

KONTAKT STYCZNY Z UWZGLĘDNIENIEM CZĘŚCIOWYCH POŚLIZGÓW DLA WALCÓW PARABOLICZNYCH

Streszczenie

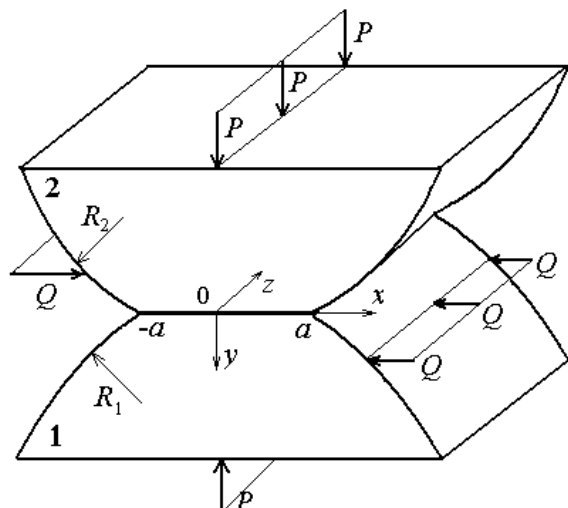
W artykule omówiono kontakt styczny dla walców parabolicznych. Przedstawiono rozwiązanie kontaktu stycznego z uwzględnieniem częściowych poślizgów dla znanego rozkładu naprężeń normalnych i znanej wielkości strefy styku. Prezentowane podejście jest odmienne, niż w rozwiązaniu klasycznym, w którym stosuje się teorię Hertza. Problem częściowych poślizgów sprowadza się do równań całkowych rozwiązywanych numerycznie. Przedstawione wyniki są porównywalne z klasycznym rozwiązaniem dla styku gładkich walców parabolicznych.

WSTĘP

Zagadnienie kontaktu ciał jest podstawowym problemem inżynierijnym. Znajomość zagadnień kontaktowych jest wykorzystywana do wielu technicznych zastosowań takich jak: budowa maszyn, budowa dróg i mostów, transport kołowy i szynowy oraz do innych współczesnych dziedzin techniki.

Jako pierwszy badanie problemu osiowoosymetrycznego styku ciał wykonał Hertz [3] przyjmując model elastycznego styku dla idealnie gładkich kul i bez sił tarcia. Później Spence [8] i Mossakovskij uwzględnili siły tarcia i wykazali, że dla skończonych współczynników tarcia w obszarze styku występuje strefa przyczepności (stick) i strefa poślizgu (slip). Potem zagadnienia kontaktu stycznego ciał o kształcie parabolicznym przy jednoczesnym istnieniu stref poślizgów i przyczepności jako pierwszy rozwiązał Cattaneo [2] oraz niezależnie od niego Mindlin [5], które nazwano zagadnieniem Cattaneo-Mindlina. Zgodnie z ich rozważaniami strefa styku składa się ze środkowego obszaru przyczepności i dwóch symetrycznych krańcowych obszarów poślizgów, które zostały wyznaczone.

W niniejszym artykule rozważamy kontakt dwóch nieskończenie długich walców powierzchniami bocznymi pod działaniem sił pionowych P , w wyniku których powstaje strefa styku o szerokości $2a$ oraz naciski normalne $p(x)$, wyznaczone w pracy [1]. Dodatkowo zakładamy istnienie sił stycznych Q jak na rysunku 1, przy zachowaniu płaskiego stanu odkształcenia i nie zmienionej strefy styku $2a$.



Rys. 1. Kontakt styczny dwóch walców parabolicznych

Zakładamy, iż powierzchnie boczne walców w strefie styku można aproksymować powierzchniami parabolicznymi

$$f_1(x) = \frac{x^2}{2R_1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2}{2R_2}, \quad x \in (-a, a) \quad (1)$$

Przyjmujemy również warunek, że wielkość strefy styku jest znacznie mniejsza od promieni krzywizny walców

$$a \ll \min(R_1, R_2) \quad (2)$$

1. KONTAKT STYCZNY WALCÓW GŁADKICH

Rozważamy naciski styczne $q(x)$ powstałe w strefie styku, które zgodnie z prawami Hooke'a dla tensora naprężeń σ obliczamy z wzoru [6]

$$q(x) = \sigma_{xy}^{(1)}(x, 0) = \sigma_{xy}^{(2)}(x, 0), \quad |x| \leq a \quad (3)$$

Ponadto zakładamy, że siła styczna Q jest mniejsza od pewnej wartości granicznej określonej kinematycznym współczynnikiem tarcia f , tzn. $Q < fP$, aby walce nie poruszały się względem siebie.

Dla rozwiązania zagadnienia normalnego początkowo zakładamy, że w strefie styku powierzchnie walców kontaktują się bez poślizgów i spełnione są warunki przyczepności

$$u_x^{(1)}(x, 0) - u_x^{(2)}(x, 0) = \delta_x, \quad |x| \leq a \quad (4)$$

$$|q(x)| < fp(x), \quad |x| \leq a \quad (5)$$

gdzie:

$\delta_x = const$ jest sztywne przemieszczenie poziome ciał oraz zakładamy, że spełniony jest warunek równowagi fizycznej [9]

$$\int_{-a}^a q(x) dx = Q \quad (6)$$

Rozwiązanie tego zagadnienia całkowicie sprowadza się do rozwiązania zagadnienia kontaktu sztywnego płaskiego stempla ze sprężystą półprzestrzenią, rozwiązanego w pracy [1], dzięki któremu rozwiązanie kontaktu stycznego walców gładkich możemy przedstawić w postaci

$$q(x) = \frac{Q}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad |x| \leq a \quad (7)$$

Powyższe rozwiązanie, przy założeniu, że ciała są doskonale przyczepione w całym obszarze styku, implikuje, że naprężenia

styczne są nieograniczone w punktach krańcowych tego obszaru. Zwróćmy uwagę, że takie zachowanie nie jest zależne od kształtu stykających się ciał.

Analogicznie do modelu Cattaneo-Mindlina warunki kontaktu stycznego są różne w strefach przyczepności i poślizgów i uwzględniając punkt c rozdzielający obie strefy mają one postać w strefie przyczepności

$$u_x^{(1)}(x,0) - u_x^{(2)}(x,0) = \delta_x, \quad |x| \leq c \quad (8)$$

$$|q(x)| < fp(x), \quad |x| \leq c \quad (9)$$

w strefie poślizgów

$$\text{sgn}[q(x)] = -\text{sgn}[s_x(x)], \quad c < |x| \leq a \quad (10)$$

$$|q(x)| = f|p(x)|, \quad c < |x| \leq a \quad (11)$$

gdzie:

$s_x = u_x^{(1)}(x,0) - u_x^{(2)}(x,0) - \delta_x$ są względnymi przemieszczeniami stycznymi powierzchni walców.

Warunek brzegowy (8) prowadzi do następującego równania całkowego [4]

$$\frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{q(s)}{x-s} ds = 0, \quad |x| \leq c \quad (12)$$

gdzie:

$$E^* = \frac{E_1 E_2}{(1-\nu_2^2)E_1 + (1-\nu_1^2)E_2} \text{ zastępczy moduł Younga.}$$

Równanie (12) jest dane tylko na części dziedziny poszukiwanej funkcji, więc nie da się go rozwiązać bezpośrednio. Dla tego przedstawimy funkcję $q(s)$ w postaci

$$q(x) = fp(x) + \begin{cases} q_0(x), & |x| \leq c \\ 0, & c < |x| \leq a \end{cases} \quad (13)$$

gdzie:

$q_0(x)$ jest nieznanym naciskiem korygującym danym tylko w strefie przyczepności.

Funkcja (13) spełnia warunki brzegowe (9) i (11) dla dodatniego $q_0(x)$. Po podstawieniu wzoru (13) do równania całkowego (12) uzyskamy równanie

$$\frac{2}{\pi E^*} \int_{-c}^c \frac{q_0(s) ds}{x-s} + \frac{2f}{\pi E^*} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{x-s} = 0, \quad |x| \leq c \quad (14)$$

Uwzględniamy warunek równowagi fizycznej (6), który dla funkcji (13) przyjmuje postać

$$\int_{-c}^c q_0(x) dx = Q - fP \quad (15)$$

oraz dodatkowo szukana funkcja spełnia warunki fizyczne

$$q_0(-c) = q_0(c) = 0 \quad (16)$$

Równanie (14) jest równaniem Cauchy'ego, którego rozwiązanie można podać w postaci [7]

$$q_0(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{c^2 - x^2}} \left\{ \frac{f\pi E^*}{2R} \left(x^2 - \frac{c^2}{2} \right) + Q - fP \right\}, \quad (17)$$

$$|x| \leq c$$

które po uwzględnieniu warunku (16) jest następujące

$$c^2 = \frac{4R}{\pi E^*} \frac{fP - Q}{f} = c^2 = a^2 \left(1 - \frac{Q}{fP} \right) \quad (18)$$

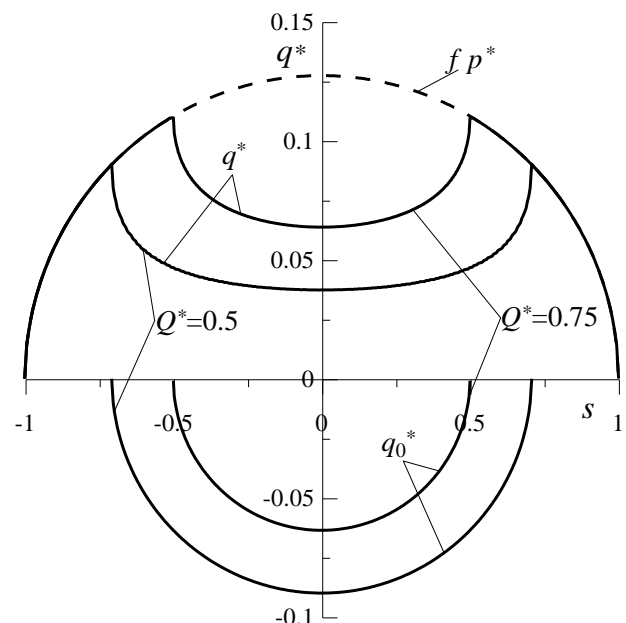
gdzie:

$$a^2 = \frac{4PR^*}{\pi E^*} \text{ znany wzór Hertza na półszerokość strefy sty-}$$

$$\text{ku dla oznaczenia } R^* = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Uwzględniając naciski korygujące (17) i naciski normalne obliczone w pracy [1] otrzymujemy całkowite naprężenia styczne pod stemplem parabolicznym

$$q(x) = \frac{2fP}{\pi a^2} \left[\sqrt{a^2 - x^2} + \begin{cases} \sqrt{c^2 - x^2}, & |x| \leq c \\ 0, & c < |x| \leq a \end{cases} \right] \quad (19)$$



Rys. 2. Rozkład nacisków stycznych dla stempla parabolicznego w zmiennych bezwymiarowych

Na rysunku 2 przedstawiono naprężenia styczne (19) pod stemplem parabolicznym uwzględniając zmienne bezwymiarowe

$$t = \frac{x}{a}, \quad q^*(t) = \frac{a}{P} q(x), \quad c^* = \frac{c}{a}, \quad Q^* = \frac{Q}{fP} \quad (20)$$

dla dwóch wartości bezwymiarowej siły stycznej $Q^*=0,5$ i $Q^*=0,75$.

Zgodnie z (18) i (20) otrzymujemy bezwymiarową strefę przyczepności c^* wyrażoną wzorem

$$c^* = \sqrt{1 - Q^*} \quad (21)$$

która przy zwiększaniu siły stycznej od zera do fP ($Q^*=1$) zmniejsza się od całej szerokości obszaru styku ($c^*=a$, $c^*=1$) do zera, kiedy to ciała zaczynają ślizgać się względem siebie.

2. KONTAKT STYCZNY WALCÓW CHROPOWATYCH

Tak jak powyżej rozważamy kontakt styczny dwóch walców o geometrii parabolicznej zakładając dodatkowo, że ich stykające się

powierzchnie są chropowate. Zgodnie z modelem chropowatości Sztajermana [10] całkowite przemieszczenia normalne pod stemplem są przedstawiane wzorem

$$u_y(x) = u_y^{(a)}(x) + u_y^{(e)}(x,0), \quad x \in (-a, a) \quad (22)$$

gdzie:

$u_y^{(a)}(x)$ - lokalne przemieszczenia spowodowane zgniotem chropowatości

$u_y^{(e)}(x,0)$ - przemieszczeniami na skutek sprężystych odkształceń całego ciała

Zakładamy, że dodatkowe przemieszczenia są proporcjonalne do naprężeń normalnych

$$u_y^{(a)}(x) = \alpha p(x), \quad x \in (-a, a) \quad (23)$$

w których stały współczynnik proporcjonalności α jest parametrem chropowatości.

Rozważmy stempel o podstawie parabolicznej o promieniu krzywizny R , dla którego spełnienie warunków kontaktowych zagadnienia

$$u_y(x,0) = \delta_y - \frac{x^2}{2R}, \quad x \in (-a, a) \quad (24)$$

$$\sigma_{xy}(x,0) = 0, \quad x \in (-a, a) \quad (25)$$

oraz założeń (22) i (23) prowadzi do równania całkowego względem funkcji nacisków kontaktowych

$$\begin{aligned} \alpha p(x) - \frac{2}{\pi E^*} \int_{-a}^a p(s) \ln|s-x| ds &= \\ = \delta_y - \frac{x^2}{2R}, \quad x \in (-a, a) \end{aligned} \quad (26)$$

Jest to równanie typu Fredholma drugiego rodzaju z jądrem logarytmicznym, które rozwiązywane jest numerycznie. Wprowadzając nowe zmienne, funkcje i parametry wzorami

$$r = \frac{x}{a_H}, \quad \eta = \frac{s}{a_H}, \quad p^*(r) = \frac{a_H p(x)}{P}, \quad (27)$$

$$a^* = \frac{a}{a_H}, \quad \alpha^* = \frac{\alpha E^*}{a_H}, \quad \delta_y^* = \frac{\delta_y E^*}{P}$$

równanie (26) w nowych zmiennych przyjmuje postać

$$\alpha^* p^*(r) - \frac{2}{\pi} \int_{-a^*}^{a^*} p^*(\eta) \ln|\eta-r| d\eta = \delta_y^* - \frac{2}{\pi} \frac{P_H}{P} r^2, \quad (28)$$

$$r \in (-a^*, a^*)$$

gdzie:

a_H i P_H - półszerokość strefy styku i siła dociskająca związane wzorem Hertza dla ciał gładkich

$$a_H^2 = \frac{4P_H R^*}{\pi E^*} \text{ znany wzór Hertza na półszerokość strefy}$$

styku w zmiennych bezwymiarowych

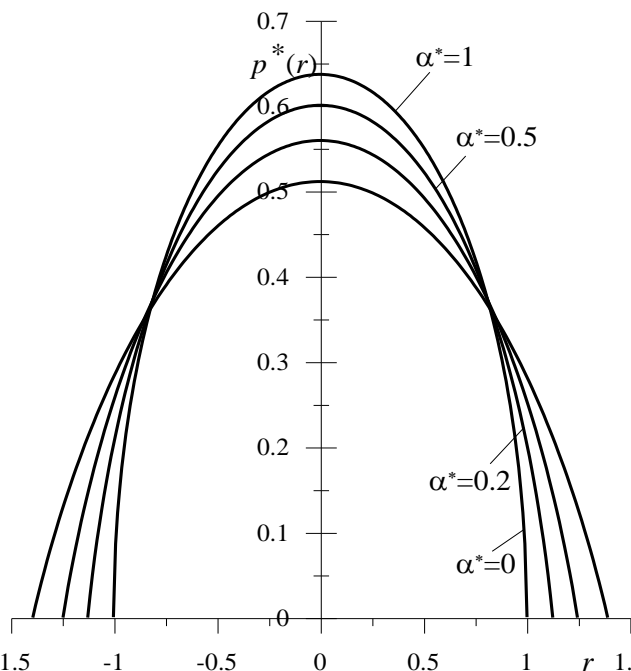
Do obliczenia równania (26) wykorzystujemy warunki fizyczne w zmiennych bezwymiarowych

$$p(-a^*) = p(a^*) = 0 \quad (29)$$

Rozwiązanie równania (26) w zależności od parametru chropowatości α^* pokazano na rysunku 3. Dla $\alpha^* = 0$ uzyskujemy klasyczne rozwiązanie Hertza

$$p^*(r) = \frac{2}{\pi} \sqrt{1-r^2} \quad (30)$$

Analiza uzyskanych wyników pokazuje, że uwzględnienie chropowatości prowadzi do zwiększenia szerokości strefy styku i do zmniejszenia maksymalnej wartości naprężeń kontaktowych.



Rys. 3. Rozkład naprężeń kontaktowych stempla parabolicznego w funkcji parametru chropowatości α^*

Przejdźmy teraz do rozważania zagadnienia kontaktu styczego. Na początku uważamy, że siły tarcia w strefie styku są wystarczająco duże, żeby w każdym jej punkcie były spełnione warunki przyczepności (4) i (5). Spełniając pierwszy z tych warunków uzyskamy równanie całkowite

$$\beta q_0(x) - \frac{2}{\pi E^*} \int_{-c}^c q_0(s) \ln|s-x| ds = \delta_x - \quad (31)$$

$$- f \left[\delta_y - \frac{x^2}{2R} + (\beta - \alpha) p(x) \right], \quad |x| \leq c$$

W zagadnieniu kontaktu styczego do opisu lokalnych przemieszczeń przyjmujemy, że są one wprost proporcjonalne do naprężeń stycznych

$$u_x^{(a)}(x) = \beta q(x), \quad x \in (-a, a) \quad (32)$$

w których stały współczynnik proporcjonalności β jest przyjętym parametrem chropowatości stycznej. Podobnie jak powyżej do rozwiązania równaniu (31) wykorzystujemy funkcję korygującą i warunek równowagi (15).

Wprowadzając nowe bezwymiarowe zmienne, niewiadome i parametry

$$q_0^* = \frac{a_H q(x)}{P}, \quad Q^* = \frac{Q}{f \cdot P}, \quad \beta^* = \frac{\beta E^*}{a_H}, \quad (33)$$

$$\delta_x^* = \frac{\delta_x E^*}{a_H}, \quad c^* = \frac{c}{a_H}$$

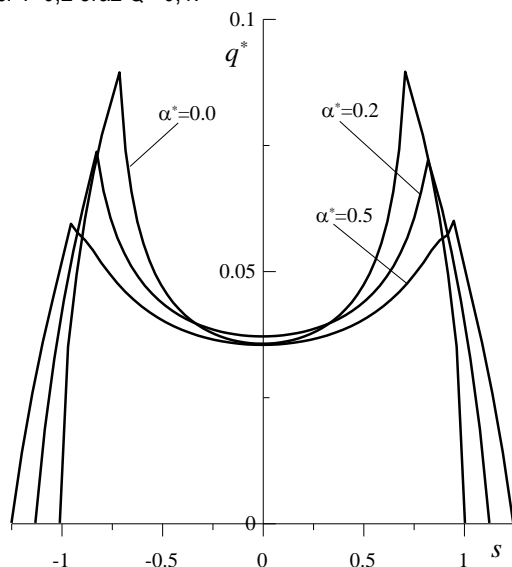
równanie całkowe (31) i warunek równowagi (15) przyjmują postać

$$\beta^* q_0^*(r) - \frac{2}{\pi} \int_{-c^*}^{c^*} q_0^*(\eta) \ln|\eta - r| d\eta = \delta_x^* - \quad (34)$$

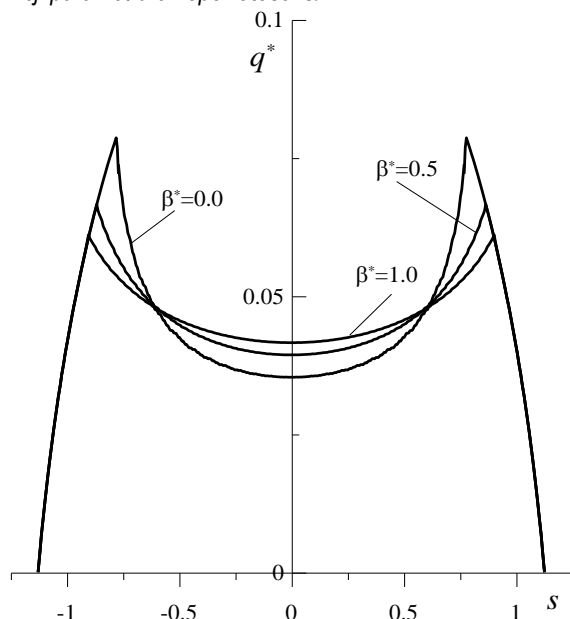
$$-f \left[\delta_y^* - \frac{2}{\pi} \frac{P_H}{P} r^2 + (\beta^* - \alpha^*) p^*(r) \right], \quad |r| \leq c^*$$

$$\int_{-c^*}^{c^*} q_0^*(r) dr = Q^* - f \quad (35)$$

Równania (34) i (35) były rozwiązane numerycznie, a nieznaną szerokość strefy przyczepności wyznaczano iteracyjnie z warunków fizycznych (16). Po rozwiązaniu tego układu równań i określeniu nacisków korygujących, ze wzoru (13) można wyznaczyć całkowite naciski styczne w obszarze kontaktu. Wpływ bezwymiarowych parametrów chropowatości α^* , β^* na rozkład tych nacisków jest odpowiednio podany na rysunkach 4 i 5. Wyniki te uzyskano dla wartości $f=0,2$ oraz $Q^*=0,1$.



Rys. 4. Rozkład nacisków stycznych q^* dla stempla parabolicznego w funkcji parametru chropowatości α^*



Rys. 5. Rozkład nacisków stycznych q^* dla stempla parabolicznego w funkcji parametru chropowatości β^*

Na rysunkach 4 i 5 jest widoczne, że zwiększenie parametrów chropowatości powoduje zmniejszenie poziomu nacisków stycznych oraz zwiększenie szerokości strefy przyczepności. Naniesione są także linie dla wartości parametrów $\alpha^* = 0$, $\beta^* = 0$, które odpowiadają klasycznemu rozwiązaniu w zagadnieniu Cattaneo-Mindlina.

WNIOSKI

Uwzględnienie chropowatości dla kontaktu stycznego ciał o geometrii parabolicznej prowadzi do nowych jakościowo wyników uwzględniających częściowe poślizgi. Pokazano warunki na rozkład nacisków stycznych, dla których częściowy poślizg jest nieunikniony. Rozwiązanie zagadnienia otrzymano inną metodą, niż w rozwiązaniu klasycznym, w którym rozpatrywane powierzchnie paraboliczne są gładkie i jest ono zgodne ze znanym rozwiązaniem Hertza i Cattaneo-Mindlina.

BIBLIOGRAFIA

1. Brzoza A., Pauk V.: *Torsion of rough elastic half-space by rigid punch*, Archive of Applied Mechanics, Volume 78, pp. 531-542, Number 7/July, Springer 2008.
2. Cattaneo C.: *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi*. Rend. Accad. Naz. Lincei, 27, pp. 342-348,434-436, 474-478, 1938.
3. Hertz H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 92, pp.156-171, 1881.
4. Johnson K.L.: *Contact mechanics*. Cambridge, Cambridge University Press 1987.
5. Mindlin R.D.: *Compliance of elastic bodies in contact*. Transactions of ASME. Journal of Applied Mechanics, 16, pp. 259-268, 1949.
6. Nowacki W.: *Teoria sprężystości*, Warszawa, PWN 1970.
7. Sneddon I.N.: *Fourier transforms*, McGraw-Hill Book Company, New York 1951.
8. Spence D.A.: *An eigenvalue problem for elastic contact with finite friction*. Proceedings of Cambridge Philosophical Society, 73, pp. 55-63, 1973.
9. Zurawski W., Góral A., Bokuvka O., Lityńska-Dobrzyńska L., Berent K.: *Microstructure and tribological properties of nanostructured and conventional plasma sprayed alumina-titania coatings*, Surface & Coatings Technology, Tom: 268, pp. 190-197, 2015.
10. Штаерман И.Я.: *Контактная задача теории упругости и вязкоупругости*, Москва, Гостехиздат 1949.

TANGENTIAL CONTACT INVOLVING PARTIAL SLIP FOR PARABOLIC CYLINDERS

Abstract

This paper discusses tangential contact between rough parabolic cylinders. It provides a general solution to the problem of tangential contact, taking into account partial slip for a known distribution of normal stress and a known contact area. The approach differs

from the classical solution, in which the Hertz theory is used. The partial slip problem was reduced to integral equations solved numerically. The results are similar to those of the classical solution for smooth parabolic cylinders.

Autorzy:

Brzoza Andrzej - Politechnika Świętokrzyska, WBiA Katedra Inż. Kom., 25-314 Kielce al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7, tel. 41/3424558, email: abrzoza@tu.kielce.pl

Makrenek Medard - Politechnika Świętokrzyska, WZiMK Katedra Fizyki, 25-314 Kielce al. 1000-lecia Państwa Polskiego 7, tel. 41/3424-383, email: fizmm@tu.kielce.pl