

STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA SŁUPA PRZY DZIAŁANIU WYMUSZENIA GEOMETRYCZNEGO I OBCIĄŻENIA OKRESOWEGO

Streszczenie

W pracy wykonano analizę stateczności dynamicznej stalowego słupa pod działaniem wymuszenia przemieszczeniowego poprzez zbliżanie się końców słupa (zagadnienie Hoffa) oraz przy działaniu obciążenia harmonicznego. Przeprowadzono rozwiązanie równania różniczkowego metodą numerycznego całkowania Rungego-Kutty. Sporządzono również zapis dyskretny równań ruchu za pomocą elementów skończonych, dla rozwiązania którego zastosowano metodę bilansu harmonicznych oraz całkowania bezpośredniego Newmarka. Uzyskano wyniki w postaci przebiegów drgań giętnych słupa oraz obszarów częstości rezonansowych i nierezonansowych tzw. map Ince'a-Strutta.

1. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA SŁUPA PRZY WYMUSZENIU PRZEZ PRZEMIESZCZENIE - ZAGADNIENIE HOFFA

Podstawowe równanie drgań giętnych dla pręta otrzymane z teorii Bernoulliego-Eulera z uwzględnieniem wzajemnych przemieszczeń wzdłużnych z poprzecznymi, poprzez nieliniowy związek geometryczny, wstępnie wygiętego pręta

$$\varepsilon(t) = st - \left(\frac{m \cdot \pi}{2\lambda} \right)^2 (f_m^2(t) - f_0^2) \quad (1)$$

są opisane równaniem w postaci [2]:

$$w^{IV} + \varepsilon \lambda^2 w'' + \ddot{w} = w_0^{IV} \quad (2)$$

Dobierając funkcje będące rozwiązaniem drgań giętnych pręta w postaci

$$\begin{aligned} w(\bar{x}, \bar{t}) &= r f_m(\bar{t}) \cdot \sin(m\pi x), \\ w_0(\bar{x}) &= r f_0 \sin(m\pi x) \end{aligned} \quad (3)$$

oraz dokonując poniższych podstawień

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) / L; \quad \bar{x} = x / L; \quad \bar{t} = \frac{t}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot F}};$$

$$\varepsilon = \frac{N(t)}{E \cdot F}; \quad \lambda = L / r, \quad x \in [0, 1]; \quad t \geq 0 \quad (4)$$

L - długość pręta, t - czas, E - współczynnik sprężystości podłużnej, J - moment bezwładności przekroju słupa, r - promień bezwładności przekroju poprzecznego pręta, ρ - gęstość materiału, F - pole przekroju, λ - smukłość, s - szybkość zbliżania się końców pręta.

Ostatecznie otrzymamy równanie ruchu drgającego pręta sformułowane przez N.J.Hoffa

$$\ddot{f}_m + m^2 \Omega \left[m^2 - \tau + \frac{m}{4} (f_m^2 - f_0^2) \right] f_m = m^2 \Omega f_0 \quad (5)$$

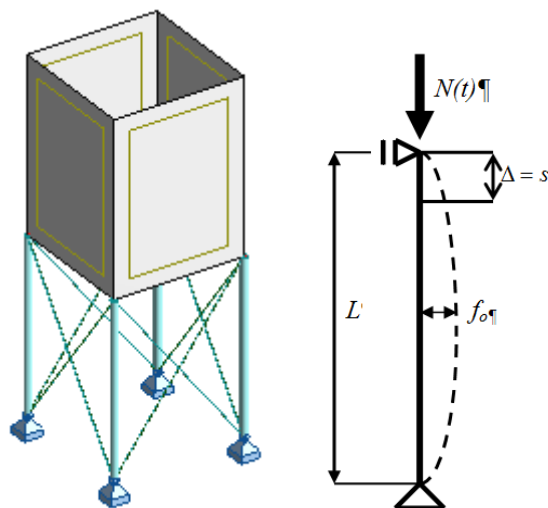
$$\text{gdzie: } \Omega = \left(\frac{c}{s} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\lambda^2}; \quad \tau = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 L; \quad \ddot{f}_m = \frac{d^2 f_m}{d\tau^2};$$

$$c = \sqrt{E / \rho} \quad (6)$$

Równanie (5) opisuje zagadnienie stateczności dynamicznej pręta przy wymuszeniu w postaci przemieszczeń z jednostajnym zbliżaniem się końców pręta. Przeprowadzenie rozwiązania tego nieliniowego równania otrzymano przy zastosowaniu numerycznego

całkowania metodą Rungego-Kutty, wykonując autorski program komputerowy.

Jako przykład obliczeniowy wybrano pojedynczy słup ze złożonego układu konstrukcyjnego przedstawionego na rys.1.



Rys.1. a) słupowy układ konstrukcyjny, b) schemat obliczeniowy słupa

Dane: profil rurowy o średnicy $D=16,83$ cm, grubość ścianki $t=0,8$ cm, pole przekroju poprzecznego $F=40,3$ cm², moment bezwładności $J=1297$ cm⁴. Wygięcie wstępne wynosi $f_0=0,4$ cm.

Przyczyną wymuszenia przemieszczeniowego $\Delta = st$ zbliżania się końców słupa może być wybuch w zamkniętym zbiorniku, szybkie napełnienie cieczą zbiornika lub udarowe wbijanie słupa w grunt.

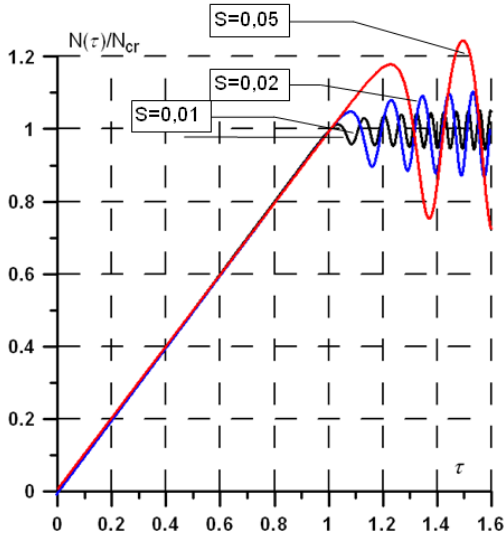
W pierwszej kolejności wykonano analizę wpływu szybkości s zbliżania się końców słupa, wyznaczając przebiegi drgań giętnych (rys.2). Istotnym jest wystąpienie pierwszego maksimum, utożsamianego z tzw. „dynamiczną siłą krytyczną”. Analityczne wyznaczenie tej siły można uzyskać z zależności

$$N(t) = EF \left[st - \left(\frac{m \cdot \pi}{2\lambda} \right)^2 (f_m(t)^2 - f_0^2) \right] \quad (7)$$

przy znanej odpowiedzi dynamicznej słupa $f_m(t)$.

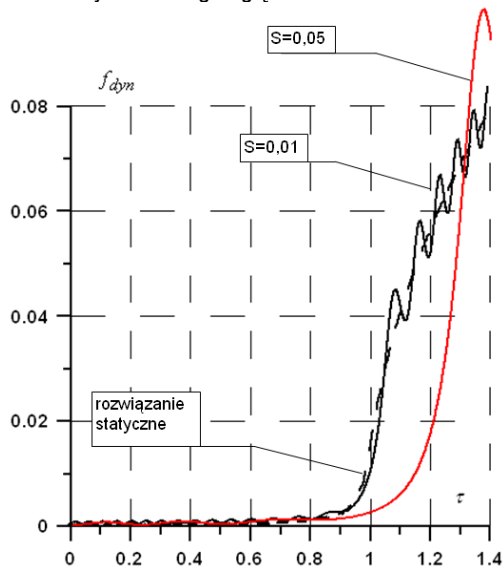
Analizując przebiegi narastania siły normalnej w funkcji czasu względnego τ (rys.2) widocznym jest zwiększenie wartości tej siły wraz ze wzrostem szybkości deformacji wzdłużnej. Ruch drgający

słupa występuje po przekroczeniu przez siłę normalną wartości statycznej eulerowskiej siły krytycznej N_{cr} .



Rys. 2. Przebieg siły normalnej

Następnie przeprowadzono analizę przebiegu drgań giętych słupa (rys. 3) w funkcji szybkości zbliżania się końców s . Można zauważyć, że dla relatywnie małych wartości szybkości s drgania gięte oscylują wokół krzywej równowagi statycznej. Wzrost wartości szybkości s powoduje opóźnienie w wystąpieniu ugięcia i zwiększenie wartości dynamicznego ugięcia.



Rys. 3. Przebieg drgań giętych słupa w funkcji szybkości s zbliżania się końców

2. STATECZNOŚĆ DYNAMICZNA SŁUPA PRZY WYMUSZENIU OKRESOWYM

Stateczność dynamiczna słupa przy wymuszeniu okresowym na przykład funkcją cosinus, sprowadza się do analizy drgań swobodnych z obciążeniem wstępnym i opisane jest układem równań (Mathieu) ruchu postaci

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + (K - \alpha\Lambda - \beta\Pi \cos \theta t)q = 0 \quad (8)$$

w przypadku gdy wektor obciążenia układu o postaci

$$P(t) = \alpha P^s + \beta P^z \Phi(t) \quad (9)$$

gdzie: αP^s - część stała obciążenia, βP^z - amplituda części zmiennej obciążenia. Parametry α i β są mnożnikami poszczególnych części obciążenia całkowitego $P(t)$.

Do rozwiązania układu równań zastosowano metodę bilansu harmonicznego, z wykorzystaniem szeregów Fouriera. W pracy [1] wykazano, że układ równań (8) ma rozwiązania okresowe o okresach T i $2T$, a zatem wyznaczone dla tych rozwiązań częstości θ będą stanowiły granicę obszarów niestatecznych (rezonansowych) i statecznych (nieresonansowych).

Założymy rozwiązanie układu równań (8) w postaci nieparzystego szeregu Fouriera

$$q = \sum_{k=1,3,5,\dots}^{\infty} (a_k \sin \frac{1}{2} k \theta t + b_k \cos \frac{1}{2} k \theta t) \quad (10)$$

gdzie: a_k i b_k - wektory niezależne od czasu, o wymiarze globalnych stopni swobody n układu.

Okres funkcji (10) wynosi $4\pi/\theta$, a więc z tej postaci szeregu wyznaczmy częstości rozwiązania układu (8), na granicy okresu $2T$. Podstawiając (10) do (8) i grupując wyrazy przy tych samych funkcjach trygonometrycznych, otrzymujemy następujące układy równań

$$\left[\begin{array}{l} (K - \alpha\Lambda + \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M)a_1 - \frac{1}{2}\theta Cb_1 - \frac{1}{2}\beta\Pi a_3 = 0 \\ (K - \alpha\Lambda - \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M)b_1 - \frac{1}{2}\theta Ca_1 - \frac{1}{2}\beta\Pi b_3 = 0 \\ (K - \alpha\Lambda - \frac{1}{4}k^2\theta^2 M)a_k - \frac{1}{2}k\theta Cb_k - \frac{1}{2}\beta\Pi(a_{k-2} + a_{k+2}) = 0 \\ (K - \alpha\Lambda - \frac{1}{4}k^2\theta^2 M)a_k + \frac{1}{2}k\theta Cb_k - \frac{1}{2}\beta\Pi(b_{k-2} + b_{k+2}) = 0 \end{array} \right] \quad \text{dla } k = 3, 5, 7, \dots \quad (11)$$

lub w postaci macierzowej

$$\left[\begin{array}{cccc|c} K - \alpha\Lambda - \frac{9}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & 0 & -\frac{3}{2}\theta C & a_3 \\ -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda + \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\theta C & 0 & a_1 \\ 0 & \frac{1}{2}\theta C & K - \alpha\Lambda - \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & b_1 \\ -\frac{3}{2}\theta C & 0 & -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda - \frac{9}{4}\theta^2 M & b_3 \end{array} \right] = 0 \quad (12)$$

o nieskończonym wymiarze.

Warunkiem niezerowych rozwiązań układu (12) jest zerowanie się wyznacznika

$$\left[\begin{array}{cccc|c} K - \alpha\Lambda - \frac{9}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & 0 & -\frac{3}{2}\theta C & \\ -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda + \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\theta C & 0 & \\ 0 & \frac{1}{2}\theta C & K - \alpha\Lambda - \frac{1}{2}\beta\Pi - \frac{1}{4}\theta^2 M & -\frac{1}{2}\beta\Pi & \\ -\frac{3}{2}\theta C & 0 & -\frac{1}{2}\beta\Pi & K - \alpha\Lambda - \frac{9}{4}\theta^2 M & \end{array} \right] = 0 \quad (13)$$

z rozwiązania którego wyznaczany jest główny (podstawowy) obszar rezonansowych częstości wymuszenia θ .

Wyznacznik (13) należy do grupy wyznaczników normalnych, dla których istnieje matematyczny dowód ich bezwzględnej zbieżności [1].

Analiza stateczności dynamicznej konstrukcji polega na wyznaczeniu granic obszarów rezonansowych $\theta = f(\alpha, \beta)$, częstości wymuszenia w dziedzinie mnożników obciążenia.

Przy pominięciu tłumienia początek obszarów rezonansowych rozpoczyna się (rys.4) według zależności

$$\theta_{\alpha j} \cong \frac{2\omega_{\alpha j}}{p} \quad \begin{matrix} (j = 1,2,3,\dots) \\ (p = 1,2,3,\dots) \end{matrix} \quad (14)$$

gdzie: indeks α - jest wskaźnikiem występowania obciążenia wstępnego.

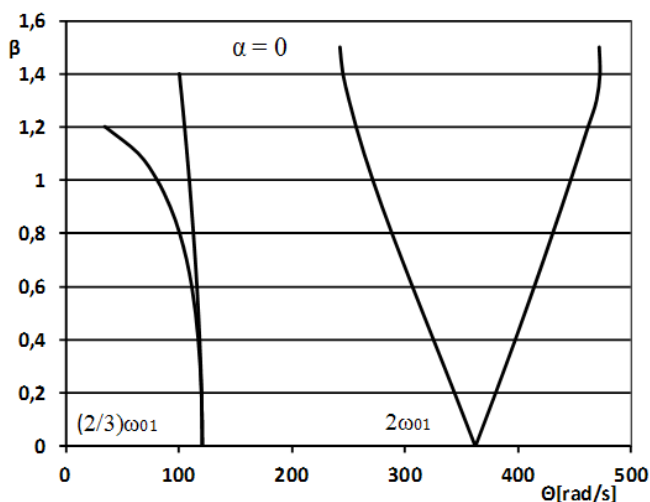
Dla częstości własnej $\omega_{\alpha j}$ mamy odpowiednio: przy $p = 1$ jest $\theta_{\alpha j} = 2\omega_{\alpha j}$ i jest to rezonans główny (rozpoczyna się od podwójnej częstości własnej), dla $p = 2$ jest $\theta_{\alpha j} = \omega_{\alpha j}$ - rezonans poboczny,

dla $p = 3$ jest $\theta_{\alpha j} = \frac{2}{3}\omega_{\alpha j}$ i jest to również rezonans poboczny,

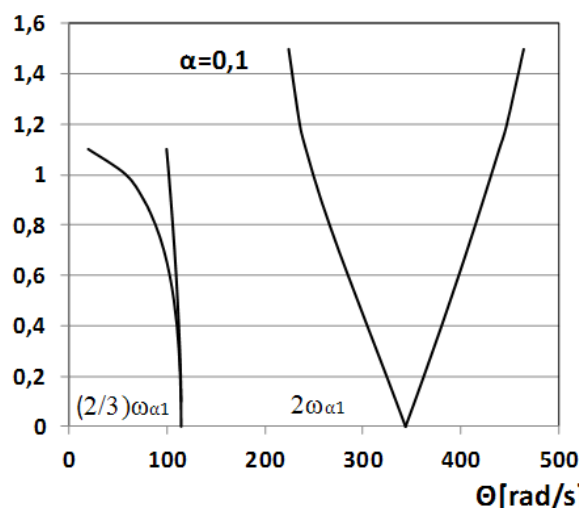
itd.

Wszystkie obliczenia wykonano autorskimi programami komputerowymi. Na rys.4 przedstawiono główny i poboczny obszar rezonansowy rozpoczynający się od podwójnej pierwszej częstości drgań własnych $\theta_{\alpha j} = 2\omega_{\alpha j}$, dla zerowej wartości wstępnego stałego obciążenia $\alpha = 0$. Natomiast, na rys.5 znajdują się obszary rezonansowe dla niezerowych wartości obciążenia wstępnego stałego $\alpha = N / N_{cr} = \{0,1; 0,25; 0,5; 0,75\}$. Widocznym jest, że początki obszarów rezonansowych przesuwają się w kierunku mniejszych częstości, przy wzroście wartości α .

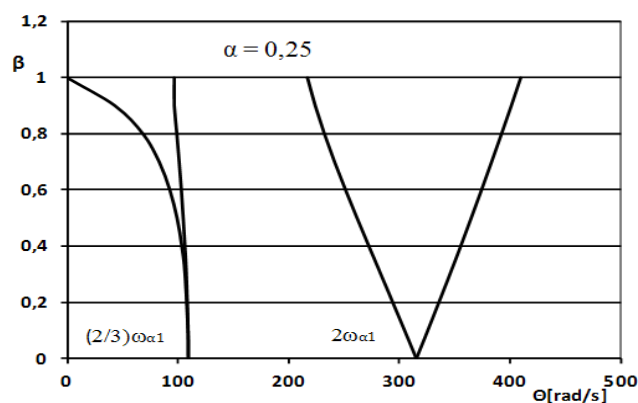
Porównanie zakresów wartości częstości rezonansowych (rys.4,5,6,7,8) przy tej samej wartości głębokości modulacji $\beta = N / N_{cr} = const$ wykazuje, że słup wstępnie obciążony ścisaniem posiada większy zakres wartości częstości rezonansowych θ .



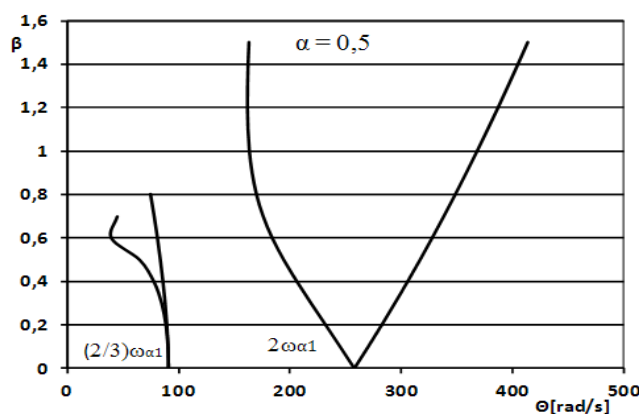
Rys. 4. Główny i poboczny obszar rezonansowy związany z częstością ω_{01}



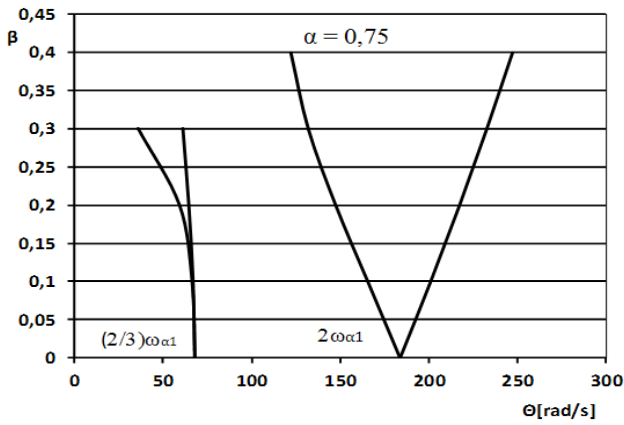
Rys. 5. Główny i poboczny obszar rezonansowy związany z częstością $\omega_{\alpha 1}$ dla $\alpha = N / N_{cr} = 0,1$



Rys. 6. Główny i poboczny obszar rezonansowy związany z częstością $\omega_{\alpha 1}$ dla $\alpha = N / N_{cr} = 0,25$

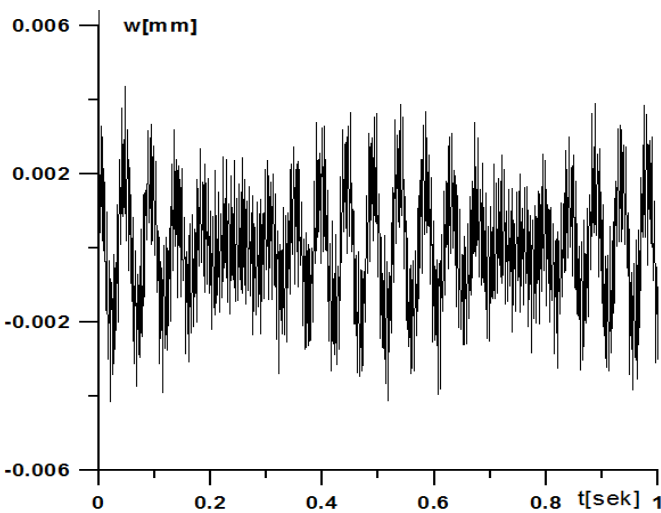


Rys. 7. Główny i poboczny obszar rezonansowy związany z częstością $\omega_{\alpha 1}$ dla $\alpha = N / N_{cr} = 0,5$



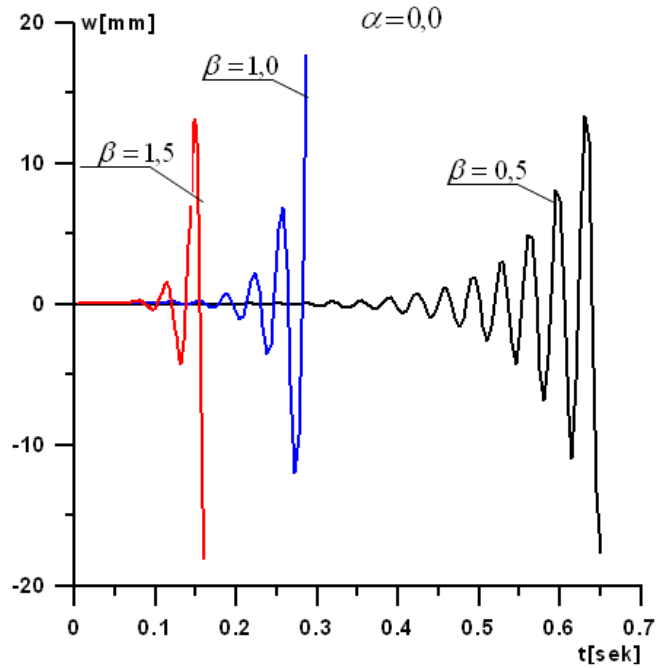
Rys. 8. Główny i poboczny obszar rezonansowy związany z częstotliwością $\omega_{\alpha 1}$ dla $\alpha = N / N_{cr} = 0,75$

W celu weryfikacji otrzymanych częstości $\theta_{\alpha j}$ z obliczeń wyznaczników, wykonano rozwiązania równań ruchu drgającego (8) metodą Newmarka całkowania bezpośredniego. Jako przykłady zamieszczono przebiegi drgań giętych słupa rozpoczynając od częstości wymuszenia $\theta_{\alpha j}$ znajdującej się na granicy obszaru rezonansowego i nierezonansowego, są to częstości rozwiązania okresowego (granicznego), a zatem rozwiązania statecznego, wówczas przebieg drgań jest typu dudnienie (rys. 9).

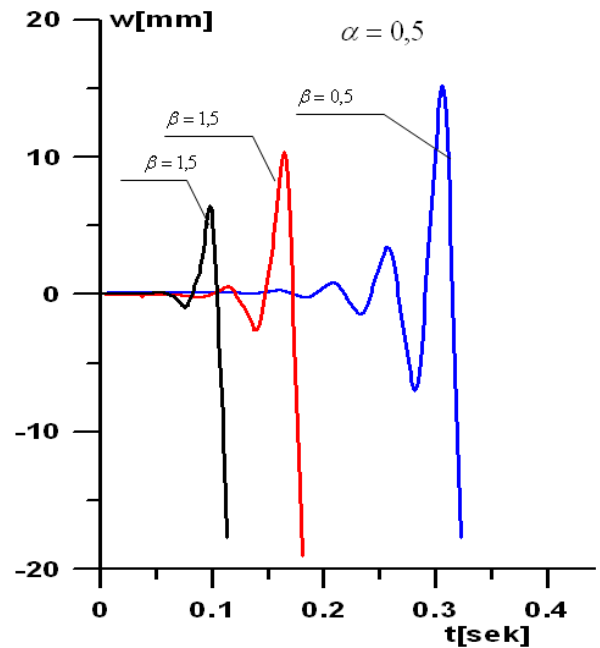


Rys. 9. Przebieg drgań typu dudnienie

Na rys.10 i 11 przedstawiono przebiegi drgań rezonansowych dla $\alpha = 0$ i $\alpha = 0,5$ dla różnych wartości głębokości modulacji $\beta = N / N_{cr}$, widocznym jest zdecydowany wpływ wartości β (wspólnie z α - po osiągnięciu i przekroczeniu wartości siły krytycznej Eulera) na wzrost amplitudy drgań giętych w.

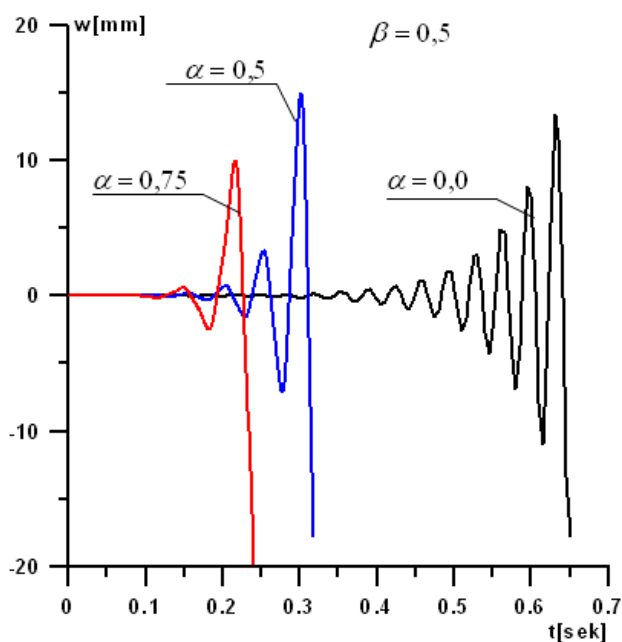


Rys. 10. Przebieg drgań rezonansowych dla $\alpha = N / N_{cr} = 0,0$ i różnych wartości głębokości modulacji $\beta = N / N_{cr}$



Rys. 11. Przebieg drgań rezonansowych dla $\alpha = N / N_{cr} = 0,5$ i różnych wartości głębokości modulacji $\beta = N / N_{cr}$

Analogiczny wpływ na szybsze wejście w drgania rezonansowe słupa ma wartość obciążenia stałego ściskającego $\alpha = N / N_{cr} = \{0,0; 0,5; 0,75\}$ przy stałej wartości $\beta = 0,5$ (rys.12).



Rys. 12. Przebieg drgań rezonansowych dla $\alpha = N / N_{cr} = \{0,0; 0,5; 0,75\}$ i stałej wartości głębokości modulacji $\beta = N / N_{cr} = 0,5$

PODSUMOWANIE

Działanie wymuszenia poprzez zbliżanie się końców słupa o szybkości s powoduje wystąpienie zmiennej proporcjonalnie do czasu siły osiowej, a po przekroczeniu przez wartość dynamiczną siły normalnej wartości siły krytycznej statycznej, wywołuje w słupie drgania giętkie o zmiennej narastającej amplitudzie i zmiennej częstotliwości, są to więc drgania nieliniowe. Charakter tych drgań wynika z chwilowej wartości siły normalnej, na wartość której wpływ ma wartość wymuszenia przez przemieszczenie osiowe jak i wygięcie a to ostatnie zależy od sił bezwładności ruchu poprzecznego.

Opóźnienie w narastaniu amplitudy drgań jest wynikiem sił bezwładności i jest ono tym większe, im jest większa szybkość przemieszczenia. Proces ten uzależniony jest od wzajemnej zamiany energii sprężystej odkształcenia i energii kinetycznej ruchu.

Niestateczna równowaga słupa, przy obciążeniu siłą okresową, uzależniona jest przede wszystkim od częstotliwości wymuszenia θ . Jeśli ta częstotliwość należy do głównego obszaru rezonansowego, to drgania słupa będą miały charakter rezonansowy i nawet uwzględnienie tłumienia materiałowego w niewielkim stopniu ograniczy ich amplitudę, ale nie przeciwdziała ich wystąpieniu. Inaczej jest, jeśli częstotliwość wymuszenia θ należy do pobocznych obszarów rezonansowych, tam tłumienie materiałowe mocno ogranicza wystąpienie drgań rezonansowych. Wówczas, aby wystąpiły drgania rezonansowe potrzebna jest duża wartość głębokości modulacji β .

BIBLIOGRAFIA

1. Bolotin B.B.:Dinamiczieskaja ustojcziwost uprugich sistem, Gos.Izd.Tech.-Teor. Lit., Moskwa 1956
2. Gryboś R.:Stateczność konstrukcji pod obciążeniem uderzeniowym, PWN, Warszawa-Poznań 1980
3. Misiak J.,Stachura S.:Analysis dynamic stability of flat lattice girders using harmonic balance method, Warszawa, Arch.Bud.Masz.,Vol.XL,1993,1
4. Misiak J., Stachura S. : Wybrane zagadnienia stateczności statycznej i dynamicznej konstrukcji prętowych i powłokowych,

DYNAMIC STABILITY OF THE COLUMN UNDER GEOMETRICAL IMPACT AND PERIODICAL LOAD

Abstract

Changes of path of the dynamic equilibrium for column under loading variable in time term have been presented. The analysis has been carried out considering nonlinear equations of the slender column equilibrium when the both inertia factor and geometrical imperfections are taken into account. Problem has been solved numerically by Runge-Kutty. The main aim of the paper is to shed light on the problem how the deflection and critical load depend on the velocity of the acting load.

Autor:

Dr inż. Sławomir Stachura

Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu