

Adam ŻUCHOWSKI

ZACHODNIOPOMORSKI UNIWERSYTET TECHNOLOGICZNY W SZCZECINIE, KATEDRA STEROWANIA I POMIARÓW
ul. 26 Kwietnia 10, 71-126 Szczecin

Kilka uwag o pewnym nieliniowym układzie śledzącym

Prof. dr hab. inż. Adam ŻUCHOWSKI

Profesor zwyczajny zatrudniony w Katedrze Sterowania i Pomiarów w Zachodniopomorskim Uniwersytecie Technologicznym. Ze szkolnictwem wyższym związany zawodowo od 1955 roku (Politechnika Wroclawska, Politechnika Szczecińska). Jest współtwórcą polskiej szkoły miernictwa dynamicznego, posiada w dorobku około 350 publikacji. W kwietniu 2010 roku upłynęło 55 lat jego działalności naukowej.



e-mail: adam.zuchowski@zut.edu.pl

Streszczenie

Równanie różniczkowe (1), którego rozwiązaniem jest tak zwana krzywa logistyczna bywa traktowane jako matematyczny model rozwoju szeregu zjawisk (epidemia, pożar, badania naukowe) w biologii nazywany modelem Verhulsta [1, 3, 5]. Przyjmuje się tu założenie, że prędkość zmiany zmiennej $y(t)$ to jest $dy(t)/dt$ odpowiadającej za rozwój jest proporcjonalna do osiągniętego już stanu i do tego, co jeszcze pozostało do osiągnięcia, a więc do iloczynu $k \cdot y(t) \cdot [A - y(t)]$ gdzie k jest współczynnikiem proporcjonalności, natomiast A - graniczną osiągalną wielkością y_{max} , zaś proces rozwoju zaczyna się od pewnych warunków początkowych $y(0)$. Na fakt, że układ opisywany takim równaniem w pewnych warunkach posiada niezłe możliwości śledzenia ewentualnych zmian $A(t)$ nie zwraca się uwagi, a wydaje się to interesujące i stanowi treść dalszych rozważań.

Słowa kluczowe: modele rozwoju, nieliniowy układ śledzący, właściwości.

A few notes about a nonlinear tracking system

Abstract

Differential equation (1), solution of which is the so-called logistic curve, is used as a mathematical model of a growth of many phenomena (epidemic, fire, scientific research) and in biology is called Verhulst model [1, 3, 5]. The speed $dy(t)/dy$ of a variable $y(t)$, assumed to be responsible of the growth, is proportional to the already achieved state and to what remains to be achieved, so to the product $k \cdot y(t) \cdot [A - y(t)]$, where k is the coefficient, A is the limit value y_{max} and the process starts with the initial condition $y(0)$. The fact that the system described with that equation under some specific conditions has a quite good ability to track the changes in $A(t)$ is commonly omitted, which seems interesting and will be investigated further on.

Keywords: growth models, nonlinear tracking system, features.

1. Wstęp

Rozważmy wspomniane już równanie różniczkowe:

$$dy(t)/dt = k \cdot y(t) \cdot [A - y(t)] \quad (1)$$

z warunkiem początkowym $y(0)$, posiadające rozwiązanie [2]:

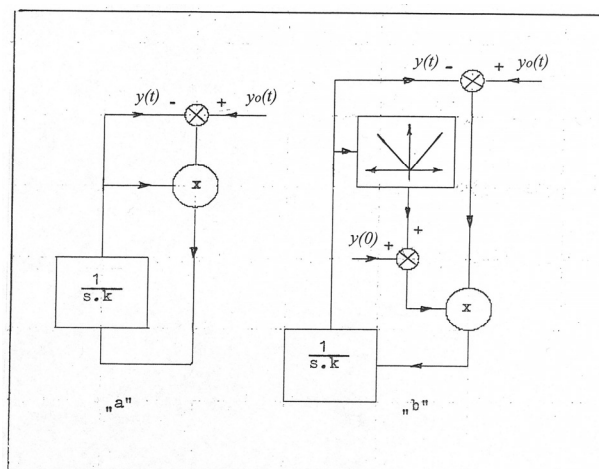
$$y(t) = \frac{y(0) \cdot \exp(k \cdot A \cdot t)}{1 + [y(0)/A] \cdot [\exp(k \cdot A \cdot t) - 1]} \quad (2)$$

Zastępując umownie graniczną wartość A pewnym „sygnałem odniesienia” $y_0(t)$ możemy przedstawić schemat ideowy układu działającego zgodnie z (1) jak pokazano na rysunku 1a. Układ taki nie jest w stanie samodzielnie rozpocząć działania bez wprowadzenia warunku początkowego $y(0)$, jego niewielka modyfikacja polegająca na uzupełnieniu równania (1):

$$dy(t)/dt = k \cdot [y(t) + y(0)] \cdot [y_0(t) - y(t)] \quad (3)$$

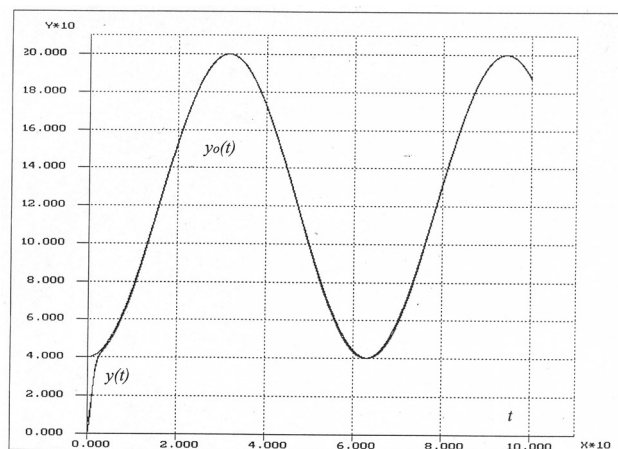
rozwiązuje sprawę. W warunkach $y(0) > 0$ oraz $y_0(t) > 0$ mamy śledzenie zmian sygnału odniesienia $y_0(t)$ w czasie, bez konieczności sztucznego wprowadzenia niezerowego warunku początkowego. Zilustrowano to przebiegami pokazanymi na rysunku 2, przy tym przyjęto w tym przykładzie $y_0(t) = 120 - 80 \cdot \cos(t/10)$, $y(0) = 5$, $k = 0,05$. Śledzenie zmian – poza krótką chwilą jest dokładne i bez przeregulowań, a rozwiązania według koncepcji (1) z warunkiem początkowym i według (3) praktycznie niczym się nie różnią.

Warto jednak zauważyć, że prezentowany układ może pracować wyłącznie przy spełnieniu warunków $y_0(t) > 0$, $y(0) > 0$.



Rys. 1. Schemat ideowy omawianego układu śledzącego. Symbolem „x” oznaczono węzeł mnożący

Fig. 1. Schematic diagram of a discussed tracking system. Symbol „x” denotes multiplication



Rys. 2. Śledzenie zmian sygnału odniesienia $y_0(t)$ przez układ z rys. 1a z warunkiem początkowym $y(0)$ i przez układ z rys. 1b.

Fig. 2. Tracking of changes in a reference signal $y_0(t)$ by the system from Fig. 1a with initial condition $y(0)$ and by the system from Fig. 1b

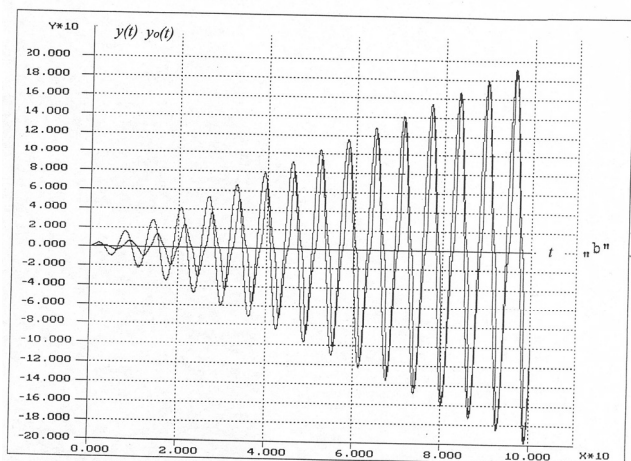
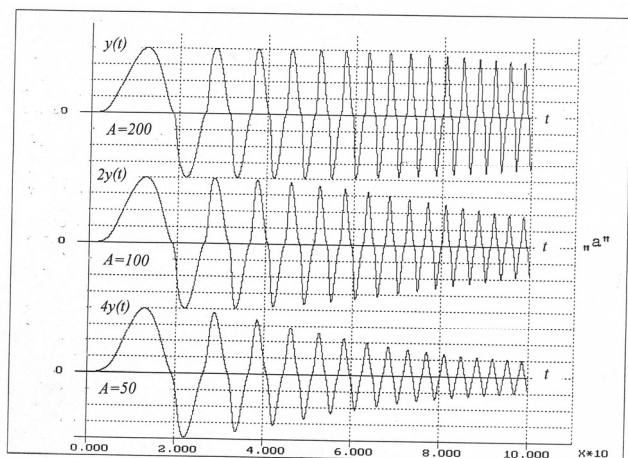
2. Propozycja rozszerzenia możliwości układu

Dla rozszerzenia możliwości działania układu konieczne jest wprowadzenie niewielkich zmian w algorytmie jego działania. Wystarczy w tym celu operować równaniem różniczkowym o postaci:

$$dy(t)/dt = k \cdot \{y(t) + y(0)\} \cdot [y_0(t) - y(t)] \quad (4)$$

przy zerowym warunku początkowym i przy $y(0) > 0$. Schemat ideowy układu opisywanego takim równaniem pokazano na rysunku 1b. Gdyby sumę $\{y(t) + y(0)\}$ zastąpić stałym współczynnikiem k_1 – równanie (4) opisywało by działanie prostego liniowego układu śledzącego z idealnym całkującym regulatorem w pętli sprzężenia zwrotnego. Dokładność śledzenia takiego układu jest tym większa – im większą wartość miał by iloczyn $k \cdot k_1$.

Tu, w przypadku równania (4) należy się liczyć z tym, że dokładność śledzenia zmian $y_0(t)$ będzie tym większa – im większe są wartości członu $k \cdot \{y(t) + y(0)\}$, a więc w otoczeniu dużych wartości $y_0(t)$ i można wywierać na to wpływ poprzez dobór wartości k i $y(0)$, a w każdym przypadku proces śledzenia będzie przebiegał bez przeregulowań. Poprawność takiego rozumowania potwierdzają dwa proste eksperymenty, których rezultaty przedstawiają wykresy na rysunkach 3a i 3b. W pierwszym przypadku układ o parametrach $k=0,05$; $y(0)=5$, śledził zmiany sygnału $y_0(t) = A \cdot \sin(0,01 \cdot t)$ dla wartości $A=50$; 100; i 200. Na rysunku 3a widać, że amplituda sygnału $y_0(t)$ maleje wraz ze wzrostem pulsacji tym szybciej, im mniejsze jest A . W drugim przypadku układ o tych samych parametrach śledził sygnał $y_0(t) = 2 \cdot t \cdot \sin(t)$. Także i tu (rysunek 3b) nadążanie za zmianami śledzonego sygnału jest tym lepsze, im większa jest amplituda $A=2t$, a w obu przykładach błędy śledzenia w chwilach gdy $y(t)+y(0)$ jest bliskie zeru są największe.



Rys. 3. Testowanie właściwości układu z rys. 1b w warunkach: a) śledzenia sygnału o rosnącej pulsacji przy różnych wartościach jego amplitudy, b) przy rosnącej amplitudzie i stałej pulsacji

Fig. 3. Testing features of the system from Fig. 1b while: a) tracking the signal with increasing angular speed with different amplitude values, b) with increasing amplitude and constant angular speed

3. Niektóre problemy praktycznej realizacji

Praktyczna realizacja układu wymaga użycia członu całkującego, a takie człony idealne o transmitancji $K(s)=1/sT_c$ nie istnieją i należy się liczyć z transmitancją $K(s)=1/s \cdot T_c(1+s \cdot T)$. W tych warunkach pracę układu śledzącego opisuje równanie:

$$T \cdot T_c dy(t)/dt + T_c dy(t) dt = k \cdot \{y(t) + y(0)\} \cdot [y_0(t) - y(t)] \quad (5)$$

W warunkach, gdy suma $\{y(t) + y(0)\}$ zmienia się tylko nieznacznie względem wartości $k_1 = \text{const.}$ można wprowadzić oznaczenia zastępcze:

$$T \cdot T_c / k_1 \cdot k = 1 / \omega_0^2, \quad T_c / k_1 \cdot k = 2 \cdot B / \omega_0 \quad (6)$$

i potraktować cały układ jak człon oscylacyjny. Dla takiego członu kwadratowy błąd śledzenia skoku jednostkowego o amplitudzie A wynosi [4]:

$$d = (A^2 / \omega_0^2) \left\{ (4 \cdot B^2 + 1) / 4 \cdot B \right\} \quad (7)$$

a ponieważ $\omega_0 B = 1/2 \cdot T$ nie zależy od k_1 – błąd ten przy stałej amplitudzie skoku i niewielkich zmianach B zmienia się nieznacznie ze zmianami k_1 , co ilustrują przebiegi pokazane na rysunku 3a, a uzyskane dla $k=0,05$, $y(0)=5$, oraz każdorazowo dla skoku o amplitudzie $A=20$ i skoku od poziomu wstępnego 0,20,40,60,...180.

Z kolei czas trwania procesu regulacji przy śledzeniu skoku jednostkowego dla członu oscylacyjnego określa wzór przybliżony [4]:

$$t_r \cong -(1/B \cdot \omega_0) \cdot \ln \left\{ d \cdot \sqrt{1-B} \right\}, \quad B < 1 \quad (8)$$

gdzie d jest dopuszczalną odchyłką względną, a ponieważ spełniony jest warunek $\omega_0 B = \text{const.}$ w szerokim zakresie zmian wartości k_1 czyli amplitudy skoku - wolno się spodziewać, że czas ten będzie się zmieniał tylko nieznacznie, nawet przy skokach $y_0(t)$ dużych i zaczynających się od poziomu zerowego. Wykresy przedstawiono na rysunku 4b. Zdają się one ten wniosek potwierdzać, rośnie tylko trochę przeregulowanie wraz ze zmniejszaniem się wartości B – co jest faktem znanym, ale w mniejszym stopniu niż na wykresach z rysunku 4a.

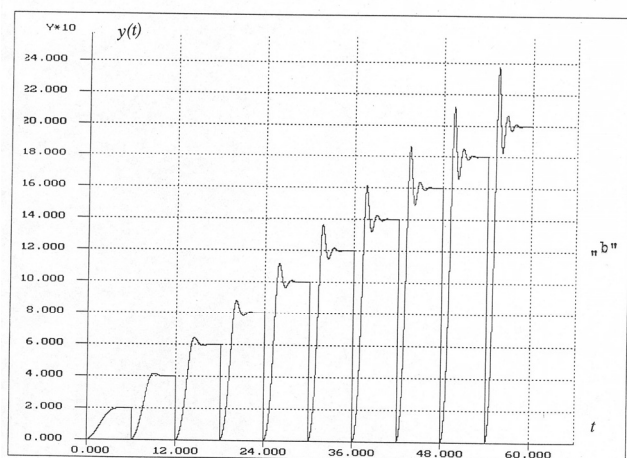
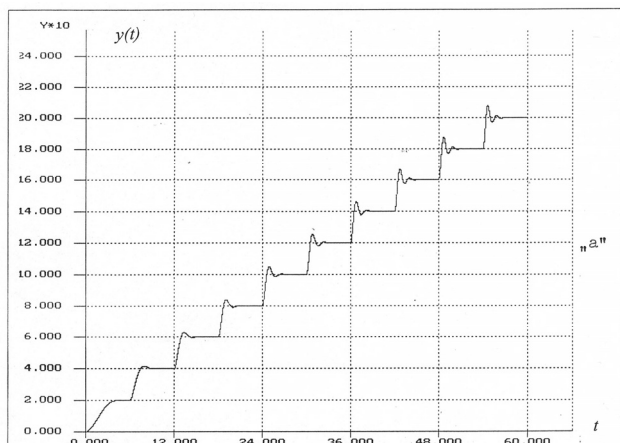
Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden fakt. Załóżmy, że człon $k \cdot \{y(t) + y(0)\} \cdot [y_0(t) - y(t)]$ może też być wykorzystany do sterowania obiektem regulacji o transmitancji $K_0(s)$ poprzez regulator PID lub w prostszym przypadku PI. Dla transmitancji obiektu typu:

$$K_0(s) = \frac{k_0}{(1 + a \cdot s + b \cdot s^2) \cdot (1 + sT)} \quad (9)$$

dobierając nastawy regulatora PID jako $T_c = a$, $T \cdot T_c = b$, otrzymuje się w efekcie opis dynamiki całego układu w postaci równania (5), przy tym $k = k_0 \cdot V$ i identyczne dla obiektu o dynamice z inercją drugiego rzędu przy użyciu regulatora PI. Poprzednie uwagi i wnioski pozostają tu nadal aktualne.

4. Podsumowanie

Prezentowany układ śledzący jest tylko jednym z wielu możliwych do realizacji układów nieliniowych o niezłych właściwościach mimo odchylenia w praktycznej realizacji od wyjściowych założeń. Warto zwrócić uwagę na to, że działa tym skuteczniej im większy jest śledzony sygnał odniesienia, a więc jakby „zwiększona waga problemu”.



Rys. 4. Testowanie właściwości układu z rys. 1b, a) w warunkach śledzenia skoków o stałej amplitudzie w zmiennych początkowych warunkach ustalonych, b) przy zmiennych amplitudach skoków

Fig. 4. Testing features of the system from Fig. 1b, a) while tracking steps with a constant amplitude with varied initial conditions, b) with variable amplitude

Ciekawe, że takie właśnie rozwiązanie „wybrały” niektóre zjawiska przyrodnicze i społeczne jako modele swego rozwoju, może właśnie owa „waga” sytuacji miała tu istotne znaczenie.

5. Literatura

- [1] Czernawski D.S., Romanowski J.M., Stiepanowa M.W.: Modelowanie matematyczne w biofizyce. Warszawa, WNT 1979.
- [2] Kulikowski R.: Analiza systemowa i jej zastosowanie. Warszawa, PWN 1977.
- [3] Verhulst P.: Nouveaux memories de l' Academie royale des sciences et bellew letters de Bruxelles 1838, 18.1.
- [4] Żuchowski A.: Pomiary dynamiczne. Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 1984.
- [5] Żuchowski A.: Wybrane modele dynamiki zachowań obiektów, osobników i ich zespołów. Wyd. Uczelniane Politechniki Szczecińskiej, Szczecin 2005.

otrzymano / received: 20.08.2014

przyjęto do druku / accepted: 01.10.2014

artykuł recenzowany / revised paper

INFORMACJE

Newsletter PAK

Wydawnictwo PAK wysyła drogą e-mailową do osób zainteresowanych Newsletter PAK, w którym są zamieszczane:

- spis treści aktualnego numeru miesięcznika PAK,
- kalendarz imprez branżowych,
- ważniejsze informacje o działalności Wydawnictwa PAK.

Newsletter jest wysyłany co miesiąc do osób, które w jakikolwiek sposób współpracują z Wydawnictwem PAK (autorzy prac opublikowanych w miesięczniku PAK, recenzenci, członkowie Rady Programowej, osoby które zgłosiły chęć otrzymywania Newslettera).

Celem inicjatywy jest umocnienie w środowisku pozycji miesięcznika PAK jako ważnego i aktualnego źródła informacji naukowo-technicznej.

Do newslettera można zapisać się za pośrednictwem:

- strony internetowej: www.pak.info.pl, po dodaniu swojego adresu mailowego do subskrypcji,
- adresu mailowego: wydawnictwo@pak.info.pl, wysyłając swoje zgłoszenie.

Otrzymywanie Newslettera nie powoduje żadnych zobowiązań ze strony adresatów. W każdej chwili można zrezygnować z otrzymywania Newslettera.

Tadeusz SKUBIS

Redaktor naczelny Wydawnictwa PAK