

DWUWYMIAROWY MODEL POMIARU DLA TYPOWYCH, ZAŁOŻONYCH ROZKŁADÓW PRAWDOPODOBIEŃSTWA WIELKOŚCI WEJŚCIOWYCH

Jacek PUCHALSKI¹, Paweł FOTOWICZ²

- Główny Urząd Miar
tel.: 22 5819437 e-mail: jacek.puchalski@gum.gov.pl
- tel.: 22 5819056 e-mail: pawel.fotowicz@gum.gov.pl

Streszczenie: Dla dwuwymiarowego modelu pomiaru zostaną zaprezentowane przykłady zostaną zaprezentowane przykłady rozkładów, których sploty generują rozkłady wypadkowe dla dwuwymiarowego modelu pomiaru. W ogólności zmienne wejściowe jako zmienne losowe mogą być skorelowane co wpływa na kształt i położenie obszaru rozszerzenia który wyznacza obszar niepewności pomiaru. Dla wielkości wejściowych będących zmiennymi losowymi o rozkładzie Gaussa podano wzory analityczne pozwalające obliczyć długości półosi elipsy - modelu obszaru niepewności dla wielkości wyjściowych. Również metodą Monte Carlo wyznaczone zostaną obszary rozszerzenia dla modelu dwuwymiarowego dla przyjętego prawdopodobieństwa 95 %. Wyniki symulacji zostaną przedstawiona na trójwymiarowych wykresach uzyskanych z projekcji plików graficznych .fig (środowisko Matlab). Zaprezentowane zostaną także obszary rozszerzenia wyznaczone metodą Monte Carlo dla innych rozkładów, powstałych w wyniku splotu rozkładu normalnego i prostokątnego, a także dwóch rozkładów prostokątnych które nie mają trywialnego rozwiązania analitycznego. Dokonana będzie ocena uzyskanych symulacji numerycznych.

Słowa kluczowe: obszar rozszerzenia, korelacja, macierz korelacji, Metoda Monte Carlo

1. WSTĘP

Wydany przez JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology) dokument [1] przedstawia zalecenia związane z opracowaniem wyniku pomiaru w przypadku wielowymiarowego modelu pomiaru [2]. Jednak najczęściej spotykanym w praktyce metrologicznej jest model dwuwymiarowy [3–5]. Przy jego opracowaniu wykorzystuje się najczęściej specjalistyczne oprogramowanie zgodne z przyjętym algorytmem [6]. Obliczenia można wykonywać przy założeniu różnych rozkładów prawdopodobieństwa dla wielkości wejściowych. Takie obliczenia zostały wykonane w odniesieniu do przykładu zawartego w dokumencie [1].

2. MODEL POMIARU

Przyjmijmy model, dla którego możliwa jest ilustracja graficzna uzyskanego wyniku pomiaru w postaci dwuwymiarowego obszaru rozszerzenia. Nasz menzurand wektorowy można zdefiniować w postaci:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

gdzie $y_1 = x_1 + x_3$ i $y_2 = x_2 + x_3$. Dla pierwszej i drugiej wielkości wejściowej x_1 i x_2 można przyjąć rozkłady normalne, a dla trzeciej x_3 rozkład prostokątny. Ponadto niepewności standardowe związane z tymi wielkościami wynoszą odpowiednio: $u(x_1) = u(x_2) = 1$ oraz $u(x_3) = 3$. Ponieważ trzecia wielkość wejściowa x_3 powtarza się w obu równaniach wielkości wyjściowych i jest wielkością dominującą, to należy spodziewać się, że wielkości y_1 i y_2 są ze sobą silnie skorelowane.

Macierz kowariancji nieskorelowanych wielkości wejściowych ma postać:

$$\mathbf{U}_x = \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

gdyż wszystkie wielkości wejściowe są niezależne i pary ich kowariancji $u(x_i, x_j) = 0$. Macierz współczynników wrażliwości jest postaci:

$$\mathbf{C}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

gdyż w równaniu wielkości wyjściowej y_1 nie występuje wielkość wejściowa x_2 , a w równaniu wielkości wyjściowej y_2 nie występuje wielkość wejściowa x_1 . Zgodnie z zasadą propagacji niepewności wyznaczamy macierz kowariancji wielkości wyjściowych:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_y &= \mathbf{C}_x \mathbf{U}_x \mathbf{C}_x^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Ponieważ $u(y_1, y_2) = u(y_2, y_1) = r(y_1, y_2) \cdot u(y_1) \cdot u(y_2) = r(y_2, y_1) \cdot u(y_2) \cdot u(y_1)$ to współczynnik korelacji $r = 0,9$. W ogólności dwuwymiarowa macierz kowariancji wielkości wyjściowych jest postaci:

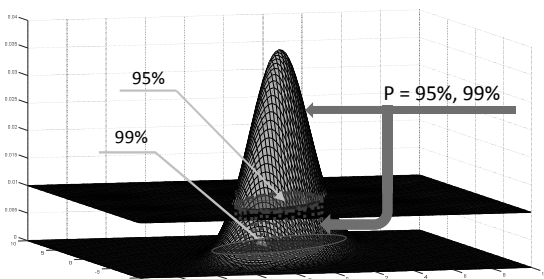
$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} u^2(y_1) & ru(y_1)u(y_2) \\ ru(y_1)u(y_2) & u^2(y_2) \end{bmatrix} \quad (5)$$

Sprowadzając macierz \mathbf{U}_y^{-1} do postaci diagonalnej tj. zgodnie z równaniem $\det[\mathbf{U}_y^{-1} - \lambda \cdot \mathbf{I}] = 0$ otrzymujemy

pierwiastki charakterystyczne, które są odwrotnie proporcjonalne do kwadratów półosi elipsy wyznaczającej obszar rozszerzenia. Współczynnikiem proporcjonalności jest kwadrat współczynnika rozszerzenia k_p . Jednocześnie okazuje się, że wartości własne macierzy \mathbf{U}_y^{-1} są odwrotnościami odpowiednich wartości własnych macierzy kowariancji \mathbf{U}_y . A zatem wykonując diagonalizację macierzy \mathbf{U}_y otrzymuje się kwadraty półosi spełniających równanie elipsy w nowych współrzędnych układu kartezjańskiego z_1 i z_2 $\frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} = 1$ wyznaczonym przez prostopadłe wektory własne macierzy \mathbf{U}_y^{-1} identyczne jak wektory własne macierzy \mathbf{U}_y . Półosie główne elipsy opisuje formuła:

$$\begin{cases} a^2 \\ b^2 \end{cases} = k_p^2 \left\{ \frac{u^2(y_1) + u^2(y_2)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{u^2(y_1) - u^2(y_2)}{2}\right)^2 + (ru(y_1)u(y_2))^2} \right\} \quad (6)$$

gdzie k_p to współczynnik rozszerzenia dwuwymiarowego obszaru. Dla prawdopodobieństwa 95 %, $k_p = 2,45$ [1]. Dla znaku plus otrzymujemy dłuższą półoś a , zaś dla znaku minus krótszą półoś b . Obszar ten można zilustrować graficznie jak na rysunku 1.



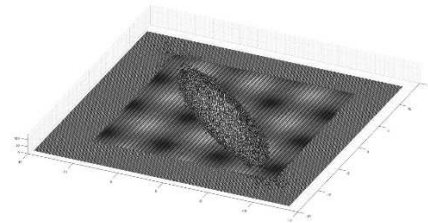
Rys. 1. Obszar rozszerzenia dla określonego prawdopodobieństwa

Wykonując obliczenia metodą propagacji niepewności przy założeniu splotu rozkładów normalnych (x_1 z x_3 i x_2 z x_3) otrzymujemy dwuwymiarowy rozkład normalny, którego wspólna funkcja gęstości prawdopodobieństwa dla wielkości wyjściowej w przekroju poprzecznym ma kształt elipsy. Zakładając, że $u(y_1) = u(y_2) = u(y)$ wielkości półosi upraszczają się do postaci:

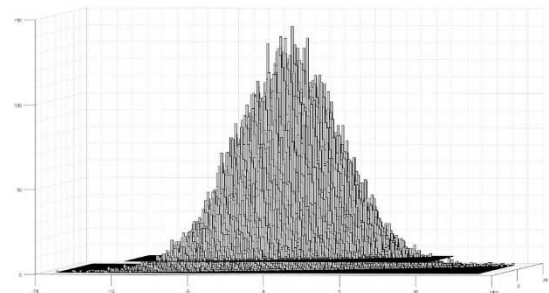
$$\begin{aligned} a &= u_{max}(y) = k_p \sqrt{1+r} \cdot u(y) \\ b &= u_{min}(y) = k_p \sqrt{1-r} \cdot u(y) \end{aligned} \quad (7a, b)$$

Gdy $r = 0$ to $u_{max}(y) = u_{min}(y) = k_p u(y)$ i obszar rozszerzenia przybiera kształt koła.

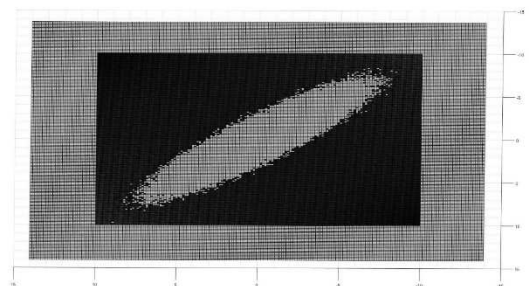
Drugą metodą, zalecaną przez dokument [1] do obliczeń obszaru niepewności metodą propagacji rozkładów jest metoda Monte Carlo. W artykule przedstawiono wyniki obliczeń z wykorzystaniem środowiska Matlab. Dla rozkładów normalnych przyjętych dla wielkości wejściowych wyniki takiej symulacji przedstawiają kolejne rysunki 2-4.



Rys. 2. Rozkład dla modelu dwuwymiarowego z zaznaczonym obszarem rozszerzenia dla zmiennych x_1, x_2 o rozkładach normalnych $\sim N(0,1)$ i $x_3 \sim N(0,3)$ - rzut perspektywiczny

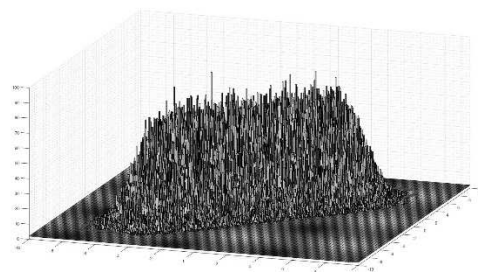


Rys. 3. Rzut perspektywiczny rozkładu dla modelu dwuwymiarowego z zaznaczonym obszarem rozszerzenia dla $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ i $x_3 \sim N(0,3)$

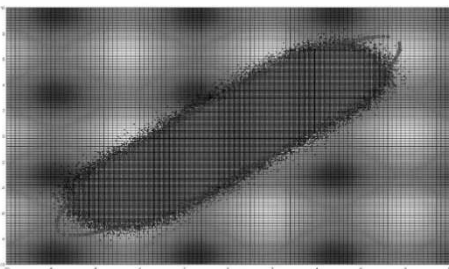


Rys. 4. Dwuwymiarowy obszar rozszerzenia dla rozkładów normalnych $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ i $x_3 \sim N(0,3)$

Dla wielkości wejściowych o rozkładach mieszanych: normalnych i jednostajnych (prostokątnych), wyniki symulacji przedstawiają kolejne rysunki 5 i 6. Czerwona linia określa obszar rozszerzenia wyznaczony metodą propagacji niepewności.

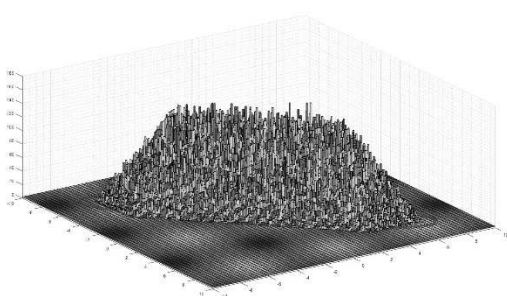


Rys. 5. Rozkład dla modelu dwuwymiarowego dla wielkości wejściowych opisanych rozkładami normalnymi i prostokątnym - rzut perspektywiczny

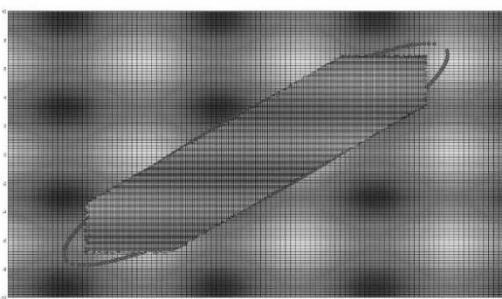


Rys. 6. Dwuwymiarowy obszar rozszerzenia dla wielkości wejściowych opisanych rozkładami normalnymi i prostokątnym

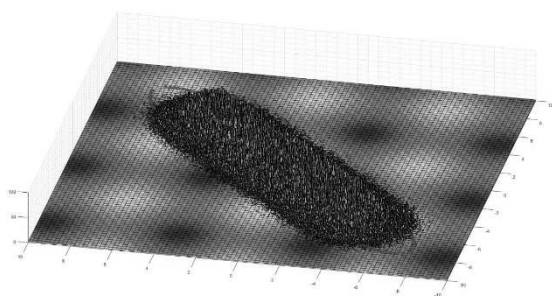
W podobny sposób można wyznaczyć rozkład dwuwymiarowy dla wielkości wejściowych o rozkładach prostokątnych (rys. 7 i 8). I tu czerwona linia określa obszar rozszerzenia, wyznaczony metodą propagacji niepewności dla splotu rozkładów normalnych.



Rys. 7. Rozkład dla modelu dwuwymiarowego przy wielkościach wejściowych opisanych rozkładami prostokątnymi: $x_1, x_2 \sim R(0,1)$ i $x_3 \sim R(0,3)$ - rzut perspektywiczny



Rys. 8. Dwuwymiarowy obszar rozszerzenia dla wielkości wejściowych opisanych rozkładami prostokątnymi: $x_1, x_2 \sim R(0,1)$ i $x_3 \sim R(0,3)$



Rys. 9. Rzut perspektywiczny dwuwymiarowego rozkładu prostokątnego z obszarem rozszerzenia dla wielkości wejściowych opisanych rozkładami prostokątnymi $x_1, x_2 \sim R(0,1)$ i $x_3 \sim R(0,3)$ i linią czerwoną dla rozkładów normalnych

3. PODSUMOWANIE

Dokument [1] określa metody wyznaczania niepewności w przypadku wielowymiarowych modeli pomiaru. Miarą niepewności jest obszar rozszerzenia. Można go wyznaczyć metodą propagacji niepewności, przy użyciu rachunku macierzowego lub metodą propagacji rozkładów przy zastosowaniu symulacji Monte Carlo. Pierwsza z metod zaliczana jest do kategorii metod analitycznych, ze względu na analityczną postać równań dla parametrów obszaru niepewności w postaci elipsy (dużej i małej jej osi), choć samo wyznaczanie kształtu rozkładu normalnego dwuwymiarowego może wymagać użycia środków numerycznych. Warunkiem koniecznym dla zastosowania tej metody jest znajomość macierzy kowariancji.

Metoda propagacji rozkładów przy użyciu symulacji metodą Monte Carlo (MCM), może być stosowana dla dowolnych rozkładów statystycznych, dla których nie istnieją analityczne rozwiązania granic obszaru rozszerzenia. Jest ona realizowana tylko przy użyciu narzędzi programowych, metod numerycznych bazujących na implementacji generatorów liczb pseudolosowych z wykorzystaniem metody odwrócenia dystrybucji rozkładów. W pracy zastosowano implementację skryptu wykorzystującego funkcje biblioteczne, w środowisku Matlab z modułem statystycznym. Otrzymane kształty obszarów rozszerzenia wynikają oczywiście z rodzaju rozkładów prawdopodobieństwa z ustalonymi parametrami średniej i odchylenia standardowego przypisanym wielkościom wejściowym.

Symulacje numeryczne MCM wykonano dla: $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ i $x_3 \sim N(0,3)$ – rozkłady Gaussa ($a \approx 10,68$; $b = 2,45$) oraz dla: $x_1, x_2 \sim N(0,1)$ – rozkład Gaussa i $x_3 \sim R(0,3)$ – rozkład prostokątny, a także dla: $x_1, x_2 \sim R(0,1)$ i $x_3 \sim R(0,3)$ – wyłącznie rozkłady prostokątne. Próbkę wejściową były generowane z niezależnych generatorów i nie były skorelowane. Metoda ta powtórzona została wielokrotnie dla liczby próbek wejściowych od 640 tys. do 1 mln. Liczba obszarów dwuwymiarowych (koszyków), w których wyznaczane były ilości próbek dla wartości funkcji histogramu wynosiła od $200 \times 200 = 40$ tys. do $400 \times 400 = 160$ tys. Dla powyższych wartości otrzymano praktycznie identyczne wyniki, co do kształtu i rozmiaru obszaru rozszerzenia.

4. BIBLIOGRAFIA

1. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities. JCGM 102:2011.
2. Hampel B., Liu B., Nording F., J. Ostermann, P. Struszewski, J. Langfahl-Klabes, M. Bieler, H. Bosse, B. Güttler, P. Lemmens, M. Schilling, R. Tutsch: Approach to determine measurement uncertainty in complex nanosystems with multiparametric dependencies and multivariate output quantities. Measurement Science and Technology 29 (2018) 035003.
3. Ramos P. M., Janeiro F. M., Girão P. S.: Uncertainty evaluation of multivariate quantities: A case study on electrical impedance. Measurement 78 (2016) 397-411.
4. Hall B. D.: Evaluating the measurement uncertainty of complex quantities: a selective review. Metrologia 53 (2016) S25-S31.

5. Hall B. D.: Expanded uncertainty regions for complex quantities. *Metrologia* 50 (2013) 490-498.
6. Eichstädt S., Wilkens V.: GUM2DFT – a software tool for uncertainty evaluation of transient signals in the frequency domain. *Measurement Science and Technology* 27 (2016) 055001.

BIVARIATE MODEL OF MEASUREMENT FOR TYPICAL PROBABILITY DISTRIBUTIONS

In this work a few examples of typical distributions have been used for convolutions of results distributions in bivariate model of measurement. In general, the correlations of output quantities appeared and its has impact on the shape and location of coverage region. In the case of Gaussian distributions where analytical formulas have described the border of cover regions, the explicit formulas of half axes of elliptical cover region have been given. For bivariate models, in which the both one dimensional distributions are assumed as the convolution of typical distribution like: Gaussian and rectangular, the 95% coverage regions have been determined by using Monte Carlo method in Matlab environment. The coverage regions are illustrated on the perspective views of graphic Matlab .fig files. The convolutions of uniform distributions and Gaussian and rectangular distribution have no analytical border solutions, and to compare, the marked cover region for only Gaussian convolutions have been added. Finally, the assessment of gathered simulation has been carried out.

Keywords: coverage region, correlation, covariance matrix, Monte Carlo method.