

MAJKUT Leszek, OLSZEWSKI Ryszard

ZASTOSOWANIE METODY FUNKCJI RADIALNYCH DO ANALIZY AKUSTYCZNYCH DRGAŃ WŁASNYCH*

Streszczenie

W artykule opisano możliwości zastosowania Metody Funkcji Radialnych do wyznaczania akustycznych częstotliwości drgań własnych w przestrzeniach ograniczonych. Porównano metodyki popularnych narzędzi obliczeniowych takich jak Metoda Elementów Skończonych i Metoda Elementów Brzegowych wraz ze wskazaniem wad i zalet do Metody Funkcji Radialnych.

WSTĘP

Współcześnie projektowanym kabinom maszyn i pojazdów stawianych jest szereg wymagań pośród których są również i takie, które narzucają spełnienie określonych warunków komfortu pracy. Zdarza się, że na etapie projektowania pomija się odstrojenie częstotliwości drgań własnych kabiny od częstotliwości drgań wymuszonych elementów konstrukcyjnych. W sytuacjach, kiedy wartości poziomu hałasu na stanowisku pracy osiągają wartości przy których nie może być mowy o tzw. komforcie pracy, zachodzi konieczność przeprowadzenia adaptacji akustycznej wnętrza kabiny. W znakomitej większości przypadków w których nie odstrojono częstotliwości drgań własnych kabiny od częstotliwości drgań wymuszonych poniesione nakłady na adaptację są niewspółmiernie duże w stosunku do uzyskanych efektów. Może to skutkować zwiększeniem poziomu hałasu wewnątrz kabiny, a w konsekwencji prowadzić do poczucia dyskomfortu i zmęczenia operatora. Nie bez znaczenia w takich sytuacjach pozostaje również obniżenie trwałości zmęczeniowej elementów konstrukcji.

W powszechnej praktyce inżynierskiej do analizy zagadnienia własnego najczęściej wykorzystywana jest Metoda Elementów Skończonych. Metoda ta ze względu na powszechnie akceptowaną dokładność obliczeń i łatwą dostępność (implementacje znaleźć można w wielu pakietach inżynierskich oraz dostępnych darmowych programach komputerowych). Do zalet należy również brak konieczności przeprowadzenia jakichkolwiek obliczeń wstępnych. Problemem z wykorzystaniem MES do obliczeń pola akustycznego jest konieczność podziału na elementy całej analizowanej przestrzeni. Ze względu na to, że obliczenia dynamiczne z wykorzystaniem MES są obliczeniami przybliżonymi niezbędny jest bardzo gęsty podział na elementy (w praktyce przyjmuje się taki podział by na długość fali przypadało co najmniej sześć elementów [7]). Tak gęsty podział prowadzi do znacznego zwiększenia rzędu macierzy głównej analizowanego problemu i co za tym idzie do wydłużenia czasu i kosztów obliczeń. Przy analizie ekonomicznej obliczeń nie wolno zapomnieć, że takie obliczenia należy przeprowadzić wielokrotnie tzn. po każdej modyfikacji

* Praca wykonana w ramach badań statutowych nr 11. 11.130.885

strukturalnej układu. Wszystkie wymienione powyżej zalety i wady można również wykorzystać do opisu Metody Różnic Skończonych. Znacznie mniej popularną od dotychczas wymienionych metod obliczeniowych jest Metoda Elementów Brzegowych, w której równania różniczkowe zastępuje się odpowiednio skonstruowanymi równaniami całkowymi. Idea MEB jest w zasadzie taka sama jak MES, z tą różnicą, że w MEB podziałowi na elementy podlega jedynie brzeg rozpatrywanego obszaru. Prowadzi to w sposób naturalny do obniżenia wymiaru przestrzeni o jeden, tzn. brzeg obszaru trójwymiarowego jest obszarem dwuwymiarowym, a tylko on podlega podziałowi na elementy skończone. Obniżenie wymiaru skutkuje zmniejszeniem wymiaru macierzy głównej problemu, a więc czasu i kosztów obliczeń. Do wad metody zaliczyć można wymagany duży nakład pracy poświęcony na obliczenia wstępne, niezbędne w tej metodzie. Obliczenia te związane są z wyznaczeniem (obliczeniem) odpowiednich całek z funkcji z osobliwością (funkcja zmierzająca do nieskończoności dla jednej zmiennej niezależnej). Te właśnie obliczenia wstępne są główną przeszkodą w popularyzacji tej metody. Kłopotliwe przy obliczeniach numerycznych jest również to, że macierze główne analizowanego problemu są pełne w odróżnieniu od pasmowych macierzy w analizie MES.

Stosunkowo mało znaną, ale również możliwą do zastosowania jest Metoda Rozwiązań Fundamentalnych, która nie wymaga podziału na elementy całego analizowanego obszaru [1,2]. Co więcej zbędna jest również dyskretyzacja brzegu obszaru [9]. Niezbędny jest jedynie wybór odpowiedniej ilości punktów na brzegu (tzw. punktów kolokacyjnych) i taka sama lub większa ilość punktów źródłowych poza (na zewnątrz) analizowanego obszaru. Macierz główna analizowanego problemu ma wymiar: ilość punktów kolokacyjnych \times ilość punktów źródłowych. Do rozwiązywania takiego problemu wykorzystuje się metodę minimalizacji sumy kwadratu błędu lub rozkład według wartości osobliwych – rozkład SVD. Jedyną wielkością konieczną przy analizie MRF jest znajomość rozwiązania fundamentalnego [3,7], czyli funkcji Greena równania różniczkowego opisującego rozwiązywany problem. Do wad tej metody zaliczyć należy możliwość analizy jedynie prostych geometrii (konieczność znajomości funkcji Greena analizowanego problemu), nierozwiązanym dotąd problemem jest optymalna (ze względu na błąd metody) ilość i położenie zarówno punktów kolokacyjnych, jak i punktów źródłowych, im dalej od brzegu obszaru umieszczone są punkty źródłowe tym większa dokładność obliczeń, ale jednocześnie macierze główne stają się źle uwarunkowane, w takich przypadkach do rozwiązania stosuje się ciągłą lub dyskretną regularyzację.

Innym podejściem poszukiwania przybliżonego rozwiązania problemu własnego jest zastosowanie metody Kansy [5] bazującej na Radialnych Funkcjach Bazowych. Metoda ta nie wymaga stosowania jakichkolwiek siatek elementów. Znalazła ona szereg zastosowań do rozwiązania wielu różnych problemów mechaniki m.in. analiza problemów wymiany ciepła [12], analizy równań Naviera–Stokesa [4], analiza pola elektromagnetycznego [8] i wielu innych. Metody numeryczne wykorzystujące Radialne Funkcje Bazowe charakteryzuje podstawowa własność polegająca na transformacji problemów wielowymiarowych do problemów jednowymiarowych. W pracy zastosowano kolokacyjną metodę Kansy wraz wielokwadratową radialną funkcją bazową do analizy akustycznego zagadnienia własnego modelu kabiny 3D.

1. RADIALNE FUNKCJE BAZOWE

Funkcja radialna to każda funkcja jednej zmiennej, postaci:

$$\varphi_j(r) = \varphi(\|x - x_j\|) \quad (1)$$

gdzie: $\|x - x_j\|$ jest Euklidesową odległością pomiędzy punktami x i x_j . Punkt x_j jest nazwany centrum funkcji radialnej (1). Zmieniając położenie centrów otrzymuje się rodzinę funkcji, która tworzy bazę wykorzystywaną do interpolacji lub aproksymacji dowolnej funkcji.

Każdą z funkcji bazowych (1) zaliczyć można do jednej z kategorii: funkcje o zwartym nośniku, tj. funkcje które są różne od zera jedynie w sferze o promieniu r (najczęściej $r = 1$) lub funkcje o nośniku nieograniczonym ($r \rightarrow \infty$). Najczęściej wykorzystywanymi funkcjami z pierwszej kategorii są zamieszczone w tabeli 1, funkcje Wendlanda [11]. W tabeli 2 pokazano przykłady funkcji o nośniku nieograniczonym.

Tab.1. Bazowe funkcje radialne o zwartym nośniku [11]

wymiar przestrzeni	definicja funkcji	definicja funkcji	definicja funkcji
$d=1$	$\varphi(r) = (1-r)_+$	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$	$\varphi(r) = (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$
$d=2, 3$	$\varphi(r) = (1-r)_+^2$	$\varphi(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$	$\varphi(r) = (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$

gdzie:

$$\phi(r) = (1-r)_+^n = \begin{cases} (1-r)^n, & \text{dla } r \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{dla } r > 1 \end{cases}$$

Tab.2. Bazowe funkcje radialne o nośniku nieograniczonym [11]

definicja funkcji	$\varphi(r) = r$	$\varphi(r) = r^3$	$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$	$\varphi(r) = r^2 \ln(r)$	$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$	$\varphi(r) = e^{-cr^2}$
nazwa funkcji	liniowa	sześcien- na	wielokwa- Dratowa	cienkiej płyty	wielokwa – dratowa odwrotna	Gaussa

Ze względu na dużą popularność w zastosowaniach oraz dobre własności aproksymujące w pracy wykorzystano funkcję wielokwadratową, która w przypadku 3D przyjmuje postać:

$$\varphi_j(r) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2 + c^2} \quad (2)$$

Jak wspomniano wcześniej, kształt funkcji (2) zależy od parametru kształtu c . Wraz ze wzrostem jego wartości funkcja (2) staje się bardziej płaska, przez to mało wrażliwa na zmiany odległości pomiędzy punktem i centrum funkcji radialnej.

2. METODA KOLOKACYJNA KANSY

Analizowane zagadnienie początkowo brzegowe opisane jest równaniem postaci:

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3)$$

wraz z warunkami brzegowymi postaci:

$$Bu = g(x), \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

gdzie: L jest liniowym operatorem różniczkowym, B jest operatorem opisującym warunki brzegowe, Ω to analizowany obszar, Γ to brzeg tego obszaru.

Idea metody Kansy polega na aproksymacji rozwiązania problemu początkowo brzegowego (3), (4) za pomocą sumy szeregu rodziny funkcji radialnych, tj.:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(r) \quad (5)$$

Współczynniki α_j wyznaczone są w procedurze kolokacji. W tym celu należy wybrać zbiór N_0 punktów $\{x_1, x_2, \dots, x_{N_0}\}$ należących do obszaru Ω , w których żąda się by przybliżone rozwiązanie (5) spełniało równanie (3):

$$L\hat{u} = f(x_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \alpha_j L\varphi_j(r_i) = f(x_i) \quad (6)$$

Podobnie należy wybrać zbiór N_b punktów $\{x_{N_0+1}, x_{N_0+2}, \dots, x_{N_0+N_b}\}$ na brzegu Γ analizowanego obszaru. W tych punktach muszą zostać spełnione równania warunków brzegowych (4):

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B\varphi_j(r_i) = g(x_i) \quad (7)$$

Równania (6) i (7) stanowią liniowy układ równań, który zapisać można w postaci macierzowej:

$$A\alpha = f \quad (8)$$

Z układu równań (8) można wyznaczyć poszukiwane współczynniki α_j . W przypadku gdy suma liczby wybranych punktów obszaru Ω tj. N_0 i liczby punktów brzegowych N_b jest równa liczbie punktów centralnych N ($N_0+N_b=N$) układ (8) rozwiązać można stosując metodę eliminacji Gaussa, w przypadku gdy $N_0+N_b > N$ układ (8) jest nadokreślonym i należy poszukiwać rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów np. stosując rozkład SVD.

3. AKUSTYCZNE DRGANIA WŁASNE KABINY

Poszukiwanie częstości drgań własnych układu akustycznego związane jest z poszukiwaniem nietrywialnego rozwiązania równania różniczkowego postaci (równanie Helmholtza):

$$\nabla^2 p(r) + k^2 p(r) = 0 \quad r \in \Omega \subset R^d \quad (9)$$

gdzie: p – amplituda ciśnienia akustycznego, k – liczba falowa (ω/s), ω – częstość, s – prędkość rozchodzenia się dźwięku w ośrodku sprężystym, $d=1,2$ lub 3 oznacza wymiar przestrzeni. Akustyczne drgania własne ośrodka wewnątrz przestrzeni zamkniętej mogą być rozwiązywane ze ściśle określonymi warunkami brzegowymi. Stosując metodę Kansa do równania (9) można zapisać:

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \nabla \sqrt{r_j^2 + c^2} \Big|_{r=r_i} + k^2 \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{r_j^2 + c^2} = 0 \quad (10)$$

gdzie r_i oznacza współrzędne punktów kolokacji $i=1, 2, \dots, N_t$, zaś r_j oznacza współrzędne centrów funkcji radialnych $j=1, 2, \dots, N$,

Dla każdego i , otrzymuje się z równania (10) i – ty wiersz kolokacji macierzy \mathbf{A} (8), przy czym wektor kolumnowy $\mathbf{f} = 0$. Ostatnich (lub pierwszych) N_b wierszy macierzy zawierają warunki brzegowe. Warunkiem znalezienia nietrywialnego rozwiązania równania (10) jest zerowanie się wyznacznika macierzy \mathbf{A} , co stanowi podstawę wyznaczenia akustycznych częstotliwości drgań własnych wewnątrz pomieszczenia zamkniętego.

Odrębnym zagadnieniem jest kwestia doboru parametru kształtu c . Najprostszym („siłowym”) rozwiązaniem jest przeprowadzenie serii obliczeń numerycznych dla różnych wartości parametru kształtu i na podstawie uzyskanych rezultatów wybranie takiej wartości c , dla której uzyskuje się rozwiązanie problemu. Takie postępowanie jest możliwe w przypadkach, dla których znane jest rozwiązanie równania brzegowego.

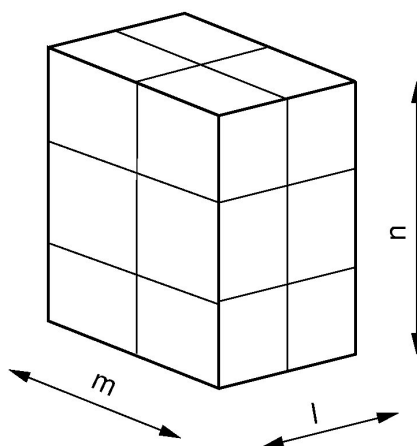
W większości dobre rezultaty daje stosowanie następującego schematu postępowania:

- ustalenie zakresu zmian parametru kształtu c ze stałym przyrostem Δc ,
- znalezienie wartości k dla której $\det(\mathbf{A})=0$,

- jeżeli nie jest znana wartość k dla różnych c – należy przyjąć wartość k np. równą 1 i zmieniać wartość c ,
- jeżeli jest wyznaczona wartość k stała dla różnych c z określonego przedziału wartości - do obliczeń należy wybrać c z tego przedziału.

3.1. Obliczenia testowe

W celu sprawdzenia poprawności procedury obliczeniowej z wykorzystaniem Metody Funkcji Radialnych wyznaczono częstotliwości drgań własnych prostopadłościennego wnętrza obszaru akustycznego o wymiarach $l=0.7$ [m], $m=1.1$ [m], $n=1.3$ [m], pokazanego na Rys.1.



Rys. 1. Model pomieszczenia prostopadłościennego

Częstotliwości drgań takiego wnętrza można wyznaczyć analitycznie na podstawie zależności:

$$k(w_x, w_y, w_z) = \pi \sqrt{\left(\frac{w_x}{l}\right)^2 + \left(\frac{w_y}{m}\right)^2 + \left(\frac{w_z}{n}\right)^2} \quad (11)$$

W tabeli 3 zestawiono wartości własne (liczba falowa k) wyznaczone w oparciu o zależność (11) oraz z Metody Funkcji Bazowych.

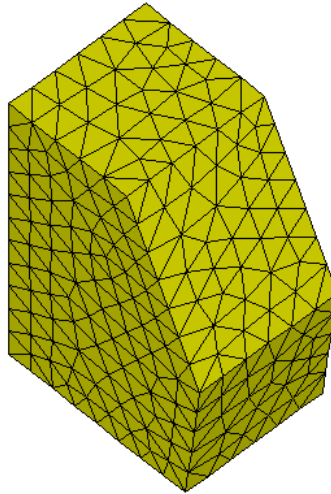
Tab.3. Wartości własne pomieszczenia prostopadłościennego i jego modelu

wartości własne k z (11)	wartości własne z MRF	błąd względny [%]
2.417	2.382	-1.4
3.741	3.784	1.1
4.833	4.798	-0.7
5.097	5.078	-0.4
5.614	5.763	2.6
5.643	5.869	0.4
6.202	6.241	0.6

Obliczenia testowe przeprowadzono dla 550 węzłów brzegowych i 793 węzłów kolokacyjnych. Wstępne szacunki wskazują, że zwiększenie liczby węzłów prowadzi do zmniejszenia błędu względnego.

3.2. Model kabiny

Drugim obiektem badań był uproszczony model wnętrza kabiny operatora suwnicy. Wyniki obliczeń Metodą Funkcji Radialnych zostały porównane z wynikami uzyskanymi z Metody Elementów Skończonych.



Rys. 2. Uproszczony model wnętrza kabiny suwnicy

Współrzędne punktów brzegowych i kolokacyjnych dla MFR uzyskano z modelu MES kabiny przedstawionego na rysunku 2. Do obliczeń MES wykorzystano pakiet ELMER (<http://www.csc.fi/english/pages/elmer>) dostępny jako narzędzie obliczeniowe OpenSource. Wyniki analizy przeliczone na częstotliwości własne układu akustycznego zestawiono w tabeli 4.

Tab.4. Zestawienie częstotliwości własnych kabiny modelu MES i MRF

częstotliwości własne MES	częstotliwości własne MRF	błąd względny [%]
61.233	61.377	0.14
74.557	74.591	0.03
89.691	89.973	0.28
112.78	112.681	-0.09
115.83	115.621	-0.21
121.79	121.929	0.14
122.57	123.520	0.95

Należy przypuszczać, że dla obliczeń Metodą Funkcji Radialnych zmniejszenie odległości między punktami, które stanowią centra funkcji radialnej będą wpływać na poprawę dokładności obliczeń.

PODSUMOWANIE

W pracy przytoczono kilka metod numerycznych akustyki falowej, które umożliwiają wyznaczenie poszukiwanych częstości drgań własnych. W dużym skrócie przedstawiono zalety i wady Metody Elementów Skończonych, Metody Różnic Skończonych i Metody Elementów Brzegowych, Metody Rozwiązań Fundamentalnych oraz szczegółowo Metodę Funkcji Radialnych.

Wyniki analizy akustycznego zagadnienia własnego prostych modeli, tj. modelu testowego i modelu kabiny operatora suwnicy z wykorzystaniem metody Kansı przedstawiono w tabelach 3 i 4. Uzyskane rezultaty wskazują na spore możliwości obliczeniowe MFR pomimo uciążliwości z doбором parametru kształtu c dla zadanego modelu.

BIBLIOGRAFIA

1. Alves C.J.S., Antunes P.R.S., The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigenfrequencies and eigenmodes of 2D simply connected shapes. *Computers, Materials & Continua* 2005, nr 2.
2. Alves C.J.S., Chen C.S., *A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems*. *Advances in Computational Mathematics* 2005, nr 23.
3. Alves C.J.S., Valtchev S.S., *Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering*. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2005, nr 53.
4. Chinchapatnam P.P., Djidjeli K., Nair P.B., *Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier-Stokes equation*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84, 2007, pp.1509-1526.
5. Kansa E.J., *Multiquadratic a scattered data approximation scheme with application to computational fluid dynamics*. *Computers & Mathematics with Applications* 19, 1990, pp. 147-165.
6. Kang S.W., Lee M.J. Kang Y.J., *Vibration analysis of arbitrary shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function*. *Journal of Sound and Vibration* 1999, nr 221
7. Karageorghis A., *The method of fundamental solutions for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation*. *Applied Mathematics Letters* 2001, nr 69.
8. Vu P., Fasshauer G.E., *Application of two radial basis function-pseudospectral meshfree methods to three-dimensional electromagnetic problems*. *IET Science, Measurements & Technology*, 5, 2011 pp. 206-210.
9. Reutskiy S.Y., *The method of external sources for eigenvalue problems with Helmholtz equation*. *Computer Modeling in Engineering & Science* 2006, nr 12.
10. Wawrzynek A., Detka M., Cichoń Cz., *Zastosowanie metody R-funkcji do wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła*. *Modelowanie Inżynierskie* 43, Gliwice 2012, s.255-263.
11. Wendland H., *Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree*. *Advances in Computational Mathematics* 4, 1995, pp.389-396.
12. Zerroukat M., Power H., Chen C.S., *A numerical method for heat transfer problem using collocation and radial basis function*. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 1998, pp. 1263-1278.

APPLICATION RADIAL BASIS FUNCTION METHOD FOR SOLVE ACOUSTICAL EIGEN VALUE PROBLEM

Abstract

In the paper the possibility of Radial Basis Function Method for the calculation of acoustic eigenvalues is described. The proposed method is compared with other numerical methods of wave acoustic. The advantages and disadvantages of Finite Element Method and Boundary Element Method are described and compared to proposed Radial Basis Function Method.

Autorzy:

dr hab. inż. **Leszek Majkut** – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza w Krakowie
dr inż. **Ryszard Olszewski** – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza w Krakowie