



Analiza porównawcza wybranych transformat w kontekście zobrazowania zaszumionego sygnału harmonicznego

ARTUR ZACNIEWSKI

Akademia Marynarki Wojennej w Gdyni, Wydział Nawigacji i Uzbrojenia Okrętowego,
81-103 Gdynia, ul. Śmidowicza 69, a.zacniewski@amw.gdynia.pl

Streszczenie. W artykule przedstawiono zestawienie popularnych transformat sygnałów wykorzystywanych m.in. w procesach odszumiania sygnałów harmonicznnych. Omówiono podział sygnałów poddawanych analizie matematycznej oraz zaprezentowano wybrane transformaty, takie jak: krótkookresowa transformata Fouriera STFT, transformata Wignera-Ville'a WVD, transformata falkowa WT oraz dyskretna transformata kosinusowa DCT. Badaniom poddano sygnał harmoniczny, do którego dodany został szum biały. W czasie badań zmieniano parametry szumu, analizując efekty zastosowania poszczególnych transformat na zaszumionym sygnale. Pokazano, jak istotny jest dobór nie tylko samej transformaty, lecz także jej parametrów (np. poziomu progu odcięcia w przypadku dyskretny transformaty kosinusowej), innych dla każdego rodzaju transformaty. Niewielka zmiana parametrów lub zmiana funkcji użytej w transformacie mogą prowadzić do znacznie różniących się wyników.

Słowa kluczowe: odszumianie sygnałów harmonicznnych, transformata falkowa, dyskretna transformata kosinusowa, DCT

DOI: 10.5604/12345865.1168698

Wstęp

Sygnały poddawane analizie matematycznej można podzielić na dwie zasadnicze grupy:

- stacjonarne (deterministyczne), czyli niezmiennie w czasie, ich wartość można wyznaczyć w dowolnej chwili czasu,

- sygnały niestacjonarne (stochastyczne), czyli zmieniające swój charakter z upływem czasu, pozwalające określić wartość sygnału jedynie z pewnym prawdopodobieństwem.

Pośród metod opisu sygnałów bardzo użytecznym narzędziem okazały się metody transformacyjne pozwalające przedstawić sygnał w dziedzinie częstotliwości i zbadać jego właściwości widmowe. Analizy częstotliwościowe polegają na przedstawieniu badanego sygnału za pomocą kombinacji liniowej pewnych bazowych sygnałów elementarnych, które zazwyczaj charakteryzują się ortogonalnością względem siebie [1].

W artykule omówiono podstawowe transformaty używane w analizie sygnałów niestacjonarnych oraz ich zastosowanie w zobrazowaniu zaszumionych sygnałów harmoniczných. Przeprowadzono badania, których celem było praktyczne zobrazowanie zaszumionego sygnału harmonicznego przy wykorzystaniu wybranych rodzajów transformat oraz porównanie otrzymanych wyników.

1. Krótkookresowa transformata Fouriera (STFT)

Transformata Fouriera przedstawiona równaniem (1.1) daje nam informacje o składowych częstotliwościowych sygnału w otoczeniu chwili $t = t_0$.

$$F(\omega, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)b(t - t_0)e^{-i\omega t} dt. \quad (1.1)$$

Oczywiste jest, że do $F(\omega, t_0)$ odnosi się tylko sygnał w otoczeniu chwili t_0 dopóki ta część sygnału jest „widziana” przez okno czasowe, a reszta jest odcięta przez funkcję $b(t)$. Przesuwając okno wzdłuż osi czasu, uzyskujemy czasowo-częstotliwościowy opis sygnału $f(t)$. Najprostszym rodzajem okna jest tzw. okno prostokątne, jednak jego użycie prowadzi do niepożądanych zjawisk, np. do efektu Gibbsa. W praktyce lepsze efekty dają okna o kształcie innym niż prostokątne [11]. Do najbardziej znanych należą m.in. okno Blackmana oraz okno Hanninga [7].

STFT (ang. *Short Time Fourier Transform*) wnosi istotne ograniczenia w analizie sygnałów niestacjonarnych w związku z zasadą nieoznaczoności:

- dla danego okna czasowego rozdzielczość STFT jest stała w przestrzeni czas-częstotliwość,
- duża szerokość okna analizującego gwarantuje dużą rozdzielczość w dziedzinie częstotliwości, a jednocześnie małą rozdzielczość w dziedzinie czasu,
- mała szerokość okna analizującego gwarantuje dużą rozdzielczość w dziedzinie czasu i małą w dziedzinie częstotliwości, co jest przyczyną trudności w wydzieleniu niektórych składowych widma w przypadku analizy sygnałów szerokopasmowych [4].

2. Transformata Wignera-Ville'a

Transformata Wignera-Ville'a WVD (ang. *Wigner-Ville Distribution*) to czasowo-częstotliwościowa reprezentacja sygnału zdefiniowana w następujący sposób:

$$Wx(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \frac{\tau}{2})x^*(t - \frac{\tau}{2})e^{-i2\pi f\tau} dt. \quad (2.1)$$

Funkcja ta jest swoistą kombinacją transformaty Fouriera i funkcji autokorelacji sygnału, którą można interpretować jako:

- reprezentację autokoherencji sygnału w funkcji czasu,
- reprezentację autokorelacji sygnału w funkcji częstotliwości [4].

Reprezentacja tej postaci ma podstawowe zalety:

- zachowuje energię sygnału,
- jest funkcją rzeczywistą,
- spełnia wartości brzegowe: W_x scałkowana po czasie daje kwadrat modułu transformaty Fouriera $|X(f)|^2$, a scałkowana po częstotliwości pozwala na otrzymanie energii sygnału $|x(t)|^2$,

oraz wady:

- może być ujemna,
- zawiera wyrazy mieszane (ang. *cross-terms*).

Wyraz mieszany może pojawić się w takim rejonie przestrzeni czas-częstość, że w odpowiadającym mu przedziale czasu w sygnale brakuje jakiegokolwiek aktywności. Dla zminimalizowania tego efektu można wykorzystać spostrzeżenie, że wyrazy mieszane zwykle silnie oscylują, więc lokalne uśrednienie rozkładu (po czasie i częstotliwości) powinno zmniejszyć ich wkład.

Jednak w każdym przypadku pojawia się ogólna prawidłowość: im mniejszy wpływ interferencji (silniejsze uśrednianie), tym gorsza rozdzielczość. Problemy występujące w analizie sygnałów niestacjonarnych przy pomocy transformaty Wignera szerzej przedstawiono w [10].

3. Transformata falkowa

Reprezentacja falkowa sygnału jest funkcją dwu zmiennych, stanowiącą kombinację liniową skalowalnej (parametr m) i przesuwalnej (parametr n) funkcji zwanej falką — matką Ψ (ang. *mother wavelet*):

$$f(x) = \sum_m \sum_n d_{m,n} \Psi(2^{-m}x - n). \quad (3.1)$$

Współczynniki $d_{m,n}$ oblicza się analogicznie jak w przypadku transformaty Fouriera:

$$d_{m,n} = 2^m \int f(x) \Psi(2^{-m}x - n) dx, \quad (3.2)$$

Wzór (3.2) można interpretować również jako filtrację sygnału analizowanego $f(x)$ przez sygnał analizujący $\Psi(x, m, n)$.

Falka, na podstawie której przy pomocy skalowania i translacji tworzy się zespół ortogonalnych funkcji bazowych, charakteryzuje się specyficznymi właściwościami:

- dobrą lokalizacją w czasie (przestrzeni), czyli zwartym nośnikiem funkcji,
- ograniczonym pasmem w dziedzinie częstotliwości.

Dobre umiejscowienie i selektywność w dziedzinie czasu powoduje, że falki doskonale nadają się do aproksymacji sygnałów zmiennych w czasie. Inną istotną cechą reprezentacji falkowej jest to, że zawiera ona w sobie informacje o sygnale na różnych poziomach szczegółowości.

Poważnym atutem zastosowania transformacji falkowej WT (ang. *Wavelet Transform*) do analizy sygnałów jest prostota obliczeniowa. Praktyczne wykorzystanie tego mechanizmu sprowadza się do obliczania splotów dwóch wektorów, z których jeden reprezentuje wartości próbek sygnału badanego, a drugi jest kilku- lub kilkunastoelementowym wektorem reprezentującym filtr cyfrowy. W praktycznej realizacji numerycznej dyskretnej transformacji falkowej nie wykorzystuje się falek bezpośrednio, tylko związane z nimi filtry, co pokazano w [1, 8, 11].

4. Dyskretna transformata kosinusowa

Najpopularniejsza definicja dyskretnej transformaty kosinusowej DCT (ang. *Discrete Cosine Transform*) jest następująca:

$$C(u) = \alpha(u) \sum_{x=0}^{N-1} f(x) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right], u = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (4.1)$$

Z kolei odwrotna transformata IDCT (ang. *Inverse DCT*) jest zdefiniowana następująco:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} \alpha(u) C(u) \cos \left[\frac{\pi(2x+1)u}{2N} \right], x = 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad (4.2)$$

$$\alpha(u) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{N}} & \text{dla } u = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} & \text{dla } u \neq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Należy zauważyć, że do obliczania DCT i IDCT używa się tych samych funkcji bazowych. Obliczenia są wykonywane w dziedzinie liczb rzeczywistych i najczęściej używa się do tego szybkich algorytmów DFT.

Oczywiste jest, że:

$$\text{dla } u = 0 \quad C(u = 0) = \sqrt{\frac{1}{N}} \sum_{x=0}^{N-1} f(x). \quad (4.4)$$

Zatem pierwszy współczynnik DCT jest średnią wszystkich próbek $f(x)$. Jest to tzw. współczynnik DC (ang. *DC coefficient*). Pozostałe współczynniki DCT noszą nazwę współczynników AC (ang. *AC coefficients*). Ignorując $f(x)$ i $\alpha(u)$ w równaniu (4.1), dla $u = 0$ otrzymuje się wartość stałą DC, natomiast dla $u = 1, 2, \dots, N - 1$ uzyskiwane są kosinusoidy o stopniowo rosnących częstotliwościach. To tzw. kosinusowe funkcje bazowe (ang. *cosine basis functions*), które są ortogonalne względem siebie.

Iloczyn skalarny dwóch różnych ww. funkcji daje zero, natomiast iloczyn skalarny dwóch tych samych funkcji daje wartość stałą. Ortogonalne funkcje bazowe są niezależne, tzn. żadna z nich nie może być przedstawiona jako kombinacja pozostałych funkcji bazowych. Jeśli ciąg wejściowy ma więcej niż N próbek, może być podzielony na podciągi o długości N i DCT może być zastosowana na każdym z podciągów niezależnie. Ważną właściwością jest to, że wartości funkcji bazowych w czasie obliczeń nie zmieniają się, a zmianie ulegają tylko wartości $f(x)$. Pozwala to na zwiększenie szybkości obliczeń [6, 10].

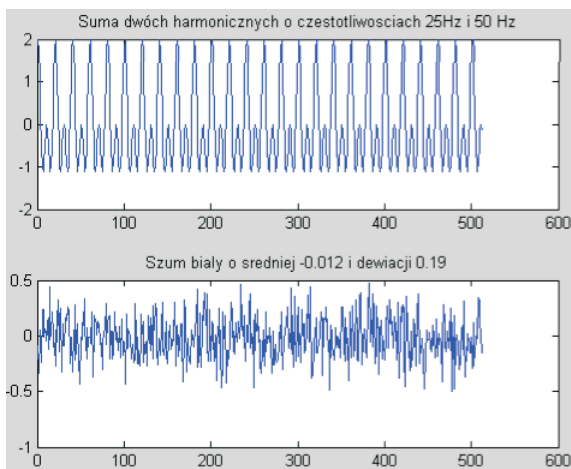
DCT posiada bardzo dobre właściwości widmowe. Sygnał jest przedstawiany za pomocą małej liczby współczynników (najczęściej początkowych) o dużych amplitudach. Współczynniki o względnie małym poziomie (najczęściej reprezentujące szum) mogą zostać usunięte bez utraty istotnych informacji. Pozwala to na efektywne odsumianie i kompresję sygnału [6, 8].

5. Badania

Analizie poddano sygnał będący sumą dwóch sygnałów harmonicznym o częstotliwościach 25 Hz i 50 Hz oraz szumu białego.

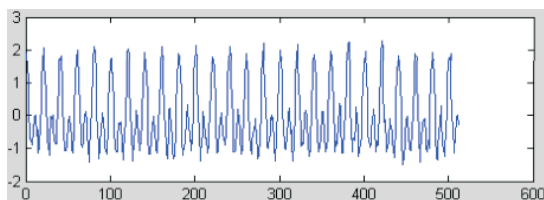
$$x(t) = \cos(2 * \pi * 25 * t) + \cos(2 * \pi * 50 * t) + a\sigma(t), a = \text{const.} \quad (5.1)$$

Suma sygnałów harmoniczných przedstawiona została w górnej części, natomiast szum biały w dolnej części rysunku 5.1.



Rys. 5.1. Suma sygnałów harmoniczných (górną) oraz szum biały dla $a = 0,2$ (dół)
[opracowanie własne]

Na rysunku 5.2 przedstawiono sumę ww. sygnałów. Wpływ szumu widoczny jest gołym okiem, m.in. dzięki zwiększeniu wartości średniej sygnału oraz pojawieniu się zniekształceń.

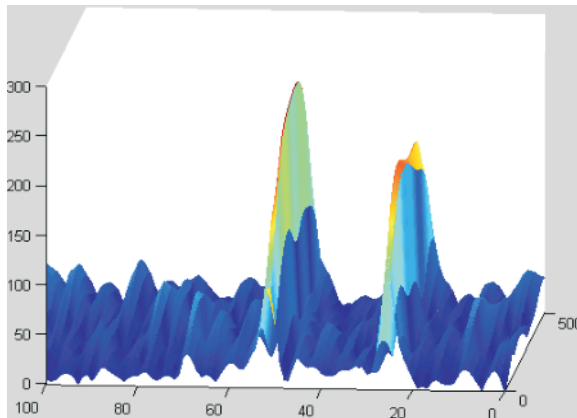


Rys. 5.2. Sygnał źródłowy będący sumą przebiegów z rysunku 5.1 [opracowanie własne]

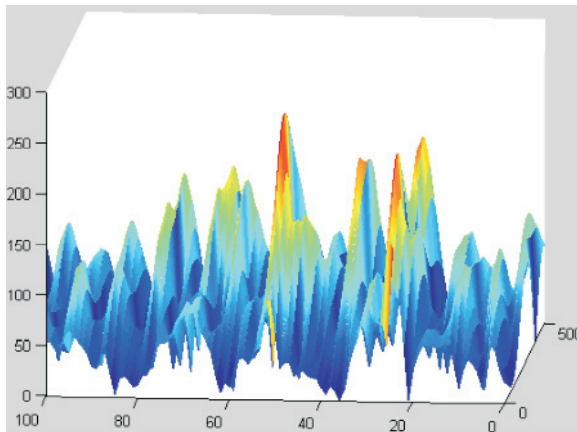
5.1. Zobrazowanie sygnału przy pomocy transformaty STFT

Na rysunku 5.3 pokazano sygnał po zastosowaniu transformaty STFT. Bez problemu można wyróżnić obie składowe harmoniczných (rys. 6.3).

Zbyt duże wartości szumu prowadzą jednak do trudności interpretacyjnych, takich jak na rysunku 5.4.



Rys. 5.3 Sygnał źródłowy poddany STFT dla $a = 1$ [opracowanie własne]



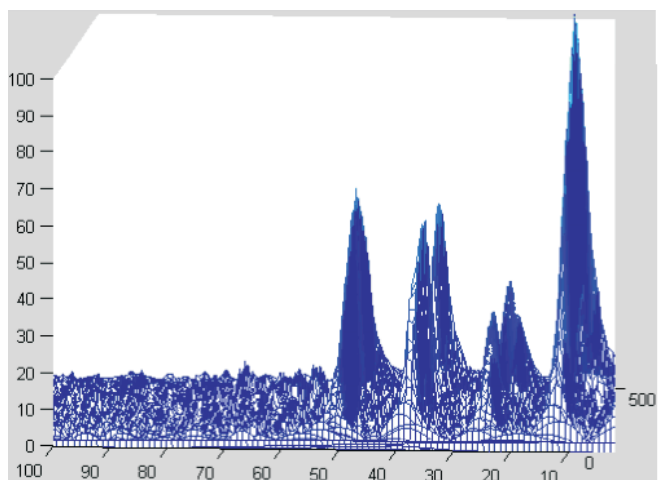
Rys. 5.4 Sygnał źródłowy poddany STFT dla $a = 3$ [opracowanie własne]

Pojawiają się składowe szumu o amplitudzie porównywalnej do amplitudy składowych harmonicznych sygnału i mają one charakter czysto losowy, co praktycznie uniemożliwia ekstrakcję właściwych składowych.

5.2. Zobrazowanie sygnału przy pomocy transformaty Wignera-Ville'a

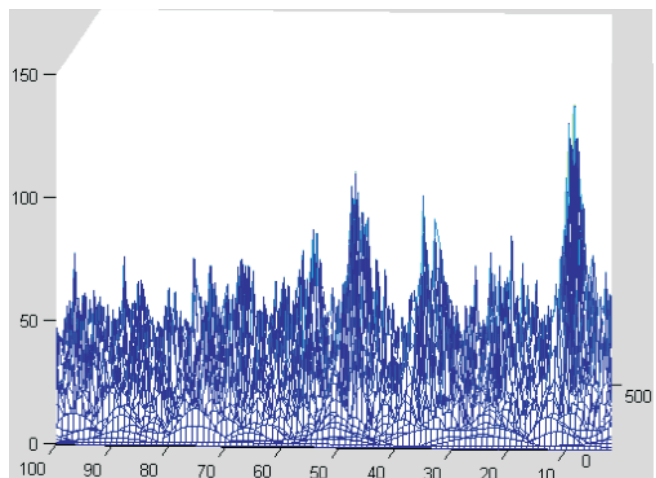
Zastosowanie transformaty Wignera prowadzi do niejednoznacznych wyników, co pokazane zostało na rysunku 5.5.

Wprawdzie występują obydwie składowe o częstotliwościach 25 Hz i 50 Hz, ale dodatkowo pojawiły się prążki o częstotliwościach 15 Hz i 40 Hz. Może to prowadzić do błędnej interpretacji. Aby poprawnie ocenić otrzymane wyniki, należałoby wcześniej znać własności badanego sygnału, co nie zawsze jest możliwe do realizacji.



Rys. 5.5. Transformata Wignera-Ville'a dla $a = 0,2$ [opracowanie własne]

Z kolei zwiększając wartość szumu, otrzymujemy bardzo trudne do interpretacji wyniki, których przykład przedstawiono na rysunku 5.6. Sposoby postępowania w przypadku ww. problemów zostały omówione w [3].



Rys. 5.6. Transformata Wignera-Ville'a dla zwiększonej dewiacji szumu ($a = 1$) [opracowanie własne]

5.3. Zobrazowanie sygnału przy pomocy transformaty falkowej

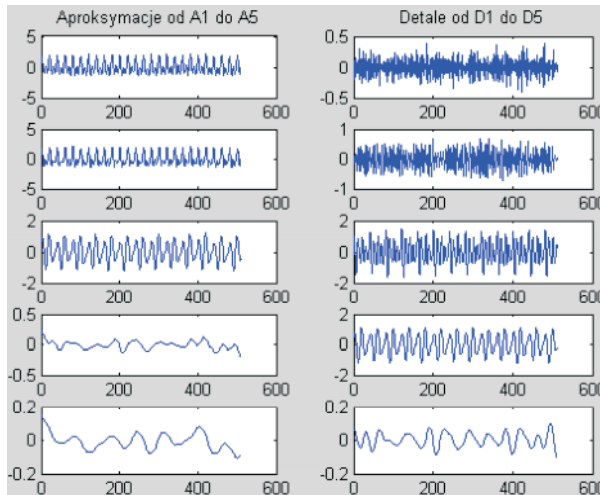
W celu zobrazowania sygnału z wykorzystaniem transformaty falkowej użyto falki db7. Rysunek 5.7 przedstawia sygnał, który został uzyskany w procesie odsumiania (dekompozycja → progowanie → rekonstrukcja) [8]. Można zauważyć,

że transformata falkowa nie jest najlepszym narzędziem do analizy sygnałów harmoniczných, jeżeli uprzednio nie została przeprowadzona dokładna analiza badanego sygnału. Mogą pojawić się problemy z doбором odpowiedniej falki do analizy.



Rys. 5.7. Odszumianie zrealizowane przy pomocy falki db7 dla $a = 0,2$ [opracowanie własne]

Otrzymany wynik znacząco różni się od sygnału wejściowego. Zwiększanie wartości parametru 'a' w (5.1) powoduje jeszcze większe różnice między otrzymanym sygnałem a sygnałem oryginalnym. Na rysunku 5.8 przedstawiono 5-poziomową dekompozycję badanego sygnału przy użyciu falki db7.



Rys. 5.8. Pięciopoziomowa dekompozycja sygnału źródłowego za pomocą falki db7 dla $a = 0,2$ [opracowanie własne]

Sygnał, tym razem z większą dewiacją szumu ($a = 1$), po realizacji standardowego odszumiania przy zastosowaniu transformaty falkowej przedstawiono na rysunku 5.9. Zastosowanie falki db7 w tym konkretnym przypadku nie przyniosło pożądanych rezultatów.



Rys. 5.9. Odszumianie zrealizowane przy pomocy falki db7 dla $a = 1$ [opracowanie własne]

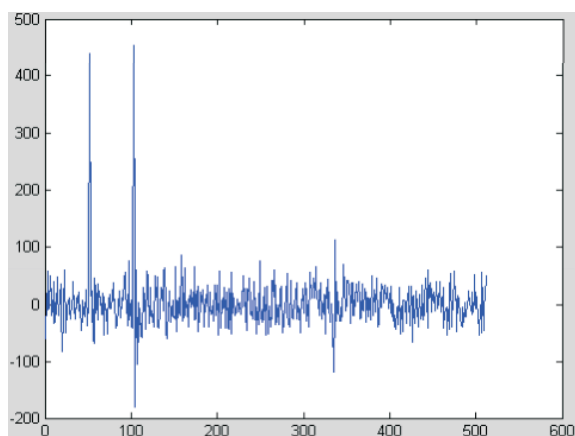
Nie przekreślając całkowicie transformaty falkowej, należy zauważyć, że interesującym rozwiązaniem może być użycie falki o charakterze harmonicznym, np. falki Malvara, która posiada szereg istotnych zalet:

- falki Malvara tworzą bazę ortogonalną,
- współczynniki Malvara oblicza się przy użyciu szybkiego algorytmu DCT_{IV} .

Harmoniczny charakter falek Malvara dobrze adaptuje się do szerokiej grupy sygnałów niestacjonarnych, które często posiadają w swym widmie składowe harmoniczne [9, 11].

5.4. Zobrazowanie sygnału przy pomocy dyskretnej transformaty kosinusowej DCT

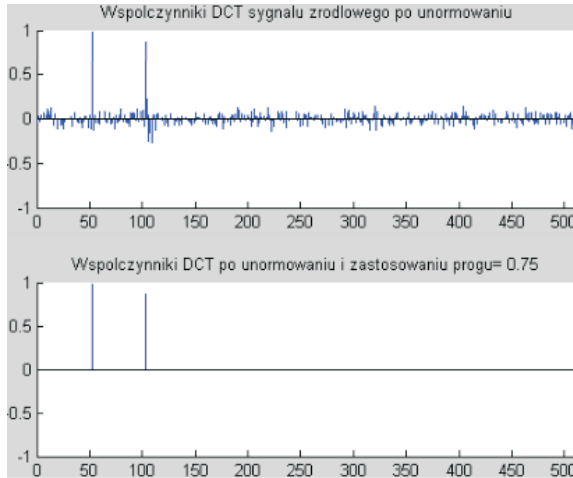
Bardzo ciekawie prezentuje się sytuacja w przypadku dyskretnej transformaty kosinusowej DCT. Na rysunku 5.10 przedstawiono sytuację, w której dla $a = 1$ bardzo łatwo można wyróżnić interesujące składowe harmoniczne. Dobierając odpowiednią wartość progu (poniżej którego wartości składowych sygnału zostaną wyzerowane),



Rys. 5.10. Współczynniki DCT sygnału dla $a = 1$ [opracowanie własne]

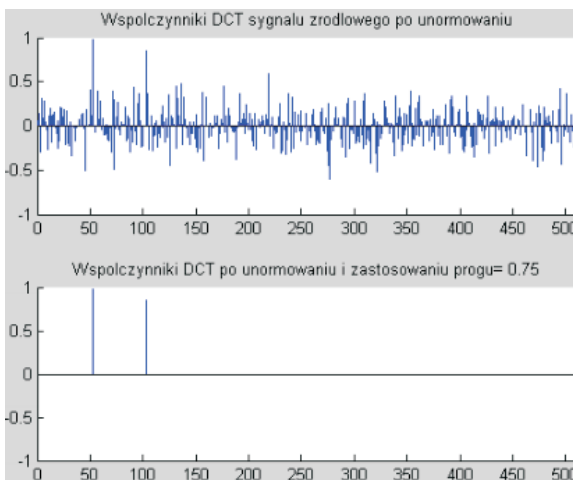
możliwe jest całkowite pozbycie się szumu poprzez usunięcie współczynników o małych amplitudach. Jednak przy rosnącym poziomie szumu mogą pojawić się problemy z doбором progów.

Na rysunku 5.11 przedstawiono współczynniki DCT dla sygnału, w którym współczynnik $a = 1$ po unormowaniu i zastosowaniu progów o wartości 0,75.



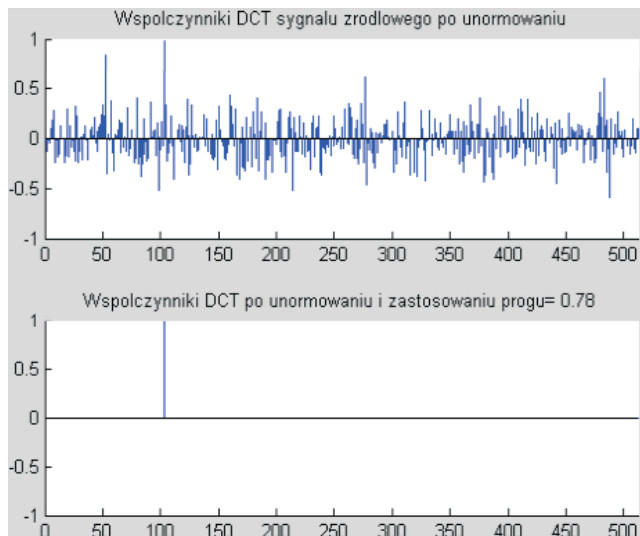
Rys. 5.11. Współczynniki DCT po zastosowaniu normowania i progowania dla $a = 1$ [opracowanie własne]

Na rysunku 5.12 pokazano współczynniki DCT dla większej dewiacji szumu ($a = 3$).

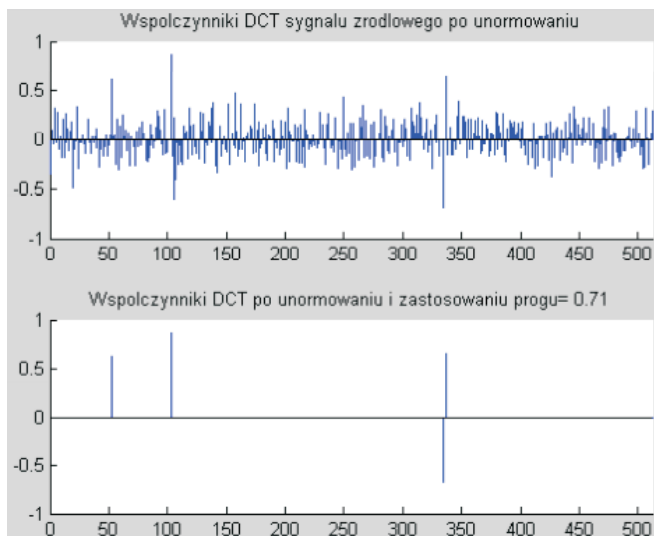


Rys. 5.12. Współczynniki DCT po zastosowaniu normowania i progowania dla $a = 3$ [opracowanie własne]

Aczkolwiek, po unormowaniu współczynników i zastosowaniu progu o wartości 0,78, otrzymano tylko jedną składową, co zostało pokazane na rysunku 5.13.



Rys. 5.13. Współczynniki DCT po zastosowaniu normowania i progowania dla $a = 3$ (druga realizacja) [opracowanie własne]



Rys. 5.14. Współczynniki DCT po zastosowaniu normowania i progowania dla $a = 3$ (trzecia realizacja) [opracowanie własne]

Z kolei zmniejszając nieco wartość progu do 0,71 i nie zmieniając dewiacji szumu, otrzymano współczynniki przedstawione na rysunku 5.14. Powyższe przykłady obrazują fakt, że należy być ostrożnym przy dobieraniu wartości progu.

W zależności od parametrów sygnału, szumu oraz wartości progu odcięcia w zrekonstruowanym sygnale mogą pojawić się dodatkowe składowe (co zostało pokazane na rysunku 5.14) lub też mogą zostać wycięte składowe, które istnieją w analizowanym sygnale (co przedstawiono wcześniej na rysunku 5.13).

Wnioski

Spośród użytych transformat najlepsze wyniki uzyskane zostały przy użyciu transformaty DCT. Przy wyższym poziomie szumu tylko przy użyciu tej transformaty można było otrzymać rzetelne wyniki, co może oznaczać, że inne transformaty nie nadają się zbyt dobrze do tego zadania lub też, jak w przypadku transformaty falkowej, użyto niewłaściwych funkcji bazowych.

Nawet dla transformaty DCT przy zbyt wysokim poziomie zaszumienia pojawiają się problemy interpretacyjne. Jedną z najistotniejszych kwestii w tym przypadku był odpowiedni dobór progu. Wybór może zależeć od poziomu szumu, liczby próbek, pasma częstotliwości badanego sygnału [8]. Problem ten z całą pewnością wymaga jeszcze wielu badań.

Okienkowa transformata Fouriera daje dobre wyniki dla odpowiedniej wartości dewiacji szumu. Dla analizowanych w czasie badań przypadków pozwoliła na uzyskanie minimalnie gorszych wyników od DCT. Jak zostało pokazane, przy odpowiednio dużej wartości stałej 'a' z (6.1) pojawiają się problemy z interpretacją wyników.

Z kolei transformata Wignera-Ville'a pozwala na jakąkolwiek interpretację wyników tylko dla niskich poziomów szumu. Jej zastosowanie w procesie odsumowania sygnałów harmonicznym nie jest rozwiązaniem korzystnym.

Co do transformaty falkowej to użyta w badaniu falka nie spełniła swojej roli. Popularne falki typu dbN doskonale sprawdzają się w procesie odsumowania sygnałów niestacjonarnych, jednak w badanym przypadku nie stanęły na wysokości zadania. Konieczny jest wybór innej falki odpowiadającej swym charakterem analizowanemu sygnałowi.

Praca była realizowana ze środków własnych.

Artykuł wpłynął do redakcji 17.03.2015 r. Zweryfikowaną wersję po recenzji otrzymano 28.05.2015 r.

LITERATURA

- [1] BIAŁASIEWICZ J., *Falki i aproksymacje*, WNT, Warszawa, 2004.
- [2] DAUBECHIES I., *Ten lectures on wavelets*, Rutgers University, 1992.

- [3] GONERA M., OPARA T., *Niejednoznaczności transformacji Wagnera w analizie sygnałów niestacjonarnych*, Prace Przemysłowego Instytutu Elektroniki, nr 149, Warszawa, 2004.
- [4] GONERA M., KICIŃSKI W., *Czasowo-częstotliwościowe metody analizy sygnałów*, Prace Przemysłowego Instytutu Elektroniki, nr 149, Warszawa, 2004.
- [5] HUANG Y., *Nonlinear multiscale methods for estimation, approximation, and representation of signal and images*, PhD Thesis, Purdue University, 2004.
- [6] KHAYAM S.A., *The Discrete Cosine Transform: Theory and Application*, Michigan State University, 2003.
- [7] LYONS R.G., *Wprowadzenie do cyfrowego przetwarzania sygnałów*, WKiŁ, Warszawa, 2003.
- [8] MALLAT S., *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, 2008.
- [9] RAVIER P., AMBLARD P.O., *A transient detector based on Malvar wavelets*, Oceans96, Etas-Unis, September 1996, 914-918.
- [10] WICKERHAUSER M.V., *Adapted wavelet analysis from theory to software*, A.K. Peters Ltd, 1994.
- [11] WOLFRAM S., <http://mathworld.wolfram.com/Wavelet.html>, strona internetowa twórcy programu Mathematica, dostęp — styczeń 2015.

A. ZACNIEWSKI

Comparative analysis of chosen transforms in the context of de-noising harmonic signals

Abstract. In the article, comparison of popular transforms used i.a. in denoising harmonical signals was presented. The division of signals submitted to mathematical analysis was shown and chosen transforms such as Short Time Fourier Transform, Wigner-Ville Distribution, Wavelet Transform and Discrete Cosine Transform were presented. Harmonic signal with white noise added was submitted for research. During research, the parameters of noise were changed to analyze the effects of using particular transform on noised signal. The importance of right choice for transform and its parameters (different for particular kind of transform) was shown. Small changes in parameters or different functions used in transform can lead to considerably different results.

Keywords: denoising of harmonical signals, wavelet transform, discrete cosine transform, DCT

DOI: 10.5604/12345865.1168698