

# ◆◆◆◆ ORIGINALNE PRACE ◆◆◆◆ I PRZYCZYNKI

---

Maurycy CIUPAK

Biuro Prognoz Hydrologicznych IMGW-PIB — Kraków

## WYZNACZANIE DWUWYMIAROWYCH CHARAKTERYSTYK PROJEKTOWYCH WEZBRAŃ SZTORMOWO-ROZTOPOWYCH W ZURBANIZOWANYM OBSZARZE PORTU MORSKIEGO W USTCE – WYBRANE PROBLEMY

### DETERMINING THE BIVARIATE DESIGN CHARACTERISTICS OF THE STORM-SNOWMELT FLOODS IN AN URBAN AREA OF A SEAPORT IN USTKA – SELECTED PROBLEMS

Próbując opisać zjawiska występujące naturalnie w przyrodzie, takie jak wezbrania (powodzie), należy je traktować jako niestacjonarne. Zaburzenia wpływające na niestacjonarność mogą mieć charakter naturalny lub wynikać z antropopresji.

Problemem jest odpowiedź na pytanie, jak bardzo złożonego opisu deterministycznego wymaga niestacjonarność badanego zjawiska. Czy można zastosować stosunkowo prosty stacjonarny model stochastyczny? Odpowiedź na to pytanie ma istotny wpływ na praktykę planowania i projektowania zasobów wodnych. W przypadku analizy jednowymiarowej niestacjonarność zmiennej losowej wpływa na sposób wyznaczania takiej charakterystyki, jak okres powtarzalności  $T$  i tym samym na prawdopodobieństwo przewyższenia  $p$ .

Problem staje się bardziej skomplikowany w momencie przejścia od analizy jednowymiarowej do analizy np. dwuwymiarowej. Zastosowanie do estymacji parametrów dwuwymiarowej dystrybuanty funkcji kopuli (ang. *copula function*) ułatwia uwzględnianie w analizie częstości stacjonarności lub niestacjonarności analizowanego zjawiska (Domino i in., 2014). Kolejnym problemem w analizie dwuwymiarowej jest interpretacja otrzymanych wyników. Między innymi zagadnienie dotyczy: 1) porównywania okresów powtarzalności  $T$  lub/i prawdopodobieństw

przewyższenia  $p$  zdefiniowanych w różnych dziedzinach i w różnych zbiorach, 2) porównywanie jednowymiarowych (brzegowych) okresów powtarzalności, prawdopodobieństw przewyższenia z ich dwuwymiarowymi odpowiednikami oraz 3) posługiwanie się w analizach inżynierskich pojęciem okresu powtarzalności.

Funkcje kopuli są szeroko stosowane w hydrologii, np. do oceny zagrożenia powodzią (Karmakar, Simonovic, 2008, 2009). De Michele i in., (2007) wykonał wielowymiarową analizę częstości wezbrania sztormowego opisanego wysokością fali, czasem trwania sztormu, kierunkiem sztormu i czasem między sztormami, natomiast De Waal i Van Gelder (2005) zastosowali metodę kopuli do modelowania ekstremalnych wysokości fali i okresów ich występowania. Literatura światowa w odniesieniu do sektora inżynierii brzegowej (Klein i in., 2008) jest jednak rzadkością.

Celem artykułu jest przybliżenie wymienionej problematyki na przykładzie wyznaczania dwuwymiarowych charakterystyk projektowych wezbrań sztormowo-roztopowych. Do analizy wybrano ujściowy odcinek zlewni Słupi, w obszarze którego jest umiejscowiony mały port morski w Ustce. Port morski jest położony nad otwartym morzem. Usytuowany jest wzdłuż kanału portowego, będącego zarazem ujściowym odcinkiem rzeki. Charakteryzuje się wysokim stopniem infrastruktury portowej, zapewniającej odpowiednie warunki nawigacyjne dla stacjonujących jednostek oraz odpowiednie warunki zabudowy hydrotechnicznej. Głównymi zagrożeniami naturalnymi determinującymi funkcjonowanie portu morskiego są: 1) wezbrania sztormowe wywołane wiatrami dolądowymi w połączeniu ze zjawiskiem cofki, 2) wezbrania zatorowe związane z niekontrolowanymi wzrostami poziomu zwierciadła wody na skutek zatoru lodowego na rzece Słupi oraz zlodzeniem Bałtyku, 3) wezbrania roztopowe, 4) roztopowo-deszczowe i deszczowe, oraz 5) niszczenie brzegów morskich niemających umocnień na skutek falowania, wiatru, prądów morskich oraz ruchów rumowiska. Konsekwencją tych zdarzeń są liczne ograniczenia nawigacyjne związane z wejściem do portu, wypływanie toru wodnego, akwenów portu oraz zalewanie nabrzeży portowych i pobliskich części miasta.

W artykule dwuwymiarowej analizie częstości poddano wezbrania sztormowo-roztopowe wynikające z wahań stanu wody w ujściowym odcinku rzeki Słupi, które są efektem zarówno oddziaływania morza (sztormu), jak i rzeki (wezbrania roztopowe). Parametry łącznej dystrybuanty estymowano za pomocą 2-parametrowej kopuli archimedesowskiej BB1 (Joe, 1997; Chowdhary i in., 2011; Ciupak, 2011), charakteryzującej się dwoma ciężkimi ogonami. Zakres proponowanego artykułu ukierunkowany jest głównie na wyznaczanie dwuwymiarowych charakterystyk projektowych oraz na interpretację otrzymanych prawdopodobieństw przewyższenia.

## Model 2D wezbrań sztormowo-roztopowych

W artykule zmienną losową 2D utworzyły: najwyższy poziom morza zaobserwowany w czasie wezbrań sztormowych w profilu wodowskazowym Ustka  $H_{UST}$  (cm) i korespondujący z tym zdarzeniem przepływ w ujściowym odcinku rzeki Słupi w profilu wodowskazowym Charnowo  $Q_{CHA}$  ( $m^3s^{-1}$ ) (Ciupak, 2013). Wybrane do analizy statystycznej zdarzenia dotyczyły incydentów jednoczesnego wystąpienia sztormu na Bałtyku w rejonie portu morskiego Ustka i zaobserwowanych w tym czasie maksymalnych przepływów wezbrań roztopowych na rzece Słupi w sezonie zimowym w latach 1967-2005. Dane wejściowe do modelu uzyskano z katalogu wezbrań i obniżeń sztormowych pomiarów morza oraz ekstremalnych poziomów wód na polskim wybrzeżu (Wiśniewski, Wolski, 2009). Autorzy tej monografii do identyfikacji wezbrań sztormowych przyjęli wartość progową poziomu morza (Majewski i in., 1983) odpowiadającą poziomowi 570 cm N.N. (Normal Null), tj. w odniesieniu do poziomu morza wyznaczonego dla Amsterdamu. Za początek wezbrania sztormowego przyjęto moment, w którym poziom morza przekracza wartość dziennego poziomu odniesienia, tzw. napełnienia. Powyższy parametr określa hipotetyczny poziom morza, który zostałby odnotowany, gdyby nad morzem nie występowały czynniki meteorologiczne mające wpływ na spiętrzanie wody.

### Hydro-meteorologiczna charakterystyka zlewni rzeki Słupi

Źródła rzeki Słupi znajdują się na Pojezierzu Zachodnio-Pomorskim w pobliżu niedużej wsi Sierakowska Huta i wypływają z torfowisk położonych na wysokości ok. 178 m n.p.m. Na rysunku 1 zaznaczono pas Pobrzeża Słowińskiego i Pojezierza Zachodnio-Pomorskiego ze wzniesieniami przekraczającymi 150 m n.p.m. Oznacza to, że Słupia bierze swój początek na stosunkowo wysokim obszarze w odniesieniu do długości rzeki. Jej charakter jest zatem zbliżony do rzek górskich. Wezbrania charakteryzują się dużą gwałtownością i stosunkowo krótkim czasem trwania. Niebezpieczne wezbrania są skutkiem gwałtownych opadów deszczu lub zsynchronizowania wystąpienia sztormu na Bałtyku ze zwiększonym odpływem wody roztopowej lub opadowej.

Na terenach leżących w bezpośrednim sąsiedztwie Bałtyku morski charakter klimatu jest dodatkowo wzmacniany przez przemieszczające się nad Polską oceaniczne masy powietrza. Główną przyczyną tego zjawiska jest wędrowka niżów atlantyckich (Chromow, 1977). Niże docierające do Europy tworzą się u brzegów Ameryki, na atlantyckim froncie polarnym przebiegającym na wysokości 50-60° szerokości geograficznej północnej i oddzielającym masy powietrza polarnego od zwrotnikowego. Niże atlantyckie wędrują na wschód ku wybrzeżom Europy

Zachodniej i zależnie od sytuacji barycznej droga ich wędrówek może się różnić. Zimą niżę podążają w pobliże Wysp Brytyjskich, a następnie kierują się na wschód i na północo-wschód. Część niżów przemieszcza się w kierunku południowym tak, że ośrodek niżu znajduje się nad północnymi Niemcami lub nad zachodnim Bałtykiem (Popławska, Rawa, 2003). Latem trasy niżów na półkuli północnej przesuują się znacznie na północ. W konsekwencji liczba niżów docierających do Europy jest mniejsza. Ma to wpływ na dużą zmienność pogody. Występują tam łagodne zimy i chłodne lata. Wpływ samego Bałtyku jest zauważalny w wąskiej strefie przybrzeżnej, natomiast nakładające się wpływy Oceanu Atlantyckiego i Morza Bałtyckiego powodują, że cały obszar zlewni Słupi charakteryzują łagodniejsze zimy i nieco chłodniejsze lata oraz mała średnia amplituda roczna temperatury powietrza (Ciupak, 2012). Charakterystyczną cechą klimatu zlewni Słupi jest wyraźne przesunięcie maksymalnych średnich sum opadu na jesień i początek zimy. W połączeniu z większą częstością pojawiania się u południowych wybrzeży Bałtyku w tym okresie sztormów stwarza to dodatkowe zagrożenie wezbraniami sztormowymi w ujściowym odcinku Słupi i jest szczególnie nieprzyjazne funkcjonowaniu portu morskiego w Ustce.

Konsekwencją wahań temperatury jest występowanie od strony morza zlodzenia. Zjawisko występujące praktycznie każdego roku w okresie zimowym wykazuje dużą zmienność (Styszyńska, Marsz, 2005). Średni roczny czas zlodzenia podejść



Rys.1. Mapa hipsometryczna. Zlewnia Słupi do profilu wodowskazowego Ustka.

Fig.1. Hypsometric map. Słupia River watershed at the Ustka gauge.

do portu wynosi 2 dni, natomiast zlodzenie akwenów i kanałów portowych ok. 20 dni w roku. Obok zjawisk lodowych na morzu, na rzekach zlewni Słupi pojawia się pokrywa lodowa. Przeciętnie zjawiska lodowe w zlewni Słupi pojawiają się w drugiej połowie grudnia, natomiast w ujściowym odcinku rzeki w pierwszej dekadzie stycznia. Zanik zjawisk lodowych w całej zlewni Słupi obserwowany jest już pod koniec lutego. W sytuacji ruszenia lodów utrudniony odpływ wody roztopowej do Bałtyku pokrytego lodem jest przyczyną zatorów i tym samym gwałtownych wzrostów poziomu zwierciadła wody.

### Podstawy teoretyczne i metodyka wykonywanych obliczeń

W przypadku analizy jednowymiarowej w warunkach stacjonarności wielkości  $T$  i  $p$  zdefiniowane są następująco (Gupta, 2010)

$$T = \frac{\mu}{p} = \frac{\mu}{P(X > x)} = \frac{\mu}{1 - F(x)} \quad (1)$$

gdzie:  $X$  jest zmienną losową opisującą badane zdarzenie,  $\mu > 0$  oznacza liczbę powtórzeń zdarzenia występującego między dwoma realizacjami badanego procesu,  $p = P(X > x)$  jest prawdopodobieństwem zaobserwowania realizacji badanej zmiennej przewyższającej określoną wartość  $x$  i  $F(x) = 1 - p = P(X \leq x)$  określa dystrybuantę zmiennej losowej  $X$ .

Jeżeli postawimy hipotezę, że badane zjawisko jest stacjonarne, tzn. że dystrybuanta  $F(x)$  jest niezależna w czasie i każda realizacja  $x$  jest niezależna od poprzedniej, okres powtarzalności możemy zdefiniować dwoma sposobami (Douglas i in., 2002): 1) jako wartość oczekiwaną liczby realizacji, które muszą upłynąć, zanim zostanie zaobserwowane zdarzenie, którego wielkość przekroczy ustaloną wartość  $x$ , 2) jako wartość oczekiwaną liczby prób między dwoma kolejnymi wystąpieniami zdarzenia przewyższającego  $x$ . W pierwszym przypadku czas, który upłynął od ostatniego przewyższenia, może być znany na podstawie obserwacji historycznej lub nieznany, podczas gdy druga definicja określa ten czas jako równy 0. Oznacza to, że przewyższenie już wystąpiło. Powyższa różnica w definiowaniu  $T$  może być pominięta, gdyż oba sposoby prowadzą do wzoru (1).

W przypadku niestacjonarnych warunków definicja  $T$  staje się bardziej problematyczna (Salas, Obeysekera, 2014; Serinaldi, 2015). Prawdopodobieństwo przewyższenia  $p_j = P(X_j > x) = 1 - F_j(x)$  nie jest już stałe i równe  $p$ , lecz zmienia się w każdym kroku  $j$ , stąd

$$T = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k F_j(x) \quad (2)$$

Z drugiej strony zakładając, że oczekiwana liczba przewyższenia w  $T$  latach jest równa 1, może być wyznaczona jako  $1 = \sum_{j=1}^T (1 - F_j(x))$ , a następnie po podzieleniu równania przez  $T$  i jego odwróceniu otrzymywany jest wzór (Cooley, 2013)

$$T = \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{1 - F_j(x)} \quad (3)$$

Przy przechodzeniu od analizy częstości zdarzeń jednowymiarowych do np. dwuwymiarowych, pojawiają się dodatkowe problemy. W przypadku 1D wartość krytyczna  $x$  definiuje unikalny krytyczny obszar, tj. zbiór wartości taki, że  $X > x$  i nierówność zdefiniowana w mianowniku wzoru (1) jest jednoznaczna. W przypadku analizy 2D mamy wiele wyborów takiego obszaru. Do dalszej analizy wybrano zdarzenia 2-wymiarowe w warunkach stacjonarności. Obliczenia wykonano dla łącznego rozkładu prawdopodobieństwa z zastosowaniem notacji funkcji kopuli.

### Wybrane własności dwuwymiarowej dystrybuanty stacjonarnej zmiennej losowej

W przypadku analizy dwuwymiarowej, z definicji kopuli (Sklar, 1959; Nelson, 2006) wynika, że jest ona łączną dystrybuantą dwóch zmiennych losowych, z których każda osobno podlega rozkładowi równomiernemu na odcinku  $[0, 1]$ . Powyższą zależność można zapisać w postaci

$$C(v_1, v_2) = P(V_1 \leq v_1, V_2 \leq v_2) \quad (4)$$

Funkcjonalna postać funkcji kopuli nie określa rozkładów brzegowych, jedynie określa zależność między dwoma zmiennymi losowymi. Jednocześnie zmienne losowe  $V_1, V_2$  są dystrybuantami zmiennych losowych  $X_1$  i  $X_2$ ,  $V_1 = F_1(X_1)$ ,  $v_1 = F_1(x_1)$  oraz  $V_2 = F_2(X_2)$ ,  $v_2 = F_2(x_2)$ , gdzie  $X_1 = Q_{\text{CHA}}$  i  $X_2 = H_{\text{UST}}$ . W dwuwymiarowym przypadku zmienne losowe  $X_1$  i  $X_2$  mogą łączyć się na różne sposoby (Serinaldi, 2015):  $(X_1 > x_1 \wedge X_2 > x_2)$ ,  $(X_1 > x_1 \vee X_2 > x_2)$  lub  $(X_1 > x_1 | X_2 > x_2)$ . Przytoczone kombinacje są zdarzeniami korespondującymi do łącznych i warunkowych prawdopodobieństw, tj.  $P(X_1 > x_1 \wedge X_2 > x_2)$ ,  $P(X_1 > x_1 \vee X_2 > x_2)$ ,  $P(X_1 > x_1 | X_2 > x_2)$  itd. W odróżnieniu od przypadku jednowymiarowego, nieskończona liczba par wartości  $(x_1, x_2)$  może dzielić te same łączne prawdopodobieństwa.

### Archimedesowska kopuła BB1 dla rozkładu 2-wymiarowej zmiennej losowej $(Q_{CHA}, H_{UST})$

Klasa 2-wymiarowych 2-parametrowych funkcji kopuli BB\* powstaje przez połączenie 1-wymiarowych kopuli z odpowiednią transformatą Laplace'a, np. 1-wymiarowa kopuła Gumbela generuje kopule BB1, BB7. Stosując odpowiednią 1-wymiarową kopulę i transformatę Laplace'a, można utworzyć klasy BB2, BB3, BB4, BB10. Zdarzenia i procesy skrajne (a w tym np. ekstremalne) są związane przede wszystkim z istnieniem spłaszczenia rozkładów prawdopodobieństwa, a także skośności przejawiającymi się w istnieniu, odpowiednio kurtozy oraz ujemnego lub dodatniego współczynnika asymetrii (pogrubione ogony) (Ganguli, Reddy, 2013). Jednym z ważniejszych czynników, który zdecydował o wyborze kopuli, BB1 było to, że funkcja charakteryzuje się dwoma ciężkimi ogonami.

2-parametrowa 2-wymiarowa kopuła BB1 (Joe, 1997) opisana jest wzorem

$$C_{\theta, \delta}^{BB1}(v_1, v_2) = \left\{ 1 + [(v_1^{-\theta} - 1)^\delta + (v_2^{-\theta} - 1)^\delta] \right\}^{-\frac{1}{\theta}} \quad (5)$$

gdzie:  $\theta \in (0; +\infty)$ ,  $\delta \in [1; +\infty)$ , z funkcją generatora archimedesowskiego w postaci  $\varphi(t) = (t^{-\theta} - 1)^\delta$  oraz dolnym  $\tau^l = 2^{\frac{1}{\delta\theta}}$  i górnym  $\tau^u = 2 - 2^{\frac{1}{\delta}}$  indeksem ogona rozkładu prawdopodobieństwa.

Dolny  $\tau^l$  i górny  $\tau^u$  indeks ogona 2D rozkładu prawdopodobieństwa jest wielkością pozwalającą na zmierzenie stopnia powiązania między skrajnymi, odpowiednio dolnymi i górnymi, realizacjami obu zdarzeń brzegowych. Jest wielkością komplementarną w stosunku do badania stopnia liniowych korelacji, gdyż istnienie liniowych korelacji nie gwarantuje nieznikania indeksu powiązania odpowiednio dolnych i górnych skrajności.

Kopuła BB1 jest uogólnioną postacią kopuli Gumbela (6) i Claytona (8):

$$C_{\theta}^{GH}(v_1, v_2) = \exp \left\{ -[(-\log v_1)^\theta + (-\log v_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}} \right\} \quad (6)$$

gdzie:  $\theta \in [1; +\infty)$

$$C_a^{CL}(v_1, v_2) = \max \left[ \left( v_1^{-a} + v_2^{-a} - 1 \right)^{-\frac{1}{a}}, 0 \right] \quad (7)$$

gdzie:  $a \in [-1; +\infty)$ . Dla  $a \rightarrow 0$  mamy kopulę niezależną, dla  $a \rightarrow +\infty$  zupełną zależność rosnącą oraz dla  $a = -1$  zupełną zależność malejącą.

Kopuła Gumbela jest granicznym przypadkiem kopuli BB1 dla  $\theta \rightarrow 0$ , natomiast dla  $\delta = 1$  kopuła BB1 przyjmuje postać kopuli Claytona.

### Estymacja archimedesowskiej 2-wymiarowej 2-parametrowej kopuli BB1

Estymację parametrów kopuli BB1 wykonano metodą IFM (ang. *Inference Functions For the Margins*) (Cherubini i in., 2004) złożoną z dwóch etapów.

W pierwszym etapie procedury oszacowano parametry brzegowych rozkładów prawdopodobieństwa  $\theta_j$ .

$$\hat{\theta}_j = \operatorname{argmax}_{\theta_j} \sum_{t=1}^N \log f_j(x_{jt}; \theta_j) \quad (8)$$

dla  $j=1,2$  gdzie:  $n$  jest liczebnością próby losowej.

Na podstawie zbioru estymowanych parametrów brzegowych rozkładów prawdopodobieństwa  $\hat{\theta}_j$ , dla  $j=1,2$ , oszacowano parametry  $\Phi$  kopuli:

$$\hat{\Phi} = \operatorname{argmax}_{\Phi} \sum_{t=1}^n \log c \left( F_1(x_{1t}, \hat{\theta}_1), F_2(x_{2t}, \hat{\theta}_2) \right) \quad (9)$$

Generowanie realizacji 2-wymiarowej zmiennej losowej  $(Q_{\text{CHA}}, H_{\text{UST}})$  przy użyciu kopuli BB1 za pomocą jej generatora odbywa się według następującego algorytmu (Cherubini i in., 2004):

$$\varphi(u) = (u^{-\theta} - 1)^{\delta} \quad (10)$$

$$\varphi^{-1}(t) = \left( \frac{1}{t^{\delta}} + 1 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \quad (11)$$

$$\varphi^{-1(i)} = -\frac{1}{\theta\delta} \left( \frac{1}{t^{\delta}} + 1 \right)^{\frac{1}{\theta}-1} t^{\frac{1}{\delta}-1} \quad (12)$$

losowanie wartości zmiennej  $\nu_1$  i  $\nu_2$  z rozkładu jednostajnego na odcinku  $[0, 1]$  i  $u_1 = \nu_1$ ,

$$c_1 = \varphi(u_1) = (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} \quad (13)$$

$$c_2 = \varphi(u_1) + \phi(u_2) = (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta} \quad (14)$$

$$\nu_2 = c_2(u_2 | \nu_1) \quad \text{tj.} \quad \nu_2 = \frac{\phi^{-1(i)}(c_2)}{\phi^{-1(i)}(c_1)} \quad (15)$$

zatem

$$\nu_2 = \frac{-\frac{1}{\theta\delta} \left\{ \left[ (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} + 1 \right\}^{-\frac{1}{\delta}-1} \left[ (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} + (u_2^{-\theta} - 1)^{\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}-1}}{-\frac{1}{\theta\delta} \left\{ \left[ (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}} + 1 \right\}^{-\frac{1}{\delta}-1} \left[ (u_1^{-\theta} - 1)^{\delta} \right]^{\frac{1}{\delta}-1}} \quad (16)$$



do znalezienia wartości  $v_2$  tj. do rozwiązania nieliniowego równania zastosowano metodę gradientową.

### Wybrane definicje dwuwymiarowych łącznych i warunkowych prawdopodobieństw

W badaniu założono, że zmienna losowa 2D jest niezależna czasowo i stacjonarna. Poniżej przytoczono kilka łącznych i warunkowych prawdopodobieństw:

- 1) łączna dystrybuanta zmiennej losowej  $(X_1, X_2)$  (rys. 2)

$$P(V_1 \leq v_1, V_2 \leq v_2) = F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = C(v_1, v_2) \quad (17)$$

- 2) funkcja łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $X_1$  i  $X_2$  – prawdopodobieństwo koniunkcji  $P^\wedge$  (rys. 3)

$$P(V_1 > v_1 \wedge V_2 > v_2) = 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + F(x_1, x_2) = 1 - v_1 - v_2 + C(v_1, v_2) \quad (18)$$

- 3) funkcja łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $X_1$  lub  $X_2$  – prawdopodobieństwo alternatywy  $P^\vee$  (rys. 4)

$$P(V_1 > v_1 \vee V_2 > v_2) = 1 - F(x_1, x_2) = 1 - C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = 1 - C(v_1, v_2) \quad (19)$$

- 4) funkcja łącznego prawdopodobieństwa nieosiągnięcia zmiennej losowej  $X_1$  i przewyższenia zmiennej losowej  $X_2$  (rys. 5)

$$P(V_1 \leq v_1, V_2 > v_2) = F_1(x_1) - C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = v_1 - C(v_1, v_2) \quad (20)$$

- 5) funkcja łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $X_1$  i nieosiągnięcia zmiennej losowej  $X_2$  (rys. 6)

$$P(V_1 > v_1, V_2 \leq v_2) = F_2(x_2) - C(F_1(x_1), F_2(x_2)) = v_2 - C(v_1, v_2) \quad (21)$$

- 6) funkcja warunkowego prawdopodobieństwa nieosiągnięcia zmiennej losowej  $X_1$  pod warunkiem nieosiągnięcia zmiennej losowej  $X_2$  (rys. 7)

$$P(V_1 \leq v_1 \mid V_2 \leq v_2) = \frac{C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{F_2(x_2)} = \frac{C(v_1, v_2)}{v_2} \quad (22)$$

- 7) funkcja warunkowego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $X_1$  pod warunkiem przewyższenia zmiennej losowej  $X_2$  (rys. 8)

$$P(V_1 > v_1 \mid V_2 > v_2) = (1 - F_1(x_1)) \left( 1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + C(F_1(x_1), F_2(x_2)) \right) = (1 - v_1) \left( 1 - v_1 - v_2 + C(v_1, v_2) \right) \quad (23)$$

8) funkcja warunkowego prawdopodobieństwa nieosiągnięcia zmiennej losowej  $X_1$  pod warunkiem przewyższenia zmiennej losowej  $X_2$  (rys. 9)

$$P(U_1 > v_1 \mid U_2 \leq v_2) = 1 - \frac{C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{F_1(x_1)} = 1 - \frac{C(v_1, v_2)}{v_1} \quad (24)$$

Dla każdego z przytoczonych łącznych i warunkowych prawdopodobieństw można zdefiniować korespondujący łączny i warunkowy okres powtarzalności. Na przykład, dla funkcji łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $X_1$  i  $X_2$

$$T_{v_1, v_2}^\wedge = \frac{1}{P(X_1 > x_1 \wedge X_2 > x_2)} = \frac{1}{1 - F_1(x_1) - F_2(x_2) + C(F_1(x_1), F_2(x_2))} = \frac{1}{1 - v_1 - v_2 + C(v_1, v_2)} \quad (25)$$

oraz dla funkcji łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $X_1$  lub  $X_2$

$$T_{v_1, v_2}^\vee = \frac{1}{P(X_1 > x_1 \vee X_2 > x_2)} = \frac{1}{1 - C(F_1(x_1), F_2(x_2))} = \frac{1}{1 - C(v_1, v_2)} \quad (26)$$

W tym badaniu do obliczania charakterystyk projektowych wykorzystano funkcje łącznego i warunkowego prawdopodobieństwa  $p$ . Wnioskowanie w kategoriach okresu powtarzalności  $T$  może łatwo doprowadzić do pominięcia sensu pojęcia prawdopodobieństwa oraz do porównania wartości, które są podobne w sensie użytej jednostki (np. okresy wyrażone są w latach), ale w rzeczywistości opisują nieporównywalne mechanizmy powstawania wezbrania (powodzi).

### Miary dopasowania 2D rozkładów prawdopodobieństwa

Teoria kopuli i symulacje Monte Carlo zostały wykorzystane do określenia poziomu ciężkości ogonów dwuwymiarowej dystrybuanty oraz ich współzależności. Do weryfikacji zgodności teoretycznego 2D rozkładu z empirycznym zastosowano 5 miar statystycznych: Kołmogorowa-Smirnowa (K-S) (Genest i in., 2009), Andersona-Darlinga (A-D) (D'Agostino, Stephens, 1986), zintegrowanego testu Andersona-Darlinga (IA-D) (Kotz i in., 2001), Kuipera (K) (Kozioł, 2008) i odległości euklidesowej ( $L^2$ ) (Gower, 1985) (tab. 1). Wszystkie powyższe miary zostały zaadaptowane do przypadku 2-wymiarowego. Miary zgodności dopasowania zostały obliczone przez wyznaczenie odległości między kopulą empiryczną  $C_{emp}$  a kopulą teoretyczną  $C_{teo}$  dopasowaną do danych (Mendez i in., 2007).

Dla testu K-S miarą dobrego dopasowania jest maksymalna odległość między teoretycznym a empirycznym rozkładem dla różnych obszarów rozkładu prawdopodobieństwa. Minimalna wartość maksymalnej odległości między teoretycznym a empirycznym rozkładem danych wskazuje, które teoretyczne funkcje najlepiej dopasowują się do danych empirycznych. Test K-S ukierunkowany jest na odchylenia w środkowej części rozkładu. W związku z tym zastosowano test A-D do pomiaru odchylenia w częściach ogonowych rozkładu. Ponieważ test IA-D jest mniej wrażliwy na duże odchylenia, uzyskiwana statystyka zmniejsza wpływ występowania wartości odstających w próbie losowej. Statystyki A-D i IA-D akcentują odchylenia w odcinkach ogonowych poprzez zastosowanie funkcji wagowej (Mendez i in., 2007)  $w = \frac{1}{\sqrt{C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j})(1 - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}))}}$  do wzoru K-S, gdzie:  $C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j})$

jest parametryczną funkcją kopuli i  $i, j = 1, \dots, n$  jest liczebnością próby losowej. Test K sprawdza odchylenia w całym zakresie rozkładu prawdopodobieństwa, ale ze szczególną uwagą skierowaną na obszar środkowy i ogon. Alternatywnym rozwiązaniem do tych testów jest odległość między dwoma punktami w przestrzeni geometrycznej  $L^2$ . W tym przypadku wartości odstające nie mają wpływu na ostateczny wynik weryfikacji.

Tabela 1. Testy zgodności 2D rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej losowej ( $Q_{CHA}, H_{UST}$ ).

Table 1. Goodness-of-fit tests for 2D probability distributions of random variable ( $Q_{CHA}, H_{UST}$ ).

<p>Kołmogorowa-Smirnowa (K-S)</p>	<p><math>D_{K-S} = \max_{1 \leq i, j \leq n}  C_{emp}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) </math>, gdzie:</p> <p><math>n</math> – liczność próby losowej, <math>C_{emp}(\nu_1, \nu_2)</math> – kopula empiryczna</p> <p><math>C_{teo}(\nu_1, \nu_2)</math> – kopula teoretyczna.</p> <p><math>\hat{C}_{emp}(\nu_1, \nu_2) = \frac{\#\{(x_k, y_k) : F_x(x_k) \leq \nu_1, F_y(y_k) \leq \nu_2\}}{n}</math>, gdzie:</p> <p><math>(x_k, y_k)_{k=1}^n</math> – próba losowa o liczebności <math>n</math></p> <p><math>\#</math> liczba elementów w zbiorze, <math>F_x(x_k)</math> i <math>F_y(y_k)</math> empiryczny brzegowy rozkład prawdopodobieństwa</p>
<p>Andersona-Darlinga (A-D)</p>	<p><math>D_{A-D} = \max_{1 \leq i, j \leq n} \frac{ C_{emp}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) }{\sqrt{C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j})(1 - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}))}}</math></p>

Zintergrowany test Andersona-Darlinga (IA-D)	$D_{IA-D} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( C_{emp}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) \right)^2}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) (1 - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}))}$
Kuipera (K)	$D_K = \max_{i,j} \left( C_{emp}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) \right) +$ $+ \max_{i,j} \left( C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) - C_{emp}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) \right)$
Odległość Euklidesowa (L <sup>2</sup> )	$D_{L^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( C_{emp}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) - C_{teo}(\nu_{1i}, \nu_{2j}) \right)^2}$

## Wyniki dwuwymiarowej analizy wezbrań sztormowo-roztopowych

### Estymacja parametrów kopuli BB1

Do dwuwymiarowej analizy częstości wezbrań sztormowo-roztopowych autorytatywnie wybrano 2-parametrową kopulę BB1. Estymację jej parametrów wykonano w dwóch etapach. W pierwszym etapie oszacowano parametry brzegowe rozkładów prawdopodobieństwa  $\hat{\theta}$  metodą największej wiarygodności. Najlepszą zgodność przyjętego rozkładu teoretycznego z rozkładem empirycznym dla zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  uzyskano za pomocą 3-parametrowego rozkładu Gamma, tj.  $GA(\lambda=2,872; \alpha=4,963; \varepsilon=10,1)$ , natomiast dla  $H_{UST}$  za pomocą 3-parametrowego rozkładu logarymiczno-normalnego, tj.  $LN(\mu=3,261; \delta=0,458; \varepsilon=558,0)$ . W drugim etapie estymowano parametry archimedesowskiej kopuli BB1 metodą IFM (Cherubini i in., 2004).

W tabeli 2 przedstawiono parametry dwuwymiarowego rozkładu szacowane metodą kopuli, przy zastosowaniu kopuli BB1, współczynnik korelacji rang Spearmana  $\rho_s$  oraz wyniki 5 miar dopasowania 2D rozkładów prawdopodobieństwa do danych pomiarowych. Najmniejsza z maksymalnych odległości między wartościami teoretycznej a empirycznej dystrybuanty dla kopuli BB1 wyniosła  $K_{S_{BB1}}=0,0596$ , natomiast w obszarze ogonów rozkładu  $A-D_{BB1}=0,2564$  i  $IA-D_{BB1}=50,9530$ . Absolutna wielkość różnicy między rozpatrywanymi rozkładami zarówno w obszarach ogonowych, jak i w okolicach mediany wyniosła  $K_{BB1}=0,1331$ , a odległość euklidesowa, mierząca odstęp między dwoma dowolnymi punktami nieuwzględniająca wartości odstających, jest równa  $L^2_{BB1}=2,4019$ . Wartości parametrów kopuli  $\delta=1,0098$  i  $\theta=0,2114$  oznaczają zależność rosnącą między badanymi zmiennymi. Uzyskane wskaźniki dolnego  $\tau^l=0,0388$  i górnego  $\tau^u=0,0133$  indeksu ogona

rozkładu prawdopodobieństwa wskazują na to, że oba ogony kopuli BB1 są grubsze od ogona rozkładu normalnego, dla którego  $\tau = 0$ . Powyższa analiza wykazała dodatnią zależność między zmiennymi opisującymi wezbrania sztormowo-roztopowe, a także pewne asymetrie w strukturze zależności. Istnieje ścisły związek między funkcjami kopuli a współczynnikiem korelacji rang Spearmana. Jest on najlepszą alternatywą dla współczynnika korelacji liniowej jako miary zależności dla rozkładów nieeliptycznych. Współczynnik korelacji rang Spearmana  $\rho_s = 0,9361$  wykazał wysoki poziom współzależności między badanymi zmiennymi losowymi.

Tabela 2. Wartości estymatorów parametrów 2D rozkładu prawdopodobieństwa otrzymanych metodą kopuli BB1; współczynnik korelacji rang Spearmana  $\rho_s$ , testy zgodności: K-S, A-D, IA-D, K i  $L^2$  modeli matematycznych z 2D obserwacjami wezbrań  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  oraz dolny i górny indeks ogona rozkładu prawdopodobieństwa

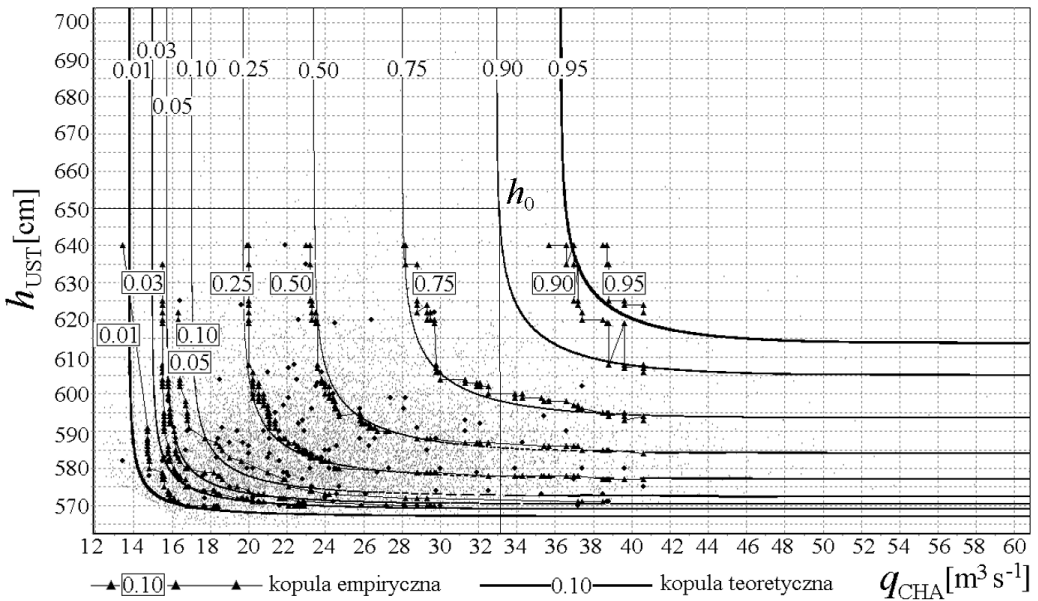
Table 2. Estimators of parameters of 2D probability distribution estimated by BB1 copula function; Spearman rank correlation coefficient  $\rho_s$ , as well as results of K-S, A-D, IA-D, K and  $L^2$  goodness-of-fit tests for  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  variables and lower and upper tail index of probability distribution

Parametry kopuli BB1		$\rho_s$	K-S	A-D	IA-D	K	$L^2$
$\delta$	1,0098	0,9361	0,0596	0,2564	50,9530	0,1331	2,4019
$\theta$	0,2114						
$\tau^l$	0,0388						
$\tau^u$	0,0133						

### Probabilistyczna interpretacja kopuli dwuwymiarowej zmiennej losowej $(Q_{CHA}, H_{UST})$

Ważnym krokiem w konstrukcji dwuwymiarowego modelu zmiennej  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  jest ocena wyboru odpowiedniej funkcji kopuli w porównaniu z obserwacjami historycznymi. Na rysunku 2 porównano poziomicę  $P_h(q_{CHA}, h_{UST})$  wygenerowane za pomocą kopuli BB1 (linia ciągła) i kopuli empirycznej (linia ciągła z trójkątami). Poziomicami na wysokości  $h$  nazywamy taki zbiór punktów  $(q_{CHA}, h_{UST})$ , dla których spełniona jest równość  $C(F_1(q_{CHA}), F_2(h_{UST})) = h$ , gdzie:  $h = \{0,01, 0,03, 0,05, 0,1, 0,25, 0,5, 0,75, 0,9, 0,95\}$ . Każdy punkt leżący na poziomicy  $h = h_0$  wyznacza prostokąt o bokach równoległych do osi układu współrzędnych taki, że prawdopodobieństwo, iż realizacja zmiennej losowej  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  należy do tego prostokąta, wynosi  $h_0$ .

Krzywe empiryczne tworzą linie proste oraz skoki, które są wynikiem obecności identycznych par zaobserwowanych zmiennych 2D, a także dyskretnego charakteru skończonej próby losowej. Występowanie takich przypadków zakłóca oszacowanie wybranych prawdopodobieństw. W tym badaniu wykresy funkcji łącznych



Rys. 2. Porównanie poziomic teoretycznej łącznej dystrybuanty zmiennej losowej ( $Q_{CHA}$ ,  $H_{UST}$ ) z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli BB1 (linia ciągła), dopasowanej do dostępnych obserwacji (czarne punkty) z poziomiami łącznego rozkładu empirycznego (linia ciągła z trójkątami)

Fig. 2. Comparison between the theoretical level curves of the joint cumulative distribution of ( $Q_{CHA}$ ,  $H_{UST}$ ) BB1 copula – based function (solid line), fitted to the available observation (black circle) and those of the empirical copula (lines with triangles) constructed using the same data

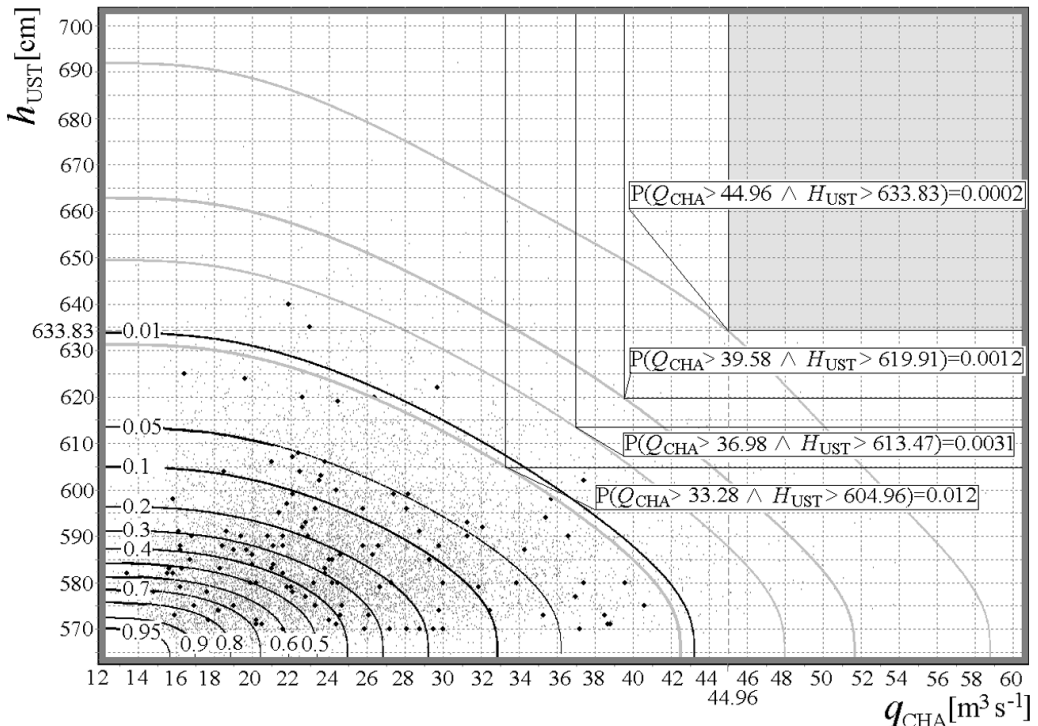
i warunkowych rozkładów prawdopodobieństwa, obserwacje historyczne (czarne punkty) i punkty wygenerowane z funkcji kopuli (szare punkty) przedstawiono w przestrzeni rzeczywistych wartości badanej zmiennej ( $Q_{CHA}$ ,  $H_{UST}$ ).

Na kolejnych rysunkach pogrubioną ciemną linią zaznaczono dziedzinę, w ramach której zdefiniowano łączne i warunkowe prawdopodobieństwa. Dodatkowo zaznaczono zbiory krytycznych zdarzeń korespondujących do tych prawdopodobieństw (szare pola). Na każdym wykresie zaznaczono po 4 punkty  $P$  leżące na poziomicach odpowiadających wartościom szansy zaobserwowania zdarzeń opisanych określonym łącznym i warunkowym prawdopodobieństwem. Do analizy wybrano realizacje brzegowych zmiennych losowych z prawdopodobieństwem przewyższenia: 1%, 3%, 5% i 10%, tj.  $q_{CHA}^{1\%} = 44,96$ ,  $q_{CHA}^{3\%} = 39,58$ ,  $q_{CHA}^{5\%} = 36,98$ ,  $q_{CHA}^{10\%} = 33,28$  ( $m^3 s^{-1}$ ) oraz  $h_{UST}^{1\%} = 633,83$ ,  $h_{UST}^{3\%} = 619,81$ ,  $h_{UST}^{5\%} = 613,47$  i  $h_{UST}^{10\%} = 604,96$  (cm).

Na rysunku 3 dziedziną łącznego prawdopodobieństwa koniunkcji  $\hat{p}$  (18) jest cały obszar wykresu (dziedzina oznaczona jest ciemną grubą linią). Zakłada się, że zmienne  $Q_{CHA}$  i  $H_{UST}$  mogą przyjmować każdą wartość zaznaczoną na osiach wykresu

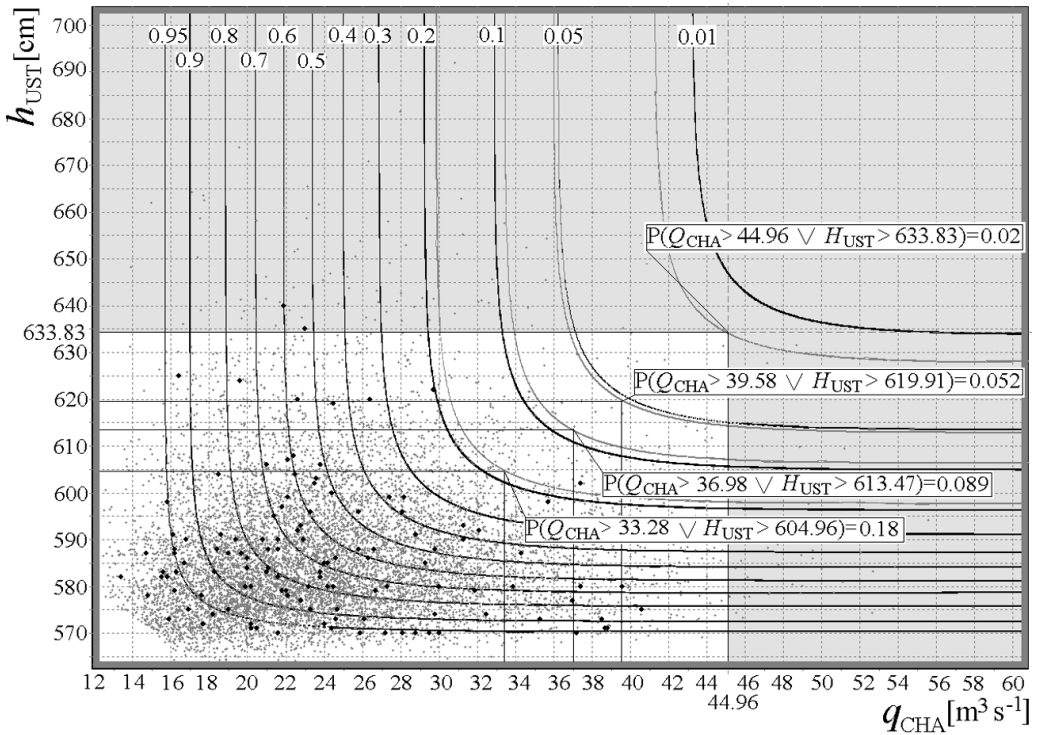
i mierzą szansę zaobserwowania zdarzenia zaznaczonego w górnym prawym rejonie rysunku zdefiniowanym za pomocą nierówności  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \wedge H_{UST} > h_{UST})$ . Na rysunku 4 wykreślono łączne prawdopodobieństwo alternatywy  $p^v$  (19) wraz z obszarem (szare pole), w którym łączne prawdopodobieństwo mierzy szansę zaobserwowania zdarzenia  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \vee H_{UST} > h_{UST})$ . Pomimo że z analitycznych zależności (18-19) wynika, że  $p^v \geq p^{\wedge}$ , tych prawdopodobieństw nie powinno się ze sobą porównywać (porządkować). Należy zauważyć, że oba łączne prawdopodobieństwa należą co prawda do tej samej dziedziny, ale opisują szansę obserwacji zdarzeń w różnych zbiorach. Zbiór alternatywy  $p^v$  będzie zawsze większy lub równy od zbioru koniunkcji  $p^{\wedge}$  dla każdej ustalonej pary zmiennych losowych  $(Q_{CHA}, H_{UST})$ , np. dla  $(q_{CHA}^{1\%}, h_{UST}^{1\%})$ ,  $p^v = 0,02$  i jest większe od  $p^{\wedge} = 0,002$ .

Podobny wniosek należy wyprowadzić, rozpatrując prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennych brzegowych, np.  $p_{q_{CHA}} = P(Q_{CHA} > q_{CHA})$  i  $p_{h_{UST}} = P(H_{UST} > h_{UST})$ . Dla wybranej zmiennej 2D możemy zawsze sformułować następującą nierówność



Rys. 3. Wykres funkcji łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  i  $H_{UST}$  (koniunkcji) z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli BB1 -  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \wedge H_{UST} > h_{UST})$

Fig. 3. Chart of joint exceedance probability function for  $Q_{CHA}$  and  $H_{UST}$  variables (conjunction) built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \wedge H_{UST} > h_{UST})$



Rys. 4. Wykres funkcji łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  lub  $H_{UST}$  (alternatywy) z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli BB1-  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \vee H_{UST} > h_{UST})$

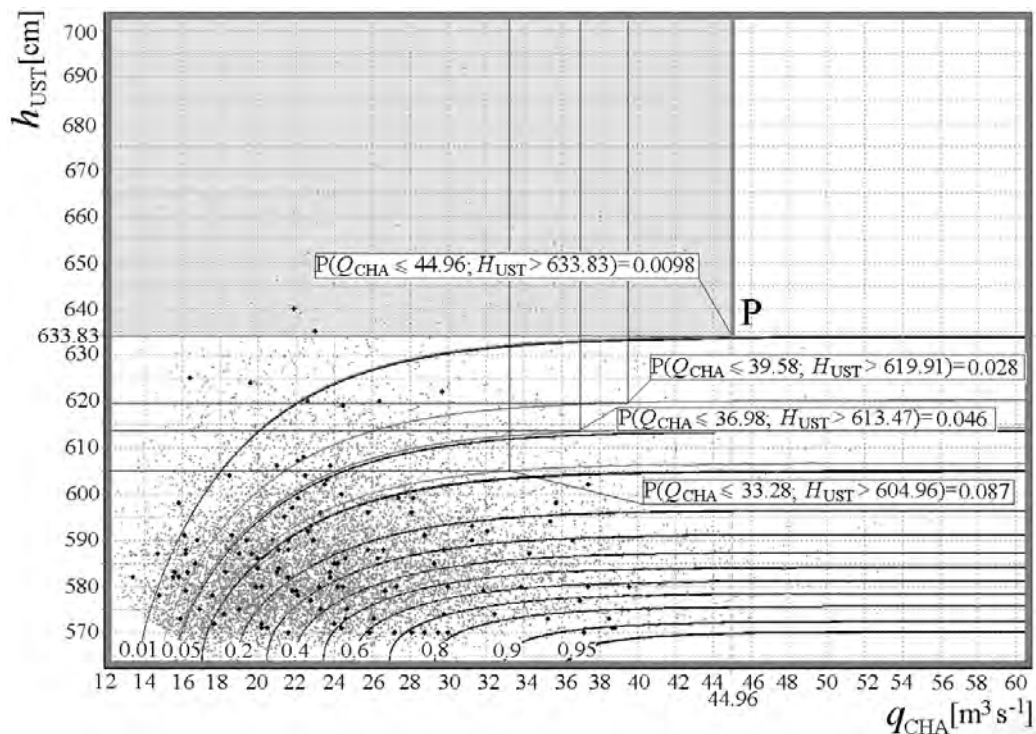
Fig. 4. Chart of joint exceedance probability function for  $Q_{CHA}$  or  $H_{UST}$  variables (alternative) built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \vee H_{UST} > h_{UST})$

(Yue, Rasmussen, 2002):  $p^{\vee} \geq \max\{p_{q_{CHA}}, p_{h_{UST}}\} \geq \min\{p_{q_{CHA}}, p_{h_{UST}}\} \geq p^{\wedge}$ , tj. dla wybranej zmiennej ( $q_{CHA}^{1\%}, h_{UST}^{1\%}$ ),  $p^{\vee} = 0,02$ ,  $p_{\max} = 0,01$ ,  $p_{\min} = 0,01$  i  $p^{\wedge} = 0,0002$ . Oczywiście porównywanie prawdopodobieństw jednowymiarowych z prawdopodobieństwami dwuwymiarowymi ma sens wtedy, kiedy chcemy określić błąd zastosowanego probabilistycznego modelu 2D, zwłaszcza w sytuacji, kiedy jest uzasadnienie, że matematyczny model niedokładnie opisuje mechanizm badanego zdarzenia.

Projektując infrastrukturę portową, techniczny pas nabrzeża, należy przeprowadzić analizę wytrzymałości budowli hydrotechnicznych w strefie przybrzeżnej. Ważna jest znajomość łącznego prawdopodobieństwa nieosiągnięcia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  i przewyższenia zmiennej losowej  $H_{UST}$  oraz łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  i nieosiągnięcia zmiennej losowej  $H_{UST}$ , określonych odpowiednio wzorami (20) i (21).

Rysunek 5 przedstawia graficzną 2D analizę częstości opisaną zależnością  $P(Q_{CHA} \leq q_{CHA}; H_{UST} > h_{UST})$ . Punkt  $P$  wyznacza prostokąt taki, że prawdopodobieństwo,





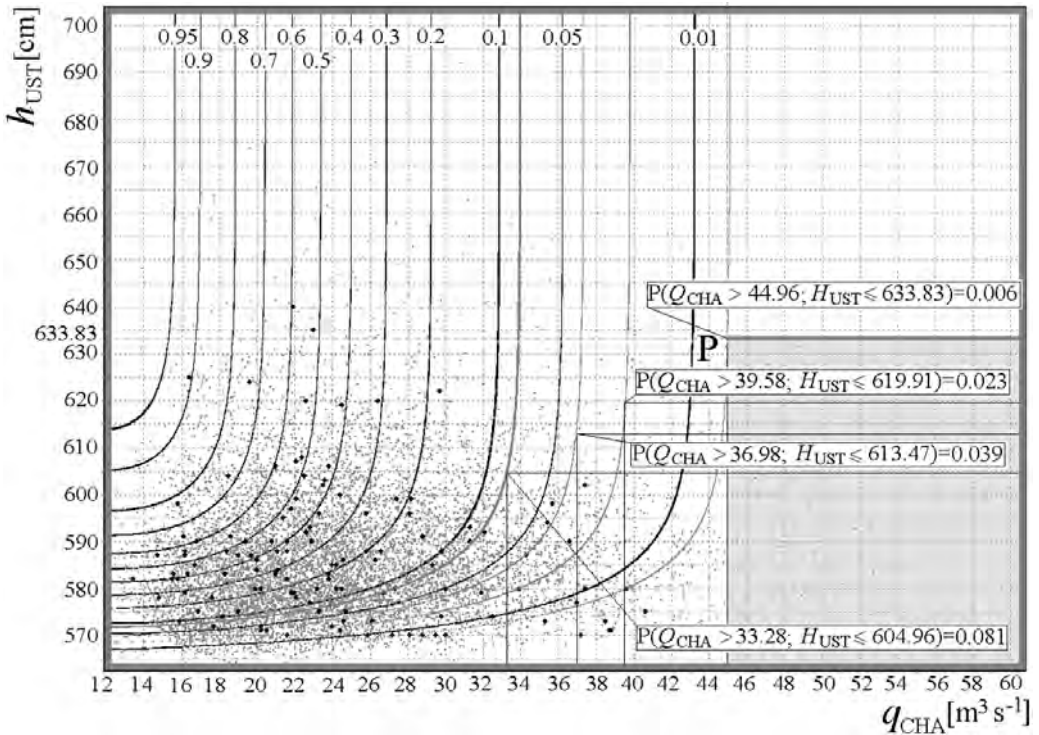
Rys. 5. Wykres funkcji łącznego prawdopodobieństwa nieosiągnięcia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  i przewyższenia zmiennej losowej  $H_{UST}$  z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli BB1

$$P(Q_{CHA} \leq q_{CHA}, H_{UST} > h_{UST})$$

Fig. 5. Chart of cumulative distribution for  $Q_{CHA}$  and exceedance probability function for  $H_{UST}$  built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} \leq q_{CHA}, H_{UST} > h_{UST})$

iż realizacja zmiennej losowej  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  należy do tego prostokąta z wyłączeniem dolnego poziomego boku (cienka ciemnoszara linia), wynosi  $p=0,0098$ . W tym przypadku łączne prawdopodobieństwo  $P(Q_{CHA} \leq 44,96, H_{UST} > 633,83) = 0,0098$ .

Na rysunku 6 łączne prawdopodobieństwo przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  i nieosiągnięcia zmiennej losowej  $H_{UST}$  należy do tej samej dziedziny jak łączne prawdopodobieństwo zaznaczone na rys. 5. Natomiast oba łączne prawdopodobieństwa są nieporównywalne, gdyż mimo tej samej dziedziny, opisują szanse zaobserwowania zdarzeń w całkowicie różnych zbiorach (szare pola na obu rysunkach). Punkt P wyznacza prostokąt zlokalizowany tym razem w dolnym prawym obszarze wykresu. Jest to taki punkt, że prawdopodobieństwo, iż realizacja zmiennej losowej  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  należy do tego prostokąta z wyłączeniem lewego pionowego boku (cienka ciemnoszara linia), wynosi  $p=0,006$ . W tym przypadku łączne prawdopodobieństwo  $P(Q_{CHA} > 44,96, H_{UST} \leq 633,83) = 0,006$ .



Rys. 6. Wykres funkcji łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  i nieosiągnięcia zmiennej losowej  $H_{UST}$  z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli BB1

$$P(Q_{CHA} > q_{CHA}, H_{UST} \leq h_{UST})$$

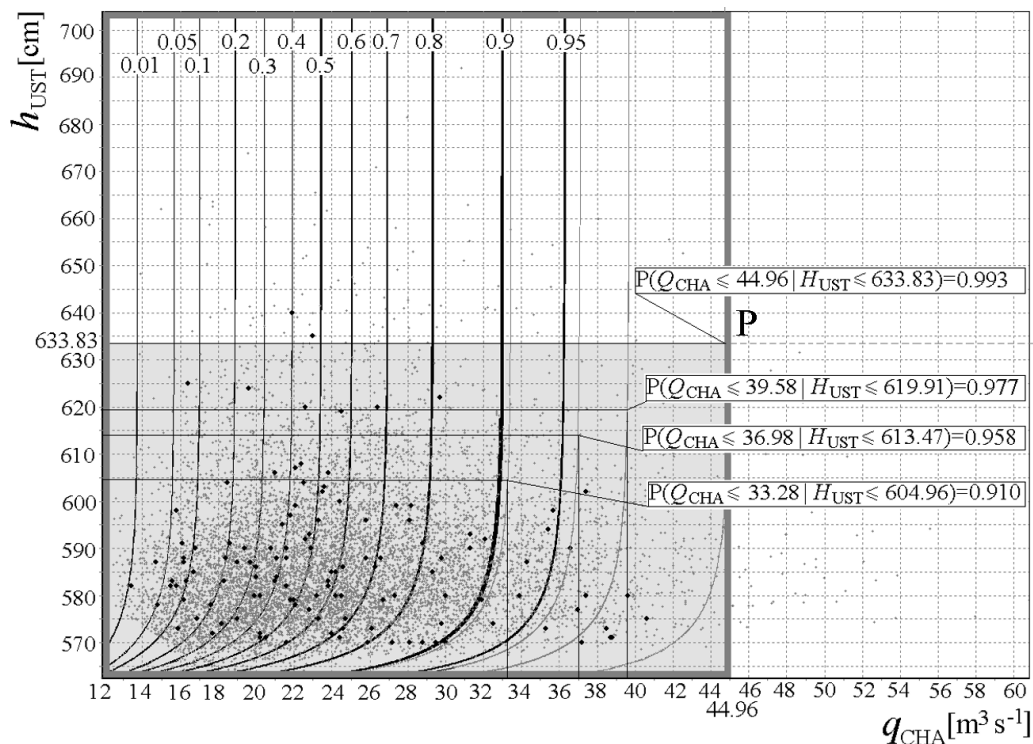
Fig. 6. Chart of exceedance probability function for  $Q_{CHA}$  and cumulative distribution for  $H_{UST}$  built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} > q_{CHA}, H_{UST} \leq h_{UST})$

Teorię kopuli można zastosować do analizy skrajnych wartości realizacji zmiennej losowej ( $Q_{CHA}$ ,  $H_{UST}$ ). Tego typu zdarzenia są związane z istnieniem spłaszczenia rozkładów prawdopodobieństwa, a także skośności przejawiającej się w istnieniu kurtozy i współczynnika asymetrii rozkładów, czyli z pogrubionymi ogonami tych rozkładów. Do tej analizy częstości najczęściej są stosowane prawdopodobieństwa warunkowe. W tym badaniu rozpatrywane są 3 przypadki opisane wzorami (22-24).

Wyznaczono prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia losowego takiego, że zostanie zaobserwowany przepływ w profilu wodowskazowym Charnowo, np. o wartości nie większej niż  $q_{CHA} = 44,96 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$ , pod warunkiem że jednocześnie maksymalny poziom morza w czasie wezbrania sztormowego w profilu wodowskazowym Ustka nie będzie wyższy niż  $h_{UST} = 633,83 \text{ cm}$ . Prawdopodobieństwo to można wyrazić za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego  $P(Q_{CHA} \leq q_{CHA} | H_{UST} \leq h_{UST})$  i przedsta-

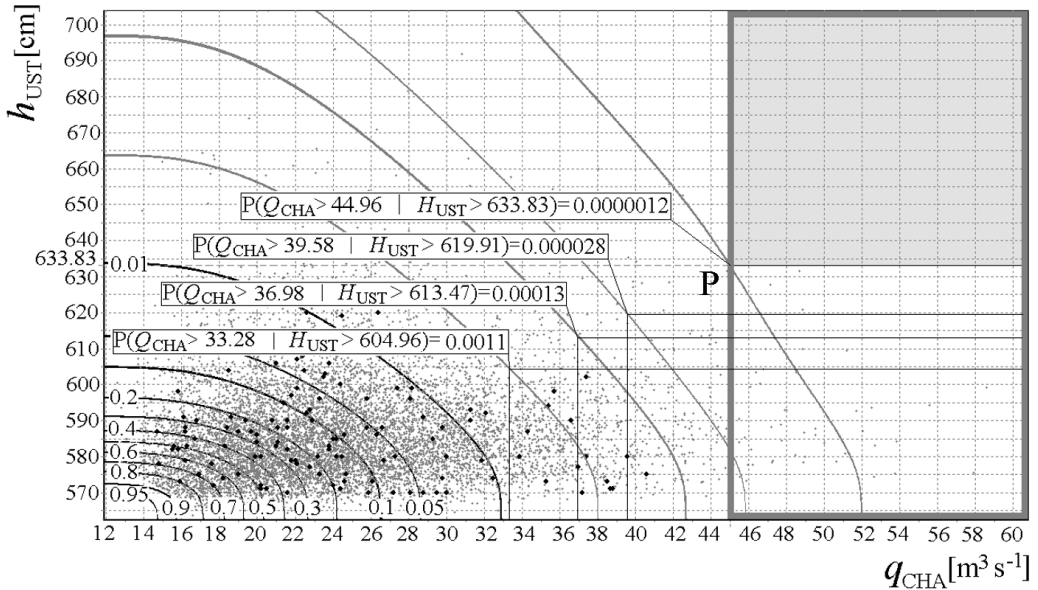
wić je za pomocą wzoru (22). Obliczono, że  $P(Q_{CHA} \leq 44,96 | H_{UST} \leq 633,83) = 0,993$ . Obliczenia wykonano dla skrajnych wartości realizacji zmiennej losowej  $(Q_{CHA}, H_{UST})$ . Uzyskano następujące wyniki (rys. 7):  $P(Q_{CHA} \leq 39,58 | H_{UST} \leq 619,81) = 0,977$ ,  $P(Q_{CHA} \leq 36,98 | H_{UST} \leq 613,47) = 0,958$  oraz  $P(Q_{CHA} \leq 33,28 | H_{UST} \leq 604,96) = 0,910$ .

Kolejnym problemem, który można rozwiązać za pomocą teorii kopuli, jest określenie szansy zrealizowania zdarzenia losowego takiego, że np. zostanie zaobserwowany przepływ na rzece Słupi w profilu wodowskazowym Charnowo większy niż  $q_{CHA} = 44,96 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  przy jednoczesnym poziomie morza w Ustce w czasie sztormu wyższym niż  $h_{UST} = 633,83 \text{ cm}$ . Prawdopodobieństwo warunkowe  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} | H_{UST} > h_{UST})$  wyrażono za pomocą wzoru (23), natomiast wykres funkcji łącznego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  pod warunkiem przewyższenia zmiennej losowej  $H_{UST}$ ,  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} | H_{UST} > h_{UST})$ , zbudowanej na kopuli BB1 przedstawiono na rys. 8



Rys. 7. Wykres funkcji warunkowego prawdopodobieństwa nieosiągnięcia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  pod warunkiem nieosiągnięcia zmiennej losowej  $H_{UST}$  z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli BB1  $P(Q_{CHA} \leq q_{CHA} | H_{UST} \leq h_{UST})$

Fig. 7. Chart of conditional cumulative distribution for  $Q_{CHA}$ , provided that cumulative distribution for  $H_{UST}$  built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} \leq q_{CHA} | H_{UST} \leq h_{UST})$



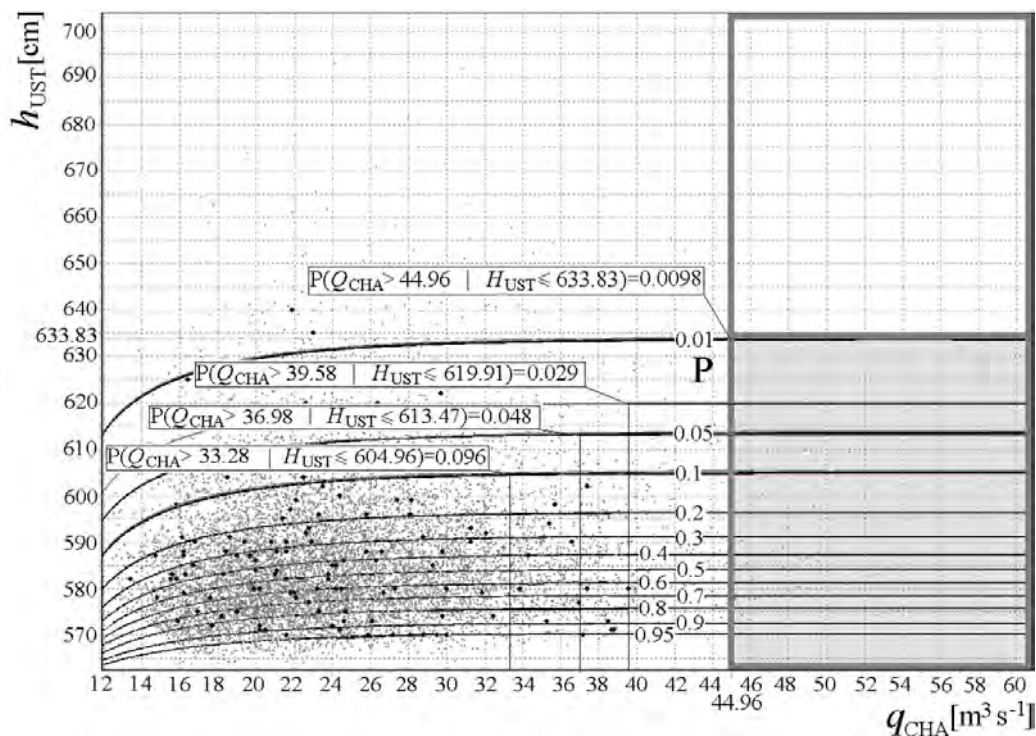
Rys. 8. Wykres funkcji warunkowego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  pod warunkiem przewyższenia zmiennej losowej  $H_{UST}$  z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli

$$BB1 \ P(Q_{CHA} > q_{CHA} \mid H_{UST} > h_{UST})$$

Fig. 8. Chart of conditional exceedance probability function for  $Q_{CHA}$ , provided that exceedance probability function for  $H_{UST}$  built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \mid H_{UST} > h_{UST})$

Ostatnim przedstawionym w artykule zagadnieniem analizy skrajnych wartości realizacji zmiennej losowej ( $Q_{CHA}$ ,  $H_{UST}$ ) jest prawdopodobieństwo zaobserwowania przepływu w Charnowie większego niż  $q_{CHA} = 44,96 \text{ m}^3\text{s}^{-1}$  pod warunkiem wystąpienia poziomu morza nie wyższego niż  $h_{UST} = 633,83 \text{ cm}$ , czyli  $P(Q_{CHA} > 44,96 \mid H_{UST} \leq 633,83)$ . Powyższy problem można opisać za pomocą prawdopodobieństwa warunkowego  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \mid H_w \leq h_{UST})$  i wyrazić je za pomocą wzoru (24). Wykres funkcji warunkowego prawdopodobieństwa przedstawia rys. 9.

Ponadto na rysunkach 7-9 zaznaczono po 4 punkty odpowiadające dwuwymiarowej analizie częstości skrajnych wartości realizacji zmiennej losowej ( $Q_{CHA}$ ,  $H_{UST}$ ), opisującej ilościowo wezbrania sztormowo-roztopowe. Z wykresów 7-9 wynika również, że różne prawdopodobieństwa odnoszą się do różnych zbiorów zdarzeń (szare pola) zdefiniowanych w różnych dziedzinach (obszary wyznaczone ciemną grubą linią). Dla dowolnie wybranej pary zmiennych ( $q_{CHA}$ ,  $h_{UST}$ ) można określić następującą nierówność prawdopodobieństw przewyższenia:  $p^v \geq \max\{p_{q_{CHA}}, p_{h_{UST}}\} \geq \min\{p_{q_{CHA}}, p_{h_{UST}}\} \geq p^a \geq p^l$ , gdzie:  $p^l$  oznacza funkcję warunkowego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej  $Q_{CHA}$  pod warunkiem przewyższenia zmiennej  $H_{UST}$ , tj. dla wybranej zmiennej ( $q_{CHA}^{1\%}$ ,  $h_{UST}^{1\%}$ ),  $p^v = 0,02$ ,  $p_{\max} = 0,01$ ,  $p_{\min} = 0,01$ ,  $p^a = 0,0002$  i  $p^l = 0,0000012$ . Powyższą nierówność można



Rys. 9. Wykres funkcji warunkowego prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennej losowej  $Q_{CHA}$  pod warunkiem nieosiągnięcia zmiennej losowej  $H_{UST}$  z parametrami estymowanymi za pomocą kopuli

$$BB1 \ P(Q_{CHA} > q_{CHA} \mid H_{UST} \leq h_{UST})$$

Fig. 9. Chart of conditional exceedance probability function for  $Q_{CHA}$ , provided that cumulative distribution for  $H_{UST}$  built on the BB1 copula  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \mid H_{UST} \leq h_{UST})$

również wyrazić, korzystając z definicji okresu powtarzalności  $T$  (Yue, Rasmussen, 2002), tj.  $T^v \leq \min\{T_{q_{CHA}}, T_{h_{UST}}\} \leq \max\{T_{q_{CHA}}, T_{h_{UST}}\} \leq T^{\wedge} \leq T^l$ .

## Wnioski

Na podstawie uzyskanych wyników procedury wyznaczania dwuwymiarowych charakterystyk projektowych wezbrań sztormowo-roztopowych w zurbanizowanym obszarze portu morskiego w Ustce oraz z przeprowadzonej dyskusji wynikają następujące wnioski:

1) definicja  $T$  i tym samym  $p$  zależy od przyjętej w badaniu hipotezy o stacjonarności lub niestacjonarności badanej zmiennej losowej,

2)  $T$  obliczane wg (1) przy założonej stacjonarności zmiennej losowej nie wnosi dodatkowej informacji w porównaniu do  $p$ ,

3) w przypadku niestacjonarności analizowanego zjawiska  $T$  jest tylko podsumowaniem średniego prawdopodobieństwa przewyższenia  $\bar{p}$  występującego w pojedynczym kroku czasowym, czyli generalnie nie doszacowuje rzeczywistego ryzyka,

4) ocena weryfikacji zgodności teoretycznego 2D rozkładu prawdopodobieństwa z empirycznym wskazuje na dobre odzwierciedlenie struktury zależności zmiennej losowej  $(Q_{CHA}, H_{UST})$  przez 2-wymiarową 2-parametrową kopule BB1,

5) porównywanie prawdopodobieństw zdefiniowanych w różnych dziedzinach, w różnych zbiorach oraz porównywanie jednowymiarowych prawdopodobieństw z dwuwymiarowymi powinno być wykonywane tylko w celu zbadania błędu wynikającego z nieprawidłowego wyboru modelu probabilistycznego,

6) Porównano prawdopodobieństwa przewyższenia zmiennych brzegowych  $P(Q_{CHA} > q_{CHA})$ ,  $P(H_{UST} > h_{UST})$  z łącznym prawdopodobieństwem koniunkcji  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \wedge H_{UST} > h_{UST})$  i łącznym prawdopodobieństwem alternatywy  $P(Q_{CHA} > q_{CHA} \vee H_{UST} > h_{UST})$ :

$$P(Q_{CHA} > 44,96) = 0,01; P(H_{UST} > 633,83) = 0,01; P(Q_{CHA} > 44,96 \wedge H_{UST} > 633,83) = 0,0002;$$

$$P(Q_{CHA} > 39,58) = 0,03; P(H_{UST} > 619,91) = 0,03; P(Q_{CHA} > 39,58 \wedge H_{UST} > 619,91) = 0,0012;$$

$$P(Q_{CHA} > 36,98) = 0,05; P(H_{UST} > 613,47) = 0,05; P(Q_{CHA} > 36,98 \wedge H_{UST} > 613,47) = 0,0031;$$

$$P(Q_{CHA} > 33,28) = 0,10; P(H_{UST} > 604,96) = 0,10; P(Q_{CHA} > 33,28 \wedge H_{UST} > 604,96) = 0,0120;$$

$$P(Q_{CHA} > 44,96) = 0,01; P(H_{UST} > 633,83) = 0,01; P(Q_{CHA} > 44,96 \vee H_{UST} > 633,83) = 0,020;$$

$$P(Q_{CHA} > 39,58) = 0,03; P(H_{UST} > 619,91) = 0,03; P(Q_{CHA} > 39,58 \vee H_{UST} > 619,91) = 0,052;$$

$$P(Q_{CHA} > 36,98) = 0,05; P(H_{UST} > 613,47) = 0,05; P(Q_{CHA} > 36,98 \vee H_{UST} > 613,47) = 0,089;$$

$$P(Q_{CHA} > 33,28) = 0,10; P(H_{UST} > 604,96) = 0,10; P(Q_{CHA} > 33,28 \vee H_{UST} > 604,96) = 0,180;$$

7) analizując częstości wystąpienia ekstremalnych zdarzeń typu wezbrania czy susze, najlepiej rozpatrywać je w kategoriach łącznego i warunkowego prawdopodobieństwa; rozumowanie w kategoriach okresu powtarzalności może prowadzić do błędnego rozumienia prawdopodobieństwa zdarzenia i niepoprawnego opisu mechanizmu powstania tego zdarzenia,

8) każde zjawisko może być opisane za pomocą zmiennej wielowymiarowej, jednak do celów projektowych istotne są często własności losowe tylko jednej zmiennej.

## Literatura

- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., 2004, *Copula Method in Finance*. John Wiley & Sons, Ltd, ss. 293.
- Chowdhary H., H., Escobar L. A., Singh V. P., 2011, *Identification of suitable copulas for bivariate frequency analysis of flood peak and flood volume data*. Hydrology Research, 42, 2-3, 193-216, doi: 10.2166/nh.2011.065.
- Chromow S. P., 1977, *Meteorologia i klimatologia*. PWN, Warszawa, ss.318.
- Ciupak M., 2011, *Multivariate storm surges analysis. The study a capabilities of Copula Theory application*. Reports of Institute of Meteorology and Water Management, 5 (55), 1-2, 3-23.
- Ciupak M., 2012, *Uwarunkowania meteorologiczne funkcjonowania małego portu morskiego w Ustce*. Logistyka, 5, 337-344.
- Ciupak M., 2013, *Selection of extreme value probability distribution on example of storm surges and backwater on the Słupia River analysis*. [w:] *Problems of extreme floods estimation in gauged and ungauged catchments* (red. S.Węglarczyk), Monography of Polish Water Management Committee of Polish Academy of Sciences, 35, 57-71.
- Cooley V. T., 2013, *Return periods and return levels under climate change*. [w:] *Extremes in a changing climate, water science and technology library*. (red. A. Agha Kouchak, D. Easterling, K. Hsu, S. Schubert, S. Sorooshian), Springer, Netherlands, 65, 97-114.
- D'Agostino R. B., Stephens M. A., 1986, *Goodness-of-fit Techniques*. New York, Marcel Dekker, ss. 560.
- De Waal D. J., Van Gelder P. H. A. J. M., 2005, *Modelling of extreme wave heights and periods through Copulas*. Extremes, 8, 345-356.
- Douglas E., Vogel R., Kroll C., 2002, *Impact of streamflow persistence on hydrologic design*. J Hydrol Eng, 7, 3, 220-227.
- De Michele C., Salvadori G., Passoni G., Vezzoli R., 2007, *A multivariate model of sea storms using copulas*. Coastal Engineering, 54, 734-751, doi: 10.1016/j.coastaleng.2007.05.007.
- Domino K., Blachowicz T., Ciupak M., 2014, *The use of copula functions for predictive analysis of correlations between extreme storm tides*. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 413, 1, 489-497, doi: 10.1016/j.physa.2014.07.020.
- Ganguli P., Reddy M.J., 2013, *Probabilistic assessment of flood risks using trivariate copulas*. Theoretical and Applied Climatology, 111, 1-2, 341-360, doi: 10.1007/s00704-012-0664-4.
- Genest C., Rémillard B., Beaudoin D., 2009, *Godness-of-fit tests for copulas: A review and power study*. Insurance: Mathematics and Economics, 44, 2, 199-213, doi: 10.1016/j.insmatheco.2007.10.005.
- Gower J. C., 1985, *Measures of Similarity, Dissimilarity, and Distance*. [w:] *Encyclopedia of Statistical Sciences*, 5. (red. S. Kotz, N. L. Johnson, C. B. Read), New York, John Wiley and Sons, 397-405.
- Gupta S. K., 2010, *Modern hydrology and sustainable water development*. Wiley, Blackwell, ss. 464.
- Joe H., 1997, *Multivariate Models and dependence Concepts*. Chapman and Hall, London.
- Karmakar S., Simonovic S. P., 2008, *Bivariate flood frequency analysis: Part 1 - Determination of marginals by parametric and nonparametric techniques*. Journal of Flood Risk Management, 1, 190-200.
- Karmakar S., Simonovic S. P., 2009, *Bivariate flood frequency analysis: Part 2 - A Copula-based approach with mixed marginal distributions*. Journal of Flood Risk Management, 2-1, 32-44
- Klein B., Pahlow M., Hundecha Y., Gattke C., Schumann A., 2008, *Probabilistic Analysis of Hydrological Loads to Optimize the Design of Flood Control Systems*. 4th International Symposium on Flood Defence: Managing Flood Risk, Reliability and Vulnerability, Toronto, Canada.
- Kotz S., Kozubowski T. J., Podgórski K., 2001, *The Laplace Distribution and Generalizations*. A Revisit with Applications to Communications, Economics, Engineering, and Finance, Birkhäuser, Boston, ss. 351.
- Kozioł J. A., 2008, *A weighted Kuiper statistic for goodness of fit*. Statistica Neerlandica, 50, 3, 394-403, doi:10.1111/j.1467-9574.1996.tb01505.x.

- Mendez B. V. M., de Melo E. F. L., Nelse R. B., 2007, *Copulas and applications robust fits for copula models*. Commun. Stat.-Simul. Comput. 36, 5, 997–1017, <http://dx.doi.org/10.1080/03610910701539708>.
- Nelsen R. B., 2006, *An Introduction to Copulas*. Wyd. II, Springer-Verlag, New York, ss. 272.
- Popławska A., Rawa Z., 2003, *Meteorologia ogólna. Meteorologia synoptyczna*. Wyd. IMGW, Warszawa.
- Salas J., Obeysekera J., 2014, *Revisiting the concepts of return period and risk for nonstationary hydrologic extreme events*. J Hydrol Eng, 19, 3, 554-568.
- Serinaldi F., 2015, *Dismissing return periods!* Stoch Environ Res Risk Assess, 29, 1179-1189, doi: 10.1007/s00477-014-0916-1.
- Sklar A., 1959, *Functions de répartition à dimensions et leurs marges*. Publ. Inst. Statist. Univ, Paris, 8, 229-231.
- Styszyńska A., Marsz A., 2005, *Cyrkulacyjne uwarunkowania ekstremalnego zlodzenia Bałtyku*. [w:] *Ekstremalne zjawiska hydrologiczne i meteorologiczne* (red. E. Bogdanowicz, U. Kossowska-Cezak, J. Szkutnicki), Warszawa, Monografie IMGW, 429-440.
- Wahl Th., Jensen J., Mudersbach Ch., 2017, *A multivariate statistical model for advanced storm surge analyses in the North Sea*. Coastal Engineering Proceeding, 32, 1-12. DOI: 10.9753/icce.v32.currents.19.
- Wiśniewski B., Wolski T., 2009, *Katalogi wzebrań i obniżeń sztormowych poziomu morza oraz ekstremalne poziomy wód na Polskim wybrzeżu*. Wyd. Naukowe Akademii Morskiej, Szczecin, ss.156.
- Yue S., Rasmussen P., 2002, *Bivariate frequency analysis: discussion of some useful concepts In hydrological application*. Hydro Process, 16, 2881-2898.

## Streszczenie

W artykule poruszono problematykę interpretacji wyników analizy dwuwymiarowej w odniesieniu do: 1) zasadności wyboru stochastycznego modelu w warunkach stacjonarności i niestacjonarności wzebrania sztormowo-roztopowego, 2) porównywania okresów powtarzalności i prawdopodobieństw przewyższenia zdefiniowanych w różnych zbiorach, oraz 3) porównywania jednowymiarowych prawdopodobieństw przewyższenia z ich dwuwymiarowymi odpowiednikami. Zmienną 2D utworzyły najwyższy poziom morza zaobserwowany w czasie wzebrań sztormowych w profilu wodowskazowym Ustka  $H_{UST}$  (cm) i korespondujący z tym zdarzeniem przepływ w ujściowym odcinku rzeki w profilu wodowskazowym Charnowo  $Q_{CHA}$  ( $m^3s^{-1}$ ). Parametry łącznej dystrybuanty oszacowano za pomocą 2-wymiarowej 2-parametrowej kopuli archimedesowskiej BB1. Do obliczania charakterystyk projektowych użyto 7 funkcji łącznego i warunkowego prawdopodobieństwa zmiennej 2D ( $H_{UST}$ ,  $Q_{CHA}$ ). Wykonana analiza wykazała, że porównywanie prawdopodobieństw zdefiniowanych w różnych dziedzinach i zbiorach oraz jednowymiarowych z dwuwymiarowymi powinno być wykonywane tylko w celu zbadania błędu wynikającego z nieprawidłowego wyboru modelu probabilistycznego. Każde zjawisko może być opisane za pomocą zmiennej wielowymiarowej, natomiast często własności losowej tylko jednej zmiennej są istotne z punktu widzenia celów projektowych.

Słowa kluczowe: częstość stacjonarna i niestacjonarna, prawdopodobieństwo przewyższenia, okres powtarzalności, teoria kopuli, funkcja kopuli BB1, port morski w Ustce



---

### Summary

The article discusses the problem of determining the bivariate design characteristics of storm-snowmelt floods. For analysis the section of estuary Slupia basin in the area which is positioned a seaport in Ustka was used. The main natural hazard that determine the functioning of the seaport are: (i) storm surges in conjunction with backwater, (ii) uncontrolled increase in water level due to ice jam on the River Slupia and ice cover of the Baltic sea, (iii) snowmelt and rainy floods, (iv) destruction of sea coasts as results of waves, wind, sea currents, and (v) the movement of sediment. Seven functions for frequency analysis of storm and snowmelt floods were compared. The copula-based 2D probability distribution was applied to statistically describe floods with two parameters: maximum water level observed in the coastal area at Ustka in the period 1967-2005  $H_{UST}$  [cm] and correspondent of the event the peak of discharge observed in outlet of Slupia River at Charnowo  $Q_{CHAR}$  [ $m^3s^{-1}$ ]. The scope of this article is focused mainly on determine the bivariate characteristics and interpretation of different the joint and conditional probabilities. This article is an attempt to answer the question whether in the nonstationary conditions of phenomena can be used relatively simple stochastic model as it has a significant impact on the practice of planning and design of water sources. The article highlighted the need to properly define the various probabilities, especially in bi- and multivariate analyses. Comparing the probabilities defined in different domains and in different sets comparing the univariate probability with bivariate should only be carried out to examine the error resulting from improper selection of a probabilistic model. Analyzing the frequency of extreme events such floods, droughts is best considered in terms of the joint and the conditional probability, reasoning in terms of return period can lead to an erroneous understanding of the probability of events and incorrect description of the mechanism of this event.

**Key words:** stationary and non-stationary frequency, probability of exceedance, return period, copula's theory, BB1 copula function, sea port in Ustka

Maurycy Ciupak,  
Biuro Prognoz Hydrologicznych w Krakowie  
Instytut Meteorologii i Gospodarki Wodnej—Państwowy Instytut Badawczy  
e-mail: maurycy.ciupak@imgw.pl