

# 17<sup>th</sup> SYMPOSIUM ON HYDROACOUSTICS

Jurata May 23-26, 2000



## UOGÓLNIONY OPIS ŚREDNIEGO CIŚNIENIA AKUSTYCZNEGO W QUASILINIOWYM PRZYBLIŻENIU PARABOLICZNYM

### Generalized description for averaged acoustic pressure using quasilinear parabolic approximation

K. Zachariasz

Department of Acoustics, Technical University of Gdańsk,  
ul. G.Narutowicza 11/12, 80-952 Gdańsk, Poland.

email: zachar@eti.pg.gda.pl

*Harmonic generation in the nearfield of the harmonically excited circular piston source is considered. The quasilinear parabolic model is used to determine the averaged pressure over the planar receiving transducer of a diameter equal to that of the source. The model is then simplified by assumption that the receiving transducer covers the entire section of the acoustic beam. The derived general expressions are used in sample computations of the second and third harmonic components of the averaged pressure in distilled water. The results of computations are compared with the results obtained from direct numerical integration (so called Bergen code) of the KZK equation and with the experiment conducted in distilled water.*

#### WPROWADZENIE

Zniekształcenia fal akustycznych o skończonych amplitudach nie zawsze są badane przy pomocy hydrofonów igłowych o pomijalnie małych rozmiarach. Odpowiednie akustyczne metody pomiarowe rezygnują często z określania przestrzennego rozkładu składowych harmonicznych ciśnienia akustycznego na rzecz prostszych, jednowymiarowych charakterystyk, opisujących zmiany tego ciśnienia wzdłuż osi głównej przetwornika źródłowego o drganiach sinusoidalnych. Funkcję hydrofonu spełnia wtedy zwykle płaski przetwornik odbiorczy o dużej, w porównaniu z długością fali akustycznej emitowanej przez źródło, średnicy [1-4]. Napięcie na takim przetworniku odbiorczym jest proporcjonalne do ciśnienia akustycznego, uśrednionego na jego powierzchni.

Charakterystyki eksperymentalne zmierzone dla kilku (zazwyczaj podstawowej i drugiej) składowych harmonicznych ciśnienia akustycznego uzależnione są od parametrów źródła fali akustycznej oraz ośrodka propagacji. Aproksymacja wyników pomiarów przez odpowiednie charakterystyki teoretyczne pozwala na wyznaczenie parametrów poszukiwanych w danej metodzie pomiarowej - na przykład amplitudy ciśnienia akustycznego przy powierzchni źródła i/lub parametru nieliniowości ośrodka propagacji [2-4].

Charakterystyki teoretyczne formułowane są na podstawie matematycznego opisu propagacji fali sprężystej, emitowanej przez zastosowany przetwornik źródłowy. Wykorzystuje się w tym celu modele uproszczone, dobierane przy uwzględnieniu cech źródła fali i oczekiwanej dokładności opisu pola akustycznego.

Szczególnie interesujący jest przypadek płaskiego źródła kołowego o dużej wartości iloczynu  $ka$  ( $k = \omega/c_0$  jest liczbą falową,  $\omega$  częstotliwością kątową zaburzenia,  $c_0$  prędkością fazową fali akustycznej i  $a$  promieniem przetwornika), emitującego wiązkę o symetrii osiowej. Przetwornik ultradźwiękowy o takim kształcie jest bowiem łatwo realizowalny, a jego pole bliskie można stosunkowo dokładnie [1,3,4] modelować przy pomocy równania KZK:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial \sigma \partial \tau} = \alpha r_0 \frac{\partial^3 p'}{\partial \tau^3} + \frac{1}{4} \nabla_{\perp}^2 p' + \frac{r_0}{2l_D} \frac{\partial^2 p'^2}{\partial \tau^2}, \quad (1)$$

stanowiącego paraboliczne uproszczenie nieliniowego równania falowego. W równaniu tym  $\alpha$  jest współczynnikiem tłumienia absorpcyjnego, a  $l_D = \rho_0 c_0^3 / \omega \beta p_0$  jest odległością nieciągłości dla fali płaskiej, przy czym  $\rho_0$  jest gęstością cieczy w stanie nie zaburzonym i  $\beta$  współczynnikiem nieliniowości ośrodka. Zmienne bezwymiarowe: ciśnienie akustyczne  $p' = p/p_0$ , współrzędna wzdłuż głównej osi wiązki  $\sigma = z/r_0$ , współrzędna w kierunku poprzecznym do osi wiązki  $\xi = r/a$  i faza  $\tau = \omega(t - z/c_0)$ , wiążąca układ współrzędnych z czołem fali propagującej się z prędkością  $c_0$ , są wynikiem normalizacji odpowiadających im wielkości pierwotnych względem: amplitudy ciśnienia akustycznego przy powierzchni przetwornika nadawczego  $p_0$ , promienia przetwornika  $a$ , odległości Rayleigha  $r_0 = ka^2/2$ , częstotliwości kątowej zaburzenia  $\omega$  oraz prędkości fali akustycznej  $c_0$ . Symbol  $\nabla_{\perp}^2$  oznacza laplasjan dwuwymiarowy względem współrzędnych poprzecznych do osi wiązki. Równanie obowiązuje w strefie przysiosowej z wyłączeniem obszaru zawartego pomiędzy płaszczyzną przetwornika źródłowego i płaszczyzną  $\sigma = \sigma_K$ , gdzie  $\sigma_K = 2(ka)^{-2/3}$ .

Bezpośrednie rozwiązania równania KZK dostępne są jedynie poprzez całkowanie numeryczne - na przykład przy pomocy procedur opracowanych na Uniwersytecie w Bergen [5], wykorzystujących metodę różnic skończonych. Otrzymane ciśnienie akustyczne można uśrednić na powierzchni przetwornika odbiorczego w drodze dodatkowego całkowania. Gdy natężenie efektów nieliniowych jest umiarkowane, do opisu średniego ciśnienia akustycznego wykorzystuje się także analityczne rozwiązania równania KZK, otrzymane po zastosowaniu dodatkowego, quasiliniowego uproszczenia. Odpowiednie wyrażenia mają jednak skomplikowaną postać i muszą być obliczane numerycznie - można je dodatkowo uprościć zakładając, że przetwornik odbiorczy obejmuje cały przekrój wiązki. Założenie takie ma sens dla małej rozwartości kątowej wiązki oraz przy ograniczeniu obszaru ważności opisu do wnętrza pola bliskiego źródła. Energia akustyczna skoncentrowana jest wtedy prawie całkowicie w obszarze przysiosowym, zwłaszcza dla wyższych składowych harmonicznych.

Wyrażenia opisujące zmiany amplitudy drugiej składowej harmonicznej ciśnienia akustycznego, uśrednionego na powierzchni płaskiego przetwornika tłokowego o nieskończonej dużej średnicy uzyskali: V. E. Kunicyn i O. V. Rudenko [6] - dla przypadku, gdy źródłem wiązki akustycznej jest płaski przetwornik o drganiach tłokowych oraz S. Saito [2] - dla źródła skupiającego o drganiach gaussowskich. Opis dla trzeciej składowej harmonicznej tego ciśnienia w polu płaskiego źródła tłokowego podano w pracy [7]. W niniejszej pracy prezentowane jest uogólnienie [4] modelu analitycznego z pracy [7] na przypadek dowolnej (jednak wyższej niż podstawowa) składowej harmonicznej.

## 1. ROZWIĄZANIE RÓWNIANIA KZK METODĄ KOLEJNYCH PRZYBLIŻEŃ

Gdy natężenie zjawisk nieliniowych nie jest duże, równanie KZK można rozwiązywać metodą kolejnych przybliżeń w obszarze ograniczonym przez punkt nieciągłości ( $\sigma < l_D / r_0$ ). Postępowanie takie łączy w sobie uproszczenia charakteryzujące przybliżenia paraboliczne oraz quasilineowe i jest stosowane przy modelowaniu nieliniowych oddziaływań wąskich wiązek fal akustycznych o skończonych amplitudach, a także procesu generacji składowych harmonicznych wiązki fali pierwotnie sinusoidalnej. Uwzględnienie prążkowego charakteru widma fali pierwotnej pozwala wtedy na przejście do układu parabolicznych równań różniczkowych dla zespolonych amplitud ciśnienia akustycznego: równania jednorodnego dla zlinearyzowanej fali pierwotnej oraz niejednorodnego opisującego analizowaną falę wtórną. W szczególnych przypadkach umożliwiają one otrzymanie ścisłych, analitycznych rozwiązań, pozwalających na wykonanie obliczeń numerycznych lub na dalsze uproszczenia przy pomocy odpowiednich przekształceń asymptotycznych.

Przy rozpatrywaniu zagadnienia generacji wyższych składowych harmonicznych w polu monochromatycznego źródła wiązki akustycznej przyjąć można, że poszukiwane rozwiązanie równania KZK (1) ma postać:

$$p'(\xi, \sigma, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} p'_n(\xi, \sigma, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} [P'_n(\xi, \sigma) e^{-in\tau} + c.c.], \quad (2)$$

gdzie  $p'_n(\xi, \sigma, \tau)$  oznacza  $n$ -tą składową harmoniczną ciśnienia akustycznego:

$$p'_n(\xi, \sigma, \tau) = \text{Re} \{ P'_n(\xi, \sigma) e^{-in\tau} \},$$

$P'_n(\xi, \sigma)$  zespoloną amplitudę tej składowej, a *c.c.* wielkość zespoloną sprzężoną.

Uproszczone wyrażenia na  $p'_n$  można otrzymać zakładając, że stanowią one kolejne poprawki w przybliżonym rozwiązaniu równania KZK, uzyskiwane sukcesywnie w trakcie rozwiązywania tego równania metodą kolejnych przybliżeń. Uwzględnienie rozwinięcia Fouriera (2) prowadzi wtedy do następującego układu równań dla kolejnych przybliżeń [8]:

$$\left( \frac{\partial}{\partial \sigma} + \frac{1}{4ni} \nabla_{\perp}^2 + n^2 \alpha r_0 \right) P'_n = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } n = 1, \\ -in \frac{r_0}{4l_D} \sum_{k=1}^{n-1} P'_k P'_{n-k}, & \text{jeżeli } n > 1. \end{cases} \quad (3)$$

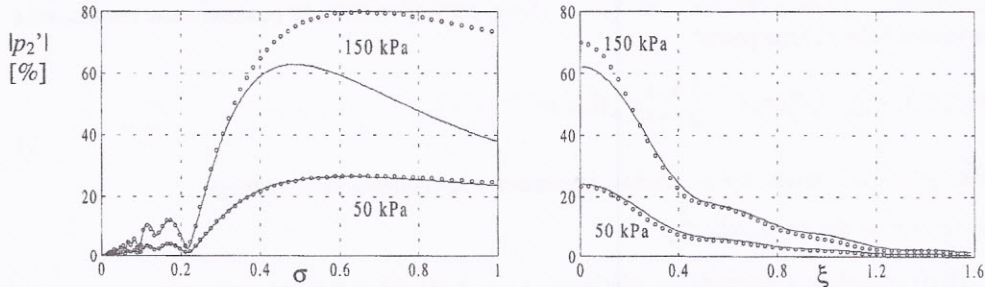
Po prawej stronie równania  $n$ -tego przybliżenia ujęte są człony źródłowe  $P'_k \exp(-ikt)$  oraz  $P'_{n-k} \exp[-i(n-k)\tau]$ , odpowiadające tylko tym składnikom wyrażenia  $[p'_{1+} p'_{2+} \dots + p'_{n-1}]^2$ , które uczestniczą w wytwarzaniu  $n$ -tej składowej harmonicznej. Ponieważ wiązka akustyczna cechuje się symetrią osiową, ścisłe, analityczne rozwiązania układu równań (3) znaleźć można przy pomocy przekształcenia Hankela. Mają one postać [8]:

$$P'_1(\xi, \sigma) = -\frac{2i}{\sigma} e^{-\alpha r_0 \sigma} \int_0^{\infty} \exp\left(i \frac{\xi^2 + \xi'^2}{\sigma}\right) J_0\left(\frac{2\xi\xi'}{\sigma}\right) P'_1(\xi', 0) \xi' d\xi', \quad (4a)$$

$$P'_{n>1}(\xi, \sigma) = -\frac{n^2 r_0}{2l_D} e^{-n^2 \alpha r_0 \sigma} \int_0^{\sigma} \frac{e^{\frac{in\xi^2 + n^2 \alpha r_0 \sigma'}{\sigma - \sigma'}}}{\sigma - \sigma'} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} P'_k P'_{n-k} e^{\frac{in\xi'^2}{\sigma - \sigma'}} J_0\left(\frac{2n\xi\xi'}{\sigma - \sigma'}\right) \xi' d\xi' d\sigma'. \quad (4b)$$

Zauważyć można, że w celu uzyskania przybliżonego rozwiązania dla  $n$ -tej składowej harmonicznej ciśnienia akustycznego, należy rozwiązać w sposób iteracyjny  $n$  równań dla kolejnych przybliżeń. Z każdym równaniem związane są warunki brzegowe, stawiane w płaszczyźnie przetwornika źródłowego odpowiednio do przyjętych dla rozpatrywanego zagadnienia założeń. Dla równania pierwszego przybliżenia warunki te opisują rozkład  $P'_1(\xi, 0)$  amplitud ciśnienia akustycznego fali pierwotnej przy powierzchni apertury źródła. Dla przybliżeń wyższych rzędów przyjmowane są warunki brzegowe zerowe, ponieważ przyjmuje się, że źródło nie generuje składowych harmonicznych wyższych niż podstawowa.

Wyniki przykładowych obliczeń dla drugiej składowej harmonicznej ciśnienia akustycznego wzdłuż i w poprzek osi wiązki akustycznej emitowanej przez kołowy przetwornik tłokowy ( $a = 0.023$  m i  $f = 1.0$  MHz) przedstawia rys. 1. Rozwiązanie numeryczne dla modelu parabolicznego pokrywa się z quasiliniowym dla mniejszego natężenia fali akustycznej, a więc wtedy, gdy pomijanie przekazywania energii do/z wyższych składowych harmonicznych - specyficzne dla aproksymacji quasiliniowej - nie wywiera znaczącego wpływu na otrzymywane w tym przybliżeniu rozwiązanie.



Rys.1. Zmiany amplitud ciśnienia akustycznego drugiej składowej harmonicznej wzdłuż i w poprzek (dla  $\sigma = 0.45$ ) osi akustycznej przetwornika tłokowego o  $ka = 97$  i  $p_0 = 50/150$  kPa, w wodzie destylowanej o  $T = 20$  °C (absorpcję pominięto). Znaczniki okrągłe odpowiadają wynikom obliczeń według wzoru (4b), a linie ciągłe wynikom numerycznego całkowania równania KZK

Fig.1. On-axis and radial (at  $\sigma = 0.45$ ) sound pressure amplitudes of the second harmonic component for piston transducer with  $ka = 97$  and  $p_0 = 50/150$  kPa in distilled water at  $T = 20$  °C (absorption is neglected). Circles show the results of computation according to eq. (4b), solid lines are numerical solutions of KZK equation

## 2. UŚREDNIONE CIŚNIENIE AKUSTYCZNE

Pomiędzy ciśnieniem akustycznym uśrednionym  $\langle p'(\xi, \sigma, \tau) \rangle$  na powierzchni płaskiego, osiowo symetrycznego przetwornika tłokowego o nieskończenie dużej średnicy, a ciśnieniem  $p'(\xi, \sigma, \tau)$  przy jego powierzchni, istnieje zależność:

$$\langle p'(\xi, \sigma, \tau) \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} 2\pi\xi p'(\xi, \sigma, \tau) d\xi = 2 \int_0^{\infty} \xi p'(\xi, \sigma, \tau) d\xi . \quad (5)$$

Przy pomocy podstawienia:

$$P'_n(\xi, \sigma) = A'_n(\xi, \sigma) e^{-n^2 \alpha r_0 \sigma} , \quad (6)$$

poszczególne człony równań (3) wyrazić można w funkcji nie tłumionej amplitudy ciśnienia  $A'_n(\xi, \sigma)$ , otrzymując w efekcie układ równań (dla  $n > 1$ ):

$$\frac{\partial A'_n}{\partial \sigma} + \frac{1}{4ni} \nabla_{\perp}^2 A'_n = -in \frac{r_0}{4l_D} \sum_{k=1}^{n-1} e^{2k(n-k)\alpha r_0 \sigma} A'_k A'_{n-k}. \quad (7)$$

Po przemnożeniu obu stron równań (7) przez  $2\xi d\xi$  oraz scałkowaniu otrzymujemy:

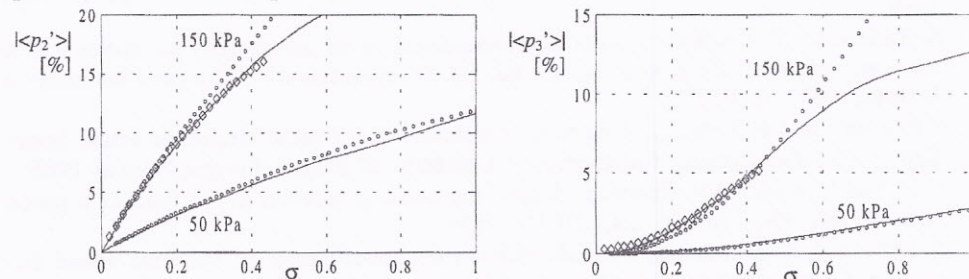
$$\frac{d\langle A'_n \rangle}{d\sigma} = -in \frac{r_0}{2l_D} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} e^{2k(n-k)\alpha r_0 \sigma} A'_k A'_{n-k} \xi d\xi.$$

Ponowne całkowanie względem zmiennej  $\sigma$  prowadzi, po dodatkowym uwzględnieniu związku (6), do poszukiwanej zależności:

$$\langle P'_n \rangle = -in \frac{r_0}{2l_D} e^{-n^2 \alpha r_0 \sigma} \int_0^{\infty} e^{n^2 \alpha r_0 \sigma'} \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^{n-1} P'_k P'_{n-k} \xi d\xi d\sigma'. \quad (8)$$

Otrzymana postać (8) wyrażeń opisujących zmiany średniego ciśnienia akustycznego wzdłuż osi wiązki jest mniej złożona (całkowanie podwójne, a nie potrójne) niż w przypadku skończonej średnicy przetwornika odbiorczego. Niestety, w wyrażeniach podcałkowych występują rozkłady zespolonych amplitud poszczególnych składowych harmonicznych ciśnienia akustycznego. Powoduje to, że obliczenia dla  $n$ -tej składowej harmonicznej średniego ciśnienia muszą być poprzedzone obliczeniem rozkładów  $P'_k(\xi, \sigma)$  dla wszystkich niższych składowych ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ).  $P'_1$  jest całką zlinearyzowanego równania dla fali pierwotnej.

Wyniki takich obliczeń dla drugiej i trzeciej składowej harmonicznej średniego ciśnienia akustycznego (w polu bliskim kołowego źródła tłokowego o  $ka = 97$ ) przedstawia rys.2. Dokładność rozwiązań ocenić można poprzez porównanie z wykresami uzyskanymi przy pomocy numerycznego modelu parabolicznego oraz z wynikami pomiarów [4], wykonanych przy pomocy zestawu dwóch przetworników.



Rys. 2. Zależność amplitud drugiej i trzeciej składowej harmonicznej uśrednionego ciśnienia akustycznego od odległości między przetwornikami o  $ka = 97$  i  $p_0 = 50/150$  kPa w wodzie destylowanej o  $T = 20$  °C. Znaczniki okrągłe odpowiadają wynikom obliczeń według wzoru (8), romby wynikom pomiarów, a linie ciągłe uśrednionym wynikom numerycznego całkowania równania KZK

Fig. 2. The dependence of the second and third harmonic amplitudes of the averaged sound pressure vs. distance between transducers for  $ka = 97$  and  $p_0 = 50/150$  kPa in distilled water at  $T = 20$  °C. Circles show the results of computation according to eq. (8), diamonds show the results of measurements, solid lines are from averaged numerical solutions of KZK equation

### 3. WNIOSKI

Wykresy otrzymane przy pomocy obu modeli: parabolicznego oraz quasiliniowego parabolicznego, pokrywają się dla małego natężenia fali akustycznej. Charakterystyczne dla aproksymacji quasiliniowej pomijanie wyższych, niż aktualnie rozpatrywana, składowych harmonicznych w procesie wymiany energii powoduje bowiem tym mniejsze błędy w opisie quasiliniowym, im mniejsze jest natężenie fali akustycznej. Zauważyć można, że przy dużej koncentracji energii wiązki w obszarze przyosiowym, dokładność modelu zakładającego nieskończenie dużą średnicę przetwornika odbiorczego jest dobra.

Przedstawione wykresy kwestionują praktyczną przydatność modelu quasiliniowego parabolicznego dla wyższych niż trzecia składowych harmonicznych ciśnienia średniego; dopuszczalnym natężeniom fali akustycznej odpowiadają małe amplitudy tych składowych, uniemożliwiające wystarczająco precyzyjne pomiary. Podkreślić również należy, że numeryczne obliczanie rozkładów  $P'_k(\xi, \sigma)$  jest bardzo czasochłonne.

Przedstawiony model wykorzystać można do oceny poprawności i dokładności nowo opracowywanych modeli dla uśrednionego ciśnienia akustycznego - na przykład modelu w pełni parabolicznego, wykorzystującego uśrednianie rezultatów bezpośredniego, numerycznego całkowania równania KZK. Zagwarantować przy tym należy, żeby testy przeprowadzane były w warunkach wystarczająco małego natężenia fali pierwotnej oraz w obszarze ważności równania KZK.

#### LITERATURA

1. C. Baker, B. Ward, and V. F. Humphrey, The effect of receiver size on nonlinear pressure field measurement, *J. Acoust. Soc. Am.* 100, pp. 2062-2069, 1996.
2. S. Saito, Measurement of the acoustic nonlinearity parameter in liquid media using focused ultrasound, *J. Acoust. Soc. Am.* 93, 162-172, 1993.
3. K. Zachariasz, The use of back projection reconstruction of actual source characteristics for a radiating transducer in nonlinear pressure field modelling, *Proceedings of the Fourth European Conference on Underwater Acoustics, Rome, Vol. II*, pp.951-956, 1998.
4. K. Zachariasz, The acoustic system for measurement of the nonlinearity parameter  $B/A$  of the water medium using parabolic model, Ph. D. dissertation, Technical University of Gdańsk, (1997) (in Polish).
5. J. Berntsen and E. Vefring, Numerical computation of a finite amplitude sound beam, Rep. No. 81, Department of Mathematics, University of Bergen, Bergen, Norway, 1986.
6. V.E. Kunitsyn and O.V. Rudenko, Second harmonic generation in the field of a piston radiator, *Sov. Phys. Acoust.*, 24, 310-313, 1978.
7. S. Leble and K. Zachariasz, Multiple frequencies contributions of nearfield sound diffraction from uniformly excited piston, *Proceedings of the XIIIth Symposium on Hydroacoustics, Gdynia-Jurata 7-10.05.1996*, Gdynia, pp.165-172, 1996.
8. G. Du and E. Wang, Generation of harmonics in a focused Gaussian sound field, *J. Acoust. Soc. Am.* 97, 1486-1488, 1995.