

## INTEGRATOR UŁAMKOWYCH RZĘDÓW Z KOREKCJĄ BŁĘDU PRÓBKOWANIA

### Streszczenie

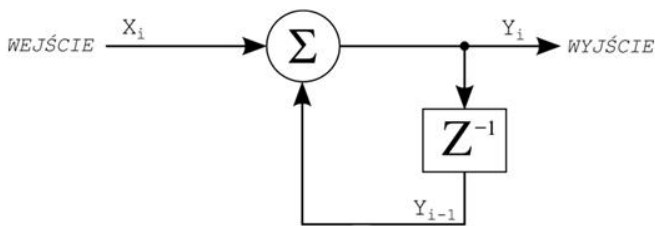
W artykule omówiono nowy sposób korekcji sygnału wyjściowego cyfrowego integratora stosowanego w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów (DSP) opartego na błędzie próbkowania oraz na pochodno-calce Grünwalda-Letnikova. W artykule zaprezentowano teorię i przykładowe wyniki symulacji działania integratora.

### WSTĘP

W układach przetwarzania sygnałów (DSP), w tym też stosowanych w sterowaniu urządzeń, systemów zabezpieczeń i innych systemach transportowych, jednym z podstawowych elementów jest integrator, którego schemat blokowy pokazuje rys.1, a jego działanie opisuje (1) i transmitancja (2) [2, 6].

$$y_i = \sum_{i=0}^n (x_i + y_{i-1}) \quad (1)$$

$$y(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} x(z) \quad (2)$$



Rys. 1. Cyfrowy integrator

### 1. POCHODNO-CALKA GRÜN WALDA-LETNIKOVA

#### 1.1. Pochodno-calca Grünwalda-Letnikova ujemnego rzędu

Pochodno-calce Grünwalda-Letnikova ujemnego rzędu opisuje (2) [1, 5, 7, 8, 9].

$${}_{t_l}D_{t_0}^{-\eta} \{f(t)\}_{0...l} = \lim_{dt \rightarrow 0} dt^\eta \sum_{m=0}^l \frac{\Gamma(\eta + m)}{m! \Gamma(\eta)} \{f_m(t_{l-m})\} \quad (3)$$

gdzie:  ${}_{t_l}D_{t_0}^\eta \{f(t)\}_{0...l}$  jest notacją Davisa pochodno-calca  $\{f(t)\}_{0...l} = \{f_0(t_l), f_1(t_{l-1}), \dots, f_l(t_0)\} \{f_m(t_{l-m})\}$   
 $dt = t_0 - t_1 = t_1 - t_2 = \dots = t_{l-1} - t_l$   
 $m = 0, 1, 2, \dots, l$   
 $l = \lfloor \frac{t_0 - t_l}{dt} \rfloor$ .

Dla rzędu  $(-\eta = -1)$  i  $l = 0$  pochodno-calca (3) odpowiada calce oznaczonej w przedziale i kroku całkowania  $dt$ .

$$\begin{aligned} {}_{t_1}D_{t_0}^{-1} \{f(t)\}_{0...1} &= \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_0(t_0)\} \\ &\equiv \int_{t_0-dt}^{t_0} \{f(t)\}_{0...1} dt \end{aligned} \quad (4)$$

Dodatkowe oznaczenie w notacji Davisa „0” oznacza, że przedział i krok całkowania mają tę samą wartość.

Dla ciągu  $\{f(t)\}_{0...l}$ , pochodno-calca jest sumą pochodno-calce o oznaczeniu „0” (5) będącą co do znaczenia całką w przedziale całkowania od  $t_l - dt$  do  $t_0$  z krokiem całkowania  $dt$ .

$$\begin{aligned} &{}_{t_l}D_{t_0}^{-1} \{f(t)\}_{0...l} = \\ &{}_{t_1}D_{t_0}^{-1} \{f(t)\}_{(l-1)...l} + {}_{t_2}D_{t_1}^{-1} \{f(t)\}_{(l-1)...l} + \dots \\ &+ {}_{t_{l-1}}D_{t_l}^{-1} \{f(t)\}_{(l-1)...l} = \\ &\lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_l(t_0)\} + \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_{l-1}(t_1)\} + \dots \\ &+ \lim_{dt \rightarrow 0} dt \{f_0(t_l)\} = \\ &\lim_{dt \rightarrow 0} dt \sum_{m=0}^l \{f_m(t_{l-m})\} \equiv \int_{t_l-dt}^{t_0} \{f(t)\}_{0...l} dt = \quad (5) \\ &\int_{t_1=t_0-dt}^{t_0} \{f_l(t_0)\} dt + \int_{t_2=t_1-dt}^{t_1} \{f_{l-1}(t_1)\} dt + \dots \\ &+ \int_{t_l-dt}^{t_l} \{f_0(t_l)\} dt \end{aligned}$$

Uogólniając (5) na ujemny niecałkowity rząd  $\eta$  otrzymuje się pochodno-calce (6) będącą co do znaczenia całką oznaczoną w przedziale od  $t_l - (dt)^\eta$  do  $t_0$  z krokiem całkowania  $(dt)^\eta$ .

$$\begin{aligned} &{}_{t_l}D_{t_0}^{-\eta} \{f(t)\}_{0...l} = {}_{t_1}D_{t_0}^{-\eta} \{f(t)\}_{(l-1)...l} \\ &+ {}_{t_2}D_{t_1}^{-\eta} \{f(t)\}_{(l-1)...l} + \dots \\ &+ {}_{t_{l-1}}D_{t_l}^{-\eta} \{f(t)\}_{(l-1)...l} = \\ &\lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \{f_l(t_0)\} + \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \{f_{l-1}(t_1)\} + \dots \\ &+ \lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \{f_0(t_l)\} = \\ &\lim_{dt \rightarrow 0} (dt)^\eta \sum_{m=0}^l \{f_m(t_{l-m})\} \equiv \int_{\tau_l-(dt)^\eta}^{t_0} \{f(t)\}_{0...l} (dt)^\eta \quad (6) \\ &= \int_{\tau_1=t_0-(dt)^\eta}^{t_0} \{f_l(t_0)\} (dt)^\eta + \\ &\int_{\tau_2=\tau_1-(dt)^\eta}^{\tau_1} \{f_{l-1}(t_1)\} (dt)^\eta \dots + \int_{\tau_l-(dt)^\eta}^{\tau_l} \{f_0(t_l)\} (dt)^\eta \end{aligned}$$

#### 1.2. Interpretacja $(dt)^\eta$

Niech  $\Delta T$  będzie błędem bezwzględnym wyznaczania  $dt$  opisanym zależnością (7) [1, 2].

$$(dt)^\eta = dt + \Delta T \quad (7)$$

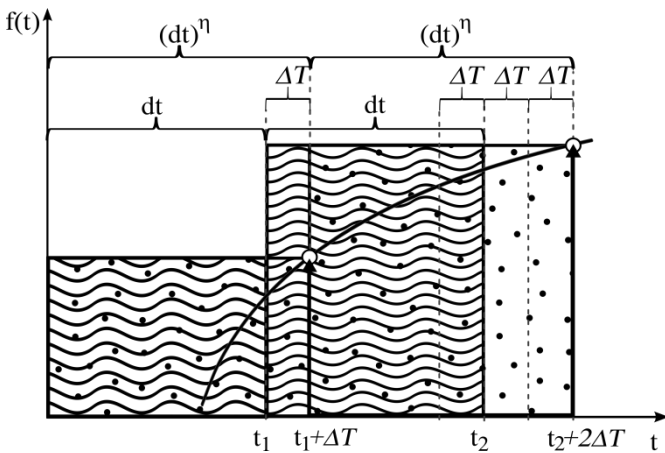
W przypadku rzeczywistych pomiarów,  $dt$  można interpretować jako czas próbkowania karty pomiarowej, wartości ciągu  $\{f(t)\}_{0...l}$  jako wielkości mierzone, a  $\Delta T$  jako błąd wyznaczania czasu próbkowania.

## 2. INTEGRATOR UŁAMKOWYCH RZĘDÓW

### 2.1. Integrator nieuwzględniający błędy próbkowania

Integrator opisany przez (1) i (2) oraz pokazany na rys.1 nie zawiera informacji o błędzie próbkowania i nie uwzględnia jej w swoim działaniu. W przypadku, gdy błąd ten jest duży lub gdy ilość próbek pomiarowych jest duża, nawet przy bardzo małej wartości błędu, to wynik całkowania takim integratorem jest zaburzony [2]. Ilustruje to rys. 2.

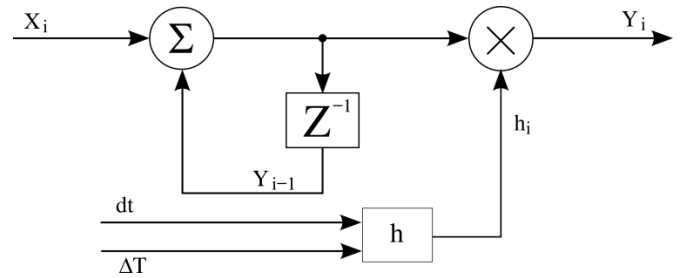
Pomiar danych używanych przez integrator ma być wykonany w chwilach czasu określanych przez czas próbkowania  $dt$ . Pole powierzchni oznaczone falami pokazuje graficzną interpretację działania integratora w przypadku, gdy błąd wyznaczania czasu próbkowania nie jest uwzględniony w działaniu integratora. Rzeczywisty pomiar danych odbywa się jednak w chwilach  $t_1 + \Delta T$  i  $t_2 + 2\Delta T$ , które uwzględniają w czasie próbkowania błąd jego wyznaczania:  $dt + \Delta T$ . Prawidłowe działanie integratora ilustruje jego graficzne przedstawienie w postaci pola powierzchni oznaczonego kropkami.



Rys. 2. Błąd próbkowania cyfrowego integratora

### 2.2. Integrator z uwzględnieniem błędu próbkowania

Na rys. 3 pokazano schemat blokowy cyfrowego integratora uwzględniającego błąd próbkowania. Jego działanie opisuje zależność (8) [3, 4].



Rys. 3. Cyfrowy integrator uwzględniający błąd próbkowania

$$y_i = h_i \sum_{i=0}^n (x_i + y_{i-1}) \quad (8)$$

gdzie  $h_i$  jest matematycznym zapisem wpływu błędu próbkowania na wynik działania integratora:

$$h_i = (dt_i)^{\log_{dt_i}(dt_i + \Delta T_i)} - dt_i + 1 \quad (9)$$

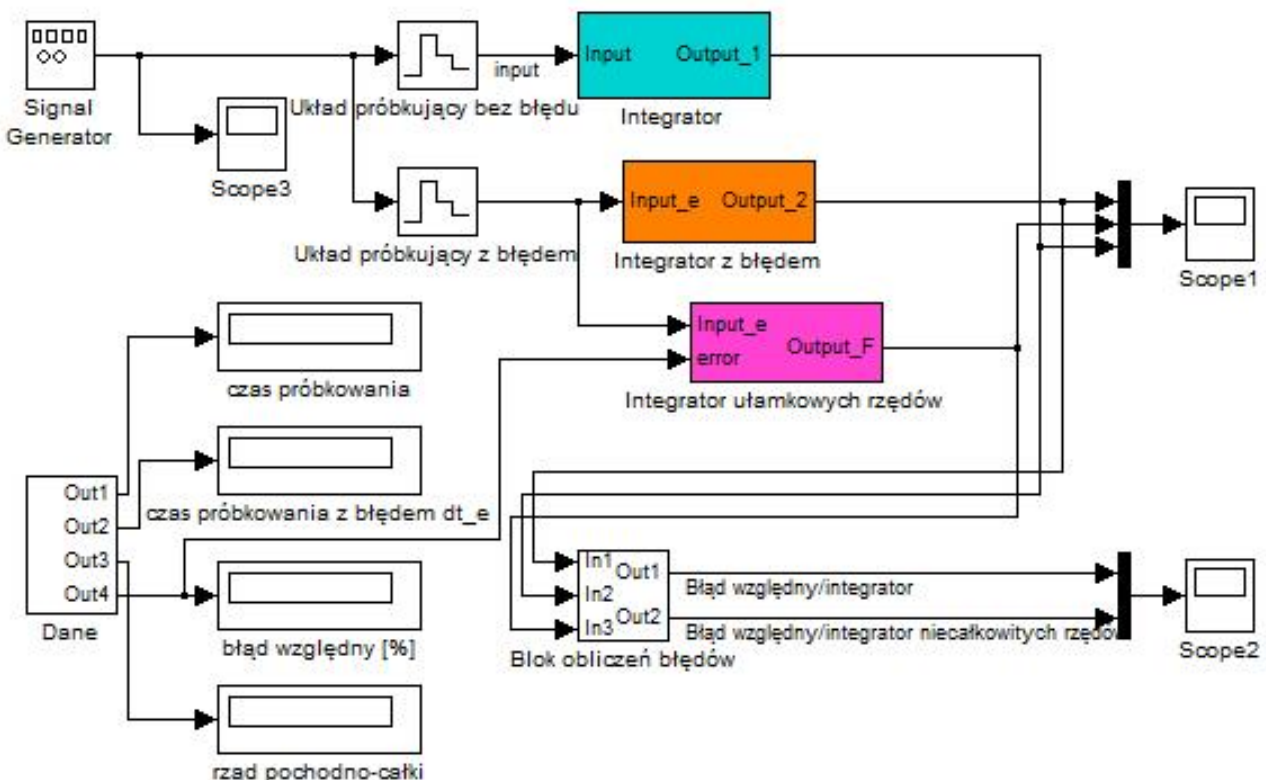
Dla uproszczenia przyjmuje się, że  $\Delta T_i$  oraz  $dt_i$  są wartościami stałymi dla każdego punktu pomiarowego:

$$h_i = h = (dt)^{\log_{dt}(dt + \Delta T)} - dt + 1 \quad (10)$$

Innym zapisem (8) w postaci transmitancji jest (11).

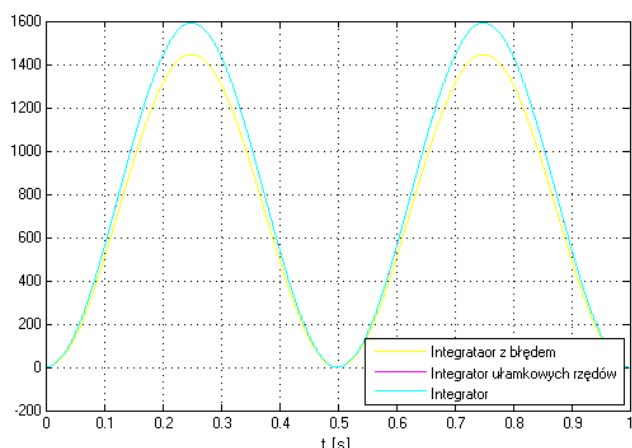
$$y(z) = \frac{h(z)}{1 - z^{-1}} x(z) \quad (11)$$

Na rys. 4 pokazano schemat blokowy układów symulujących działanie integratora opisanego (2) dla idealnego czasu próbkowania (blok „integrator”) i czasu próbkowania z wymuszonym błędem próbkowania (blok „integrator z błędem”). Blok „integrator ułamkowych rzędów” realizuje funkcję integratora uwzględniającego błąd próbkowania (11).

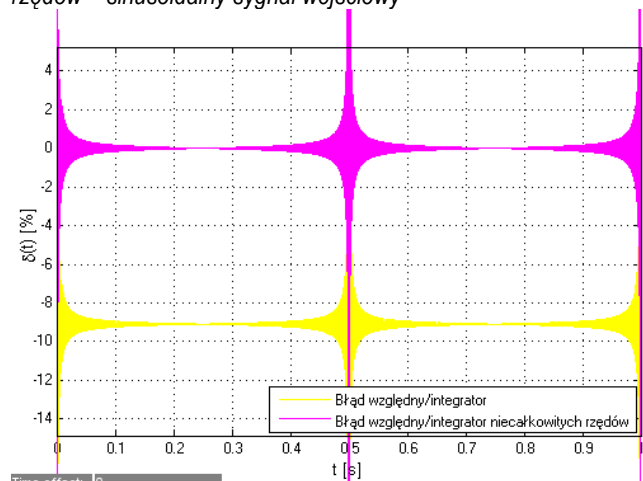


Rys. 4. Cyfrowy integrator – model w Simulinku

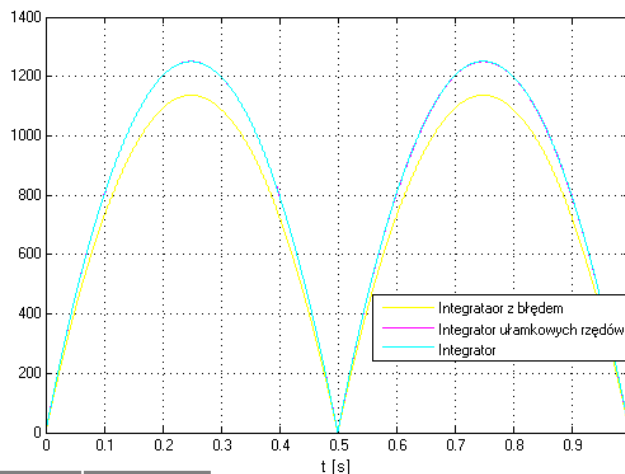
Na rys. 5 i 7 przedstawiono przykładowe wyniki symulacji dla sygnałów wejściowych odpowiednio: sinusoidalnego i piłokształtnego o częstotliwości 2 Hz. W obydwu przypadkach charakterystyki wyjściowe z integratora wykorzystującego korekcję opartą na ułamkowych rzędach są bardzo zbliżone do wyjściowej charakterystyki układu realizującego funkcję integratora bez błędów próbkowania. Na rys. 6 i 8 przedstawiono przebieg błędów względnych integratora z błędem próbkowania i integratora z korekcją. Zadano błąd próbkowania równy 10% przy czasie próbkowania 0,0001s. Oznaczało to próbkowanie obydwu układów z czasem 0,00011s. W przypadku działania układu integratora z błędem próbkowania oznaczało to dla sinusoidalnego sygnału wejściowego, medianę błędu sygnału wyjściowego równą -9,09% w stosunku do sygnału wyjściowego układu integratora bez błędu próbkowania. W przypadku układu z korekcją mediana błędu miała wartość -0,00001%. Dla piłokształtnego sygnału wejściowego mediana wynosiła -9,07% i 0,02% odpowiednio dla układu integratora z błędem próbkowania i integratora z korekcją.



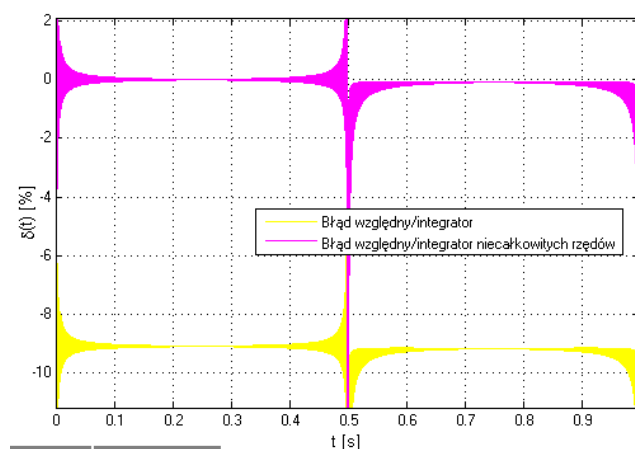
Rys. 5. Sygnał wyjściowy  $f(t)$  integratora i integratora niecałkowitych rzędów – sinusoidalny sygnał wejściowy



Rys. 6. Błąd względny  $\delta(t)$  [%] integratora i integratora niecałkowitych rzędów – sinusoidalny sygnał wejściowy



Rys. 7. Sygnał wyjściowy  $f(t)$  integratora i integratora niecałkowitych rzędów – piłokształtny sygnał wejściowy



Rys. 8. Błąd względny  $\delta(t)$  [%] integratora i integratora niecałkowitych rzędów – piłokształtny sygnał wejściowy

## PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano możliwość zastosowania integratora opartego na rachunku niecałkowitych rzędów do korekcji sygnału wyjściowego integratora na podstawie znajomości błędu próbkowania integratora. Potencjalne zastosowania prezentowanego układu zawierają się w grupie rozwiązań korekcji stosowanej w układach cyfrowego przetwarzania sygnałów (DSP), a w szczególności w układach wykorzystujących filtry o nieskończonej odpowiedzi impulsowej (IIR).

## BIBLIOGRAFIA

1. Cioć, R.: *Physical and geometrical interpretation of Grünwald-Letnikov differintegrals: measurement of path and acceleration*. Fractional Calculus & Applied Analysis, volume 19, number 1 (2016), pp. 161-172, DOI: 10.1515/fca-2016-0009, Diogenes Co., So\_a (2016)
2. Cioć R.: *Digital Fractional Integrator*, Lecture Notes in Electrical Engineering 407 (2017), Theory and Applications of Non-integer Order Systems, 8th Conference on Non-integer Calculus and Its Applications, Zakopane, Poland, pp.169-174, (Print) ISSN 1876-1100, (Electronics) ISSN 1876-1119, (Print) ISBN 978-3-319-45473-3, (Ebook) ISBN 978-3-319-45474-0, DOI 10.1007/978-3-319-45474-0

3. Cioć, R.: *Cyfrowy integrator rzeczywistego rzędu pochodno-całki*. Zgłoszenie patentowe P.411354, Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej (2015)
4. Cioć, R.: *Cyfrowy integrator z kompensacją błędu próbkowania*. Zgłoszenie patentowe P.411355, Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej (2015)
5. Das, S.: *Functional Fractional Calculus*. Springer (2011)
6. Lyons, R. G.: *Understanding Digital Signal Processing*. Prentice Hall (2010)
7. Ostalczyk, P.: *Zarys rachunku różniczkowo-całkowego ułamkowych rzędów. Teoria i zastosowanie w praktyce*. Wydawnictwo Politechniki Łódzkiej, Łódź (2008)
8. Podlubny I: *Fractional Differential Equations. An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, Academic Press, 368 pages, ISBN 0125588402, San Diego-Boston-New York-London-Tokyo-Toronto, (1999)
9. Samko S., Kilbas A. A., Marichev O.: *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, Gordon & Breach Sci. Publishers, London, UK (1993).

## DIGITAL INTEGRATOR WITH CORRECTION OF SAMPLING ERRORS

### *Abstract*

*The paper presents a new approach for output signal correction of digital integrator in the field of digital signal processing (DSP) based on an error of sample time and the Grünwald-Letnikov differ integrals. Theory and simulation results of integrator work are shown in the paper.*

Autor:

dr inż. **Radosław Cioć** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki, 26-600 Radom, ul. Malczewskiego 29, e-mail: r.cioc@uthrad.pl