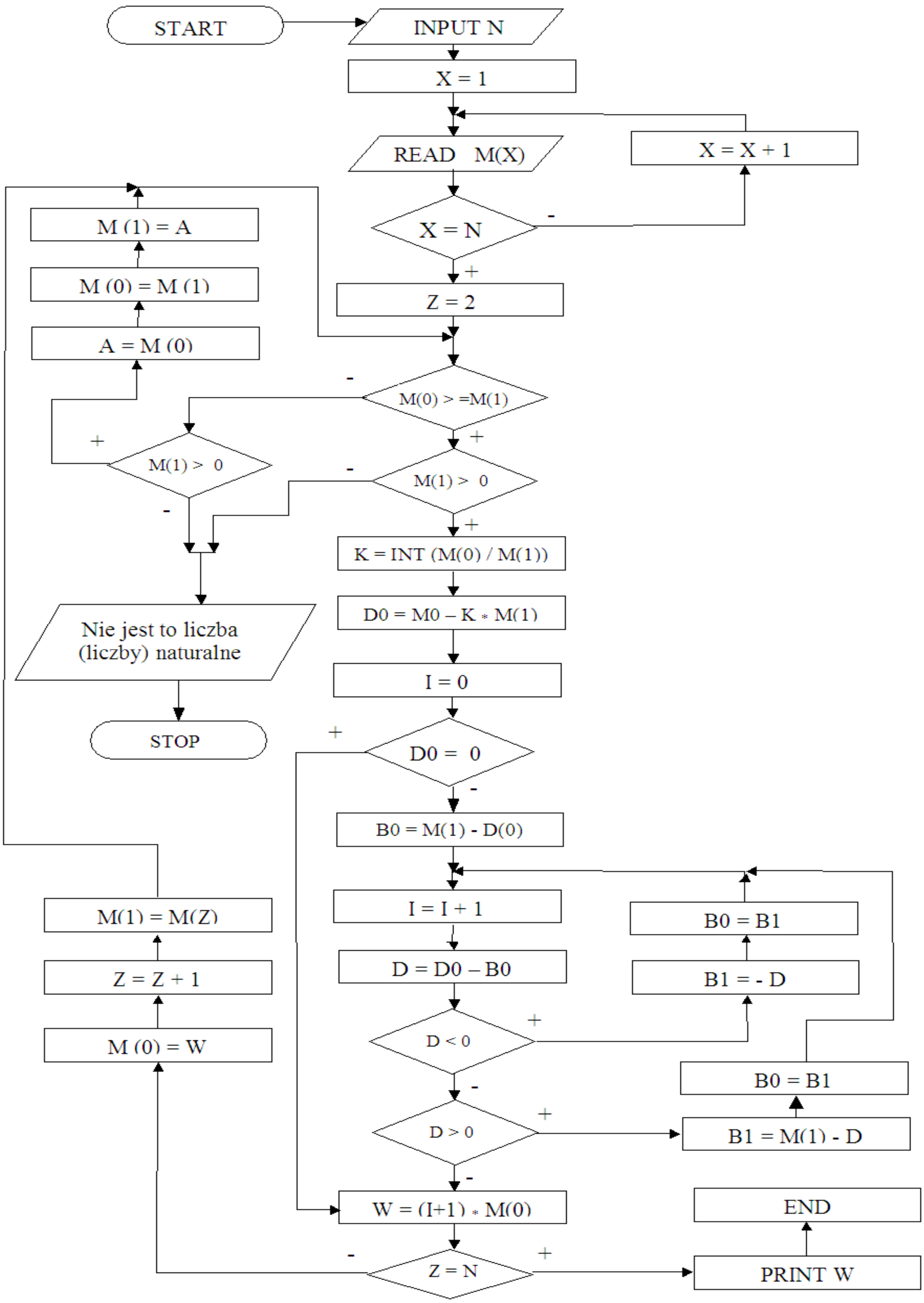
.

.

$[a_{k-1}, m_k] = a_k$

Zatem $[m_0, m_1, ..., m_k] = a_k$ **C.B.D.O.** (co było do okazania)

Na rys. 4 przedstawiono algorytm nowego sposobu wyznaczania NWW liczb naturalnych



Rys. 4. Algorytm nowego sposobu wyznaczania NWW liczb naturalnych

Program w języku Qbasic dla dwóch liczb naturalnych

```
10    CLS : INPUT  "N" ; N
20    DIM M(N)
30    FOR X = 1 TO N
40    PRINT  "M ("; X; ")" ;  :  INPUT  M (X-1)
50    NEXT X
60    Z = 2
70    IF M (0) > = M (1)   THEN  IF   M (1) > 0   THEN   GOTO  110
80    IF M (1) > M (0)  THEN  A = M (0) : M (0) = M (1) : M (1) = A:  GOTO  70  ELSE
      GOTO 90
90    PRINT "Nie jest to liczba (liczby) naturalne"
100   STOP
110   K = INT (M (0) / M (1))
120   DO = M (0) – K *  M (1)
130   I = 0
140   IF  DO = 0   THEN   GOTO   200
150   B0 = M (1) – D0
160   I = I + 1
170   D = D0 – B0
180   IF D < 0   THEN   B1 = –D: B0 = B1:   GOTO   160
190   IF D > 0   THEN   B1 = M (1) – D: B0 = B1:   GOTO   160
200   W = (I + 1)  *  M(0)
210   IF Z = N   THEN   PRINT  W:   END
220   M0 = W: Z = Z + 1
230   M (1) = M(Z) : GOTO 70
```

Program w języku C^{++} dla ilości liczb naturalnych wynikających z zadeklarowanej tablicy.

```
//-----------------------------------------------------------
class TNww1{
  int N;
  int *M;
  int indeks;
public:
  bool KontrolaOK(String S);
  void UtworzenieTablicy(int n){N=n; M=new int[N]; indeks=0;};
  void UsuniecieTablicy(){delete [] M;};
  void DodajDoTablicy(int a){M[indeks++]=a;};
  int  Obliczenie1();
  int  Obliczenie2();
};
//-----------------------------------------------------------
```

Wersja I (zgodna z algorytmem rys.4)

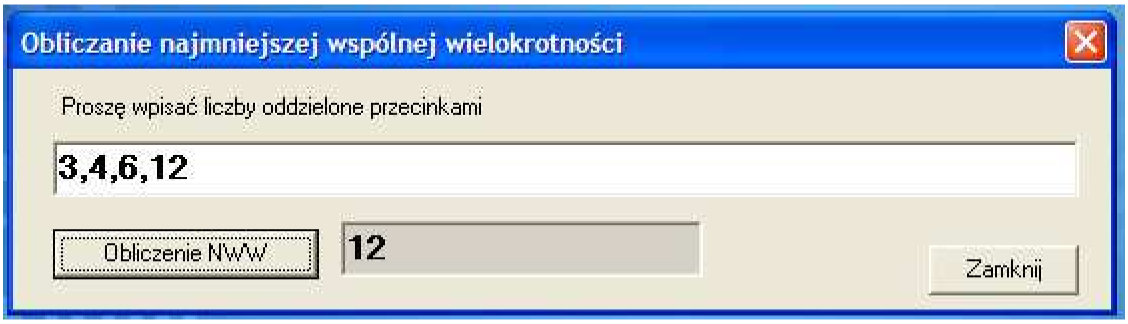
```
//W tablicy M[N] znajdują się liczby podane przez użytkownika.
int TNww1::Obliczenie1(){
int m0,m1,  b,d,k,i,  w;
  w=M[0];
```

```
  for(int n=1;n<N;n++){
     m0=w; m1=M[n];
     if(m0<m1){m0=M[n]; m1=w;};
     k=m0 / m1;
     d=m0-k*m1;
     if(d==0)w=m0;
     else{
        i=0;
        do{
           i++;
           if(d<0)b=-1*d; else b=m1-d;
           d=m0-b-k*m1;
        }while(d);
        w=(i+1)*m0;
     };
  };
  return w;
}
//-----------------------------------------------------------
```

Wersja II (zoptymalizowana)

```
int TNww1::Obliczenie2(){
int m0,m1,  b,d,k,i,  w;
  w=M[0];
  for(int n=1;n<N;n++){
     m0=w; m1=M[n];
     if(m0<m1){m0=M[n]; m1=w;};
     k=m0 / m1;
     i=0; b=0;
     do{
        i++;
        d=m0-b-k*m1;
        if(d<0)b=-1*d; else b=m1-d;
     }while(d);
     w=i*m0;
  };
  return w;
}
//-----------------------------------------------------------
```

Na rys. 5 przedstawiono wydruk zrealizowanego program NWW dla liczb 3,4,6,12.



Rys. 5. Interpretacja graficzna obliczania NWW liczb naturalnych **(**3,4,6,12**)**

PODSUMOWANIE

Podczas badań nad złożonością półgrup charakterystycznych automatów A i B asynchronicznych zdeterminowanych skończonych silnie spójnych i ich rozszerzeń związanych z izomorfizmami $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ uzyskano rezultaty, z których wynika, że złożoność ta zależy między innymi od wartości NWW liczb stanów tych automatów [2 ÷ 4]. Wyniki te nie byłyby możliwe bez znalezienia nowej metody wyznaczania NWW liczb naturalnych. Wynika stąd, ze badania w warstwach zewnętrznych matematyki (zastosowania matematyki) pozwoliły na uzyskanie wyników, które powinny powstać w jądrze matematyki (teoria matematyki). Co więcej wynik ten nie byłby możliwy do uzyskania gdyby takich badań nie przeprowadzono. Wynika stąd , że badania zjawisk natury technicznej umożliwiło uzyskanie wyniku w naukach podstawowych – w matematyce teoretycznej.

Nowy sposób wyznaczania NWW liczb naturalnych umożliwia:

1. przeprowadzenie dowodu dla automatów z klasy $DFASC_2$ i EXT $DFASC_2$ z którego wynika, że suma prosta i iloczyn prosty półgrup charakterystycznych tych automatów, które można uważać za realizację odpowiednio sekwencyjnych i równoległych obliczeń są izomorficzne [5].
2. algorytm ten, który może być stosowany do wszelkiego rodzaju obliczeń w różnych programach komputerowych jest znacznie prostszy od obecnie stosowanych algorytmów wyznaczania NWW liczb naturalnych, co znacznie zmniejsza złożoność czasową i pamięciowa komputerów

A NEW WAY DETERMINE TO SMALLEST COMMON MULTIPLE (SCM) OF NATURAL NUMBERS. GRAPHIC INTERPRETATION, VISUALIZATION AND PROGRAMS IN BASIC AND C^{++} LANGUAGES

Abstract

A new way of determining the SCM (Smallest Common Multiple) of natural numbers can be used for all kinds of calculation in the different computer programs. It is considerable simpler than the currently used SCM algorithms of natural numbers. The algorithms was applied to study of the characteristic semigroups complexity of the strongly consistent asynchronous automata

BIBLIOGRAFIA

1. Bocian S.: A new method of calculating the smallest common multiple, Computational topology and geometry and computation in teaching mathematic, Section of computation in teaching of mathematic, Universidad de Sevilla, agosta 1987, pp 41–48.
2. Bocian S.: Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów rozszerzeń związanych z izomorfizmami, Transcomp – XIV International Conference Computer Systms Aided Sciences, Industry and Transport(Logistyka nr.6/2010 str. 303–315), Zakopane 2010.
3. Bocian S.: Złożoność półgrupy charakterystycznej iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych ustalonych analogów rozszerzeń związanych z izomorfizmami, Transcomp – XIV International Conference Computer Systms Aided Sciences, Industry and Transport(Logistyka nr.6/2010 str. 317–334), Zakopane 2010.
4. Bocian S.: Złożoność półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych, Transcomp – XIV International Conference Computer Systms Aided Sciences, Industry and Transport (Logistyka nr. 6/2010 str. 335–347), Zakopane 2010.
5. Bocian S.: Izomorfizm półgrupy charakterystycznej sumy prostej i iloczynu prostego automatów asynchronicznych silnie spójnych i ustalonych analogów ich rozszerzeń Transcomp – XIV International Conference Computer Systms Aided Sciences, Industry and Transport(Logistyka nr.6/2010 str. 349–356), Zakopane 2010.
6. Kostrykin A. I.: Wstęp do algebry. PWN, Warszawa 1984, str.43.
7. Mostowski A., Stark M.: Elementy algebry wyższej. PWN, Warszawa 1968, str.182.
8. Sierpiński W.: Arytmetyka teoretyczna. PWN, Warszawa 1968, str.107.

Autor:
Stanisław BOCIAN