

Jerzy AUGUSTYN¹, Grzegorz MISIOWIEC²

¹ POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA, al. Tysiąclecia Państwa Polskiego 7, 25-314 Kielce

² ZESPÓŁ SZKÓŁ ELEKTRYCZNYCH, ul. Prezydenta R. Kaczorowskiego 8, 25-317 Kielce

Szacowanie niepewności aparaturowej w algorytmicznych pomiarach impedancji metodą Monte Carlo

Dr hab. inż. Jerzy AUGUSTYN

Ukończył studia na Wydziale Elektrycznym Politechniki Śląskiej w 1978 r. Na tym samym Wydziale w roku 1988 uzyskał stopień doktora nauk technicznych, a w roku 2008 – doktora habilitowanego. Profesor w Katedrze Elektrotechniki i Systemów Pomiarowych Wydziału Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki Politechniki Świętokrzyskiej. Główne zainteresowania naukowe: pomiary impedancji, algorytmy przetwarzania danych pomiarowych, propagacja niepewności w systemach pomiarowych.

e-mail: j.augustyn@tu.kielce.pl



Mgr inż. Grzegorz MISIOWIEC

Ukończył studia na Politechnice Świętokrzyskiej na kierunku Elektrotechnika o specjalności Automatyka w 2010 roku. Obecnie jest nauczycielem w Zespole Szkół Elektrycznych w Kielcach im. R. Kaczorowskiego oraz w Zespole Szkół Informatycznych w Kielcach im. gen. Józefa Hauke Bosaka.

e-mail: Grzegorz_Misiowiec@10g.pl



Streszczenie

W artykule przedstawiono ocenę niepewności aparaturowej pomiaru modułu i kąta fazowego impedancji za pomocą algorytmu dopasowania do sinusoidy oraz dwóch wersji algorytmu dopasowania do elipsy - klasycznej i zmodyfikowanej o algorytm analizy składowych głównych. Metodą Monte Carlo wyznaczono budżety niepewności dla badanych algorytmów oraz macierze niepewności. Wykazano, że podstawowym źródłem niepewności aparaturowej jest błąd wzmocnienia - dla modułu impedancji i szum wejściowy - dla kąta fazowego.

Słowa kluczowe: algorytmy pomiarowe, dopasowanie do sinusoidy, dopasowanie do elipsy, analiza głównych składowych, pomiary składowych impedancji, metoda Monte Carlo, budżet niepewności.

Estimation of the instrument uncertainty in an algorithmic impedance measurements by Monte Carlo method

Abstract

An estimation of the instrument uncertainty of magnitude and phase angle measurement of impedance by using sine fitting algorithm, and the two versions of ellipse-fitting algorithm – the classical and the modified by algorithm of principal component analysis (PCA) is presented in the paper. In the sine fitting algorithm, based on LMS method, the values of orthogonal components of voltage and current (3) are used to calculate the impedance components $|Z|$ and φ , from Eq. (4). In the classical ellipse fitting algorithm, based on the determined value of the parameter vector a (Eq. (6)), the impedance components are calculated from Eq. (7). In the modified ellipse fitting algorithm, the measuring system is supplemented by an additional acquisition channel of the generator signal. The classical ellipse fitting algorithm is then preceded by a fitting to the plane algorithm, using the method of principal components analysis [7]. Histograms in Figs. 1 and 2 show relative measurement errors impedance components obtained by the Monte Carlo method. Uncertainty budgets were determined for the tested algorithms as well as the uncertainty matrices. In the Tabs. 2 and 3 are shown the contributions to the standard uncertainty of the various uncertainty sources. It has been shown that the basic source of the uncertainty is the gain error - for the magnitude of impedance, and the input noise - for the phase angle. Components values of the combined standard uncertainty of impedance values estimation and the shape of probability distribution depend on the form of a processing algorithm.

Keywords: measurement algorithms, sine fitting, ellipse fitting, principal component analysis, measurement of impedance components, Monte Carlo method, uncertainty budget.

1. Wprowadzenie

Układy pomiarowe z przetwarzaniem analogowo-cyfrowym umożliwiają zastosowanie algorytmicznych metod pomiaru składowych impedancji. Znanych jest wiele algorytmów przetwarzania stosowanych przy doprowadzeniu do mierzonej impedancji sinusoidalnego napięcia lub prądu. Często w takich przypadkach

wykorzystuje się algorytmy dopasowania do sygnałów sinusoidalnych, zapisanych w postaci parametrycznej lub uwikłanej. Dane wejściowe do wyznaczenia parametrów tych sygnałów uzyskuje się w dwu- lub trójkanałowym układzie akwizycji danych, w którym próbkowane są jednocześnie przebiegi napięcia na mierzonej impedancji, napięcia na szeregowym oporniku wzorcowym – proporcjonalnego do prądu płynącego przez tę impedancję, a niekiedy dodatkowo napięcia generatora. W przypadku niekoherentnego próbkowania stosowany jest algorytm dopasowania do elipsy, w którym estymowane parametry wyznacza się z równania krzywej stożkowej. Układy akwizycji danych wprowadzają do wyniku pomiaru niepewność związaną z błędami aparaturowymi torów przetwarzania analogowo-cyfrowego [1-2]. Oszacowanie wpływu tych błędów na wynik pomiaru składowych impedancji można uzyskać metodą analityczną, na podstawie prawa propagacji niepewności [1]. Wymagane w tym przypadku obliczenia współczynników wrażliwości funkcji macierzowych zmiennych macierzowych są skomplikowane, a uzyskane wyniki takiej analizy nie są w pełni miarodajne. Możliwość ścisłego stosowania prawa propagacji niepewności jest ograniczona do niepewności charakteryzujących się rozkładem normalnym. Obliczenia komplikują się ponadto w przypadku skorelowania przetwarzanych składowych. Stosowane w układach do pomiaru impedancji algorytmy przetwarzania, w niektórych przypadkach, wykorzystują złożone przekształcenia macierzowe, praktycznie uniemożliwiające zastosowanie metod analitycznych. Uniknięcie tych trudności zapewnia analiza Monte Carlo [3]. W artykule przedstawiono wyniki badań symulacyjnych propagacji wybranych składników niepewności aparaturowej trzech algorytmów pomiaru składowych impedancji: dwuparametrowego algorytmu dopasowania do sinusoidy [4] oraz dwóch wersji algorytmu dopasowania do elipsy - klasycznej [5-6] i zmodyfikowanej o algorytm analizy składowych głównych [7].

2. Algorytmy pomiaru składowych impedancji

Algorytm dopasowania do sygnałów sinusoidalnych spróbkowanych sygnałów napięcia na mierzonej impedancji i napięcia na szeregowym oporniku wzorcowym, polega na wyznaczeniu składowych ortogonalnych przebiegu sinusoidalnego [4-5]. Napięcie $u(t)$ i prąd $i(t)$ na mierzonej impedancji można opisać układem równań

$$u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u), \quad (1a)$$

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i). \quad (1b)$$

Dla N -elementowych ciągów próbek napięcia $\{u(n)\}$ i prądu $\{i(n)\}$ oraz znanej pulsacji sygnału ω , spróbkowane wartości napięcia i prądu spełniają równania

$$u(n) = U_c \sin \omega n T_s + U_s \cos \omega n T_s + r_u(n) \quad n=0, 1, \dots, N-1, \quad (2)$$

$$i(n) = I_c \sin \omega n T_s + I_s \cos \omega n T_s + r_i(n)$$

gdzie: T_s - okres próbkowania, $r_u(n), r_i(n)$ - błędy powstające podczas kondycjonowania i dyskretyzacji napięcia i prądu.

Zastosowanie metody najmniejszych kwadratów do (2) prowadzi do rozwiązania

$$[\mathbf{x}_u \ \mathbf{x}_i] = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T [\mathbf{u} \ \mathbf{i}], \quad (3)$$

gdzie: $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \omega T_s & \cos \omega T_s \\ \vdots & \vdots \\ \sin \omega n T_s & \cos \omega n T_s \\ \vdots & \vdots \\ \sin \omega (N-1) T_s & \cos \omega (N-1) T_s \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_u = [U_c \ U_s]^T$, $\mathbf{x}_i = [I_c \ I_s]^T$,

\mathbf{u}, \mathbf{i} - wektory kolumnowe ciągów próbek $\{u(n)\}$ oraz $\{i(n)\}$, na podstawie których składowe impedancji oblicza się ze wzorów:

$$|Z| = \frac{\sqrt{U_c^2 + U_s^2}}{\sqrt{I_c^2 + I_s^2}}, \quad \varphi = \arctan \frac{U_s I_c - U_c I_s}{U_c I_c + U_s I_s}. \quad (4)$$

Zakłada się ponadto, że proces próbkowania jest zsynchronizowany z okresem badanych sygnałów.

Po wyeliminowaniu czasu t , układ równań (1) opisujący elipsę można zapisać jako:

$$F(u, i) = au^2 + bui + ci^2 + du + ei + g = 0. \quad (5)$$

Dla N -elementowych ciągów par próbek napięcia i prądu $\{u(n), i(n)\}$, (5) przyjmuje postać macierzewego równania krzywej stożkowej

$$F(\mathbf{x}_i) = \mathbf{x}_i \mathbf{a} = 0, \quad \text{dla } i=1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

gdzie: $\mathbf{x}_i = [u_i^2, u_i i_i, i_i^2, u_i, i_i, 1]^T$, $\mathbf{a} = [a, b, c, d, e, g]^T$.

Po zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów z ograniczeniami, wyznacza się najmniejszą dodatnią wartość własną dla macierzy rozrzutu, której odpowiada poszukiwany wektor własny \mathbf{a} , skąd wartości składowych impedancji oblicza się z zależności [5-6]

$$|Z| = \frac{\sqrt{a}}{c}, \quad \varphi = \arccos \frac{-\text{sign}(a)b}{2\sqrt{ac}}. \quad (7)$$

W zmodyfikowanym algorytmie dopasowania do elipsy, układ pomiarowy jest uzupełniony o dodatkowy tor akwizycji sygnału generatora zasilającego. Podstawowy algorytm dopasowania do elipsy jest wtedy poprzedzony algorytmem dopasowania do płaszczyzny, wykorzystującym metodę analizy składowych głównych (Principal Component Analysis - PCA) [7].

3. Badania symulacyjne

Przetwarzanie a/c kolejnych wartości sygnałów w układzie akwizycji danych związane jest z występowaniem wielu źródeł błędów aparaturowych [2]. Zbieranie kolejnych wyników takiego przetwarzania ma charakter pomiaru bezpośredniego. Produkcji układów akwizycji danych podają granice przedziałów zawierających takie błędy. W zależności od warunków realizacji pomiarów oraz zastosowanego algorytmu przetwarzania niektóre z tych błędów mogą w istotny sposób wpływać na niepewność pomiaru składowych impedancji. W szczególności duże znaczenie w mogą wywierać błędy wzmocnienia i przesunięcia. Ponadto podawane są wartości szumów wejściowych oraz błędy nieliniowości całkowitej i różnicowej przetwornika a/c. Niezależnie od tych składników niepewności, należy uwzględnić błąd kwantowania. W celu zbadania wpływu tych składowych aparaturowych niepewności przeprowadzono eksperyment symulacyjny, wykorzystując meto-

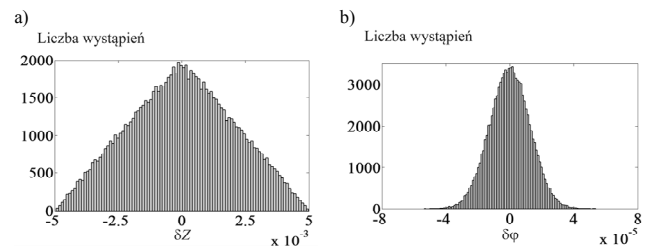
dę Monte Carlo [3]. Wartości wybranych składowych aparaturowych niepewności ustalone na podstawie parametrów typowych kart akwizycji danych, przedstawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Parametry składowych aparaturowych niepewności układu akwizycji danych zastosowane w eksperymencie symulacyjnym
Tab. 1. Component parameters of the instrument uncertainty of a data acquisition system used in the simulation experiment

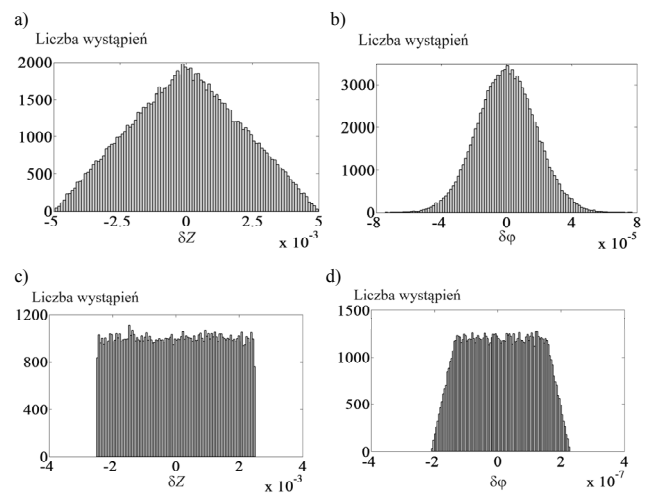
Wielkość	Granice błędu lub odchylenie standardowe	Rozkład prawdopodobieństwa
Błąd przesunięcia	$\Delta(U_{\text{off}}) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V}$	jednostajny
Błąd wzmocnienia	$\Delta(G) = 5 \cdot 10^{-3} \text{ V/V}$	jednostajny
Szum wejściowy	$\sigma_{\text{szum}} = 10^{-4} \text{ V}$	normalny
Błąd kwantowania w kanałach przetwarzania	$\Delta(U_{\text{kwant}}) = \begin{cases} 0,7 \cdot 10^{-4} \text{ V} & ^1 \\ 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ V} & ^2 \\ 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ V} & ^3 \end{cases}$	jednostajny

¹⁾ spadku napięcia na rezystancji szeregowej,
²⁾ spadku napięcia na mierzonej impedancji,
³⁾ napięcia generatora sygnału wymuszającego.

Ze względu na postać widma sygnału wyjściowego przetwornika a/c, zawierającego opisane składniki niepewności aparaturowej, przyjęto, że poszczególne rodzaje błędów są wzajemnie niezależne, ich wartości średnie są równe zeru, a funkcje gęstości prawdopodobieństwa błędów wzmocnienia i przesunięcia można opisać rozkładem jednostajnym [2]. Założono, że addytywny szum wejściowy ma charakter stacjonarny i rozkład normalny. Ponadto założono niezależność błędów we wszystkich kanałach układu akwizycji danych. Jedynym założeniem związanym z kwantowaniem było przyjęcie rozdzielczości przetworników a/c - 16 bitów oraz założenie, że zakresy przetwarzania sygnałów w poszczególnych kanałach, odpowiadają ich wartościom maksymalnym.



Rys. 1. Histogramy względnego błędu modułu δZ (a) i kąta fazowego $\delta \varphi$ (b) impedancji Z , otrzymane na podstawie algorytmu dopasowania do sinusoidy
Fig. 1. Histograms of the relative errors of the magnitude δZ (a), as well as the phase angle $\delta \varphi$ (b) of impedance Z obtained from the sine fitting algorithm



Rys. 2. Histogramy względnego błędu modułu δZ i kąta fazowego $\delta \varphi$ impedancji Z , otrzymane na podstawie algorytmu dopasowania do elipsy (a i b) oraz po zastosowaniu analizy głównych składowych (c i d)
Fig. 2. Histograms of the relative errors of the magnitude δZ , as well as the phase angle $\delta \varphi$ of impedance Z obtained from the ellipse fitting algorithm (a, b) and after application of principal component analysis (c, d)

Sinusoidalny sygnał wymuszający o częstotliwości $f=1000$ Hz miał amplitudę 5 V. Ponadto założono próbkowanie koherentne z częstotliwością $f_s=64$ kHz. Badania symulacyjne dla impedancji $Z=1000-j1000 \Omega$, $N=64$ próbek, powtarzano 100 000 razy, a wyniki w postaci histogramów względnych błędów estymacji modułu $\delta|Z|$ i kąta fazowego $\delta\varphi$ impedancji Z przedstawiono na rys.1 i 2. Ponadto w tabeli 2 pokazano budżet niepewności pomiaru składowych impedancji obliczony dla algorytmu dopasowania do sinusoidy.

Tab. 2. Budżet niepewności pomiaru składowych impedancji algorytmem dopasowania do sinusoidy

Tab. 2. Uncertainty budget for impedance measurement by the sine fitting algorithm

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Udział w niepewności standardowej	
				$u(Z)$ [Ω]	$u(\varphi)$ [rad]
ΔU_{off}	0 V	$2,9 \cdot 10^{-3}$ V	jednostajny	$7,8 \cdot 10^{-6}$	$2,1 \cdot 10^{-9}$
σ_{sum}	0 V	$1 \cdot 10^{-4}$ V	normalny	$14 \cdot 10^{-3}$	$9,7 \cdot 10^{-6}$
ΔG	0 V/V	$2,9 \cdot 10^{-3}$ V/V	jednostajny	2,9	$3,1 \cdot 10^{-9}$
ΔU_{kwant}	0 V	$0,40 \cdot 10^{-5}$ V ¹⁾ $0,58 \cdot 10^{-5}$ V ²⁾ $0,87 \cdot 10^{-5}$ V ³⁾	jednostajny	$8,0 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-14}$
$\Delta Z $	0 Ω		trójkątny	2,9	
$\Delta\varphi$	0 rad		normalny		$9,9 \cdot 10^{-6}$

Ponieważ z porównania histogramów przedstawionych na rysunkach 1 i 2 wynika, że wartości niepewności standardowych składowych impedancji dla algorytmu dopasowania do sinusoidy różnią się nieznacznie w porównaniu do algorytmu dopasowania do sinusoidy jedynie dla składowej kątowej, w tabeli 3 pokazano budżet niepewności dla zmodyfikowanego algorytmu dopasowania do elipsy.

Tab. 3. Budżet niepewności pomiaru składowych impedancji algorytmem PCA zmodyfikowanym metodą dopasowania do elipsy

Tab. 3. Uncertainty budget for impedance measurement by the ellipse-fit algorithm modified with PCA method

Symbol wielkości	Estymata wielkości	Niepewność standardowa	Rozkład prawdopodobieństwa	Udział w niepewności standardowej	
				$u(Z)$	$u(\varphi)$
ΔU_{off}	0 V	$2,9 \cdot 10^{-3}$ V	jednostajny	$5,1 \cdot 10^{-8}$	$1,4 \cdot 10^{-11}$
σ_{sum}	0 V	$1 \cdot 10^{-4}$ V	normalny	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$1,8 \cdot 10^{-6}$
ΔG	0	$2,9 \cdot 10^{-3}$ V/V	jednostajny	2,0	$1,9 \cdot 10^{-11}$
ΔU_{kwant}	0	$0,40 \cdot 10^{-5}$ V ¹⁾ $0,58 \cdot 10^{-5}$ V ²⁾ $0,87 \cdot 10^{-5}$ V ³⁾	jednostajny	$1,4 \cdot 10^{-10}$	$2,3 \cdot 10^{-13}$
$\Delta Z $	0 Ω		jednostajny	2,05	
$\Delta\varphi$	0 rad		trapezowy		$8,8 \cdot 10^{-8}$

Jak wynika z danych przedstawionych w tabelach 2-3, na wartość niepewności standardowej mierzonej składowej impedancji, niezależnie od postaci algorytmu przetwarzania decydujące znaczenie mają: niepewność związana z błędami wzmacnienia - dla modułu impedancji $|Z|$ oraz niepewność związana z występowaniem szumu wejściowego - dla kąta fazowego φ . Pozostałe analizowane składniki niepewności wnoszą pomijalnie małe udziały do niepewności złożonej. Ze względu na możliwość występowania korelacji pomiędzy mierzonymi składowymi impedancji, dodatkowo wyznaczono wartości elementów macierzy niepewności $\mathbf{U}(|Z|, \varphi)$ (macierzy kowariancji) dla analizowanych algorytmów, zdefiniowanej jako [3]:

$$\mathbf{U}(|Z|, \varphi) = \begin{bmatrix} u^2(|Z|) & u(|Z|, \varphi) \\ u(|Z|, \varphi) & u^2(\varphi) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

gdzie: $u^2(|Z|)$, $u^2(\varphi)$ oznaczają kwadraty niepewności (wariancje) odpowiednio modułu i kąta fazowego impedancji, a $u(|Z|, \varphi)$ - niepewność wzajemną (kowariancję) pomiędzy tymi składowymi impedancji. Dla analizowanych algorytmów otrzymano:

$$- \text{dopasowanie do sinusoidy } \mathbf{U}(|Z|, \varphi) = \begin{bmatrix} 8,3 & -6,9 \cdot 10^{-8} \\ -6,9 \cdot 10^{-8} & 9,8 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix}$$

$$- \text{dopasowanie do elipsy } \mathbf{U}(|Z|, \varphi) = \begin{bmatrix} 8,3 & 4,5 \cdot 10^{-8} \\ 4,5 \cdot 10^{-8} & 2,0 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix}$$

- dopasowanie do elipsy zmodyfikowane metodą PCA

$$\mathbf{U}(|Z|, \varphi) = \begin{bmatrix} 4,2 & 1,1 \cdot 10^{-7} \\ 1,1 \cdot 10^{-7} & 7,8 \cdot 10^{-10} \end{bmatrix}$$

Wartości niepewności wzajemnej potwierdzają występowanie korelacji pomiędzy składowymi impedancji. Algorytmy dopasowania do sinusoidy oraz dopasowania do elipsy, pomimo bardzo zbliżonych wartości niepewności składowych charakteryzują się przeciwnymi znakami korelacji przy takich samych typach rozkładów prawdopodobieństwa: trójkątnym dla $\delta|Z|$ i normalnym dla $\delta\varphi$. Zastosowanie metody PCA spowodowało zmianę typu rozkładów prawdopodobieństwa, odpowiednio na jednostajny i trapezowy.

4. Wnioski

Wyniki symulacji pokazują istotny wpływ postaci algorytmu na wartość złożonej niepewności aparaturowej. Zastosowanie klasycznego podejścia do oceny takiej niepewności poprzez założenie jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa dla poszczególnych składników niepewności może prowadzić do dużych błędów oszacowania, ze względu na różne typy rozkładów błędów składowych impedancji. Dla analizowanych algorytmów dopasowania do sinusoidy oraz dopasowania do elipsy w wersji klasycznej uzyskano - pomimo odmiennych modeli - zbliżone histogramy błędów składowych impedancji: identyczne dla błędów modułu $\delta|Z|$ i różniące się wartością odchylenia standardowego - dla błędów kąta fazowego $\delta\varphi$ (rys.1 i rys.2a-b). Dla tych algorytmów, minimalizowane metodą najmniejszych kwadratów równania (2) i (6) są liniowe względem poszukiwanych parametrów. Natomiast oba analizowane algorytmy dopasowania do elipsy różnią się zasadniczo pod względem rozkładów błędów. Korelacja występująca pomiędzy obliczonymi składowymi impedancji może mieć istotny wpływ na wartość niepewności składowych po transformacji do układu współrzędnych prostokątnych.

5. Literatura

- [1] Augustyn J.: Uncertainty evaluation of the processing algorithm of a time-variable quantities in multi-channel measurement systems, Metrology and Measurement Systems, vol. XIII, no. 3/2006, pp. 303-313, 2006.
- [2] Domańska A.: Niepewność wyniku przetwarzania analogowo-cyfrowego, rozdz.2 monografii: Niepewność pomiarów w teorii i praktyce, red. P. Fotowicz, GUM, Warszawa, 2011.
- [3] Evaluation of measurement data - Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" - Extension to any number of output quantities, JCGM 102:2011.
- [4] Augustyn J.: Some LMS-based algorithms for impedance measurements, Measurement, vol.41, no. 2, pp. 178-185, 2008.
- [5] Ramos P.M., Janeiro F.M., Radil T.: Comparison of impedance measurement in DSP using ellipse-fit and seven-parameter sine-fit algorithms, Measurement, vol. 42, pp.1370-1379, 2009.
- [6] Augustyn J.: Niepewność pomiaru impedancji metodą dopasowania do elipsy, PAK, vol. 57, nr 2, s. 180-183, 2011.
- [7] Augustyn J.: Algorytm estymacji składowych impedancji w trójkanałowym układzie akwizycji danych, PAK, vol. 59, nr 01, s. , 2013.