

NAGÓRSKI Roman, STAWARZ Paulina, NAGÓRSKA Magdalena

ROZKŁAD TEMPERATURY W NAWIERZCHNI DROGOWEJ – ZASTOSOWANIE METOD ANALITYCZNYCH

Streszczenie

W artykule przedstawiono rozwiązania analityczne zagadnienia stacjonarnego i niestacjonarnego rozkładu jednowymiarowego oraz dwuwymiarowego temperatury w przekroju nawierzchni drogowej przy różnych warunkach brzegowych (na granicach przekroju), a także - w przypadku stanów nieustalonych - przy określonych warunkach początkowych (w obszarze przekroju). Rozwiązania uzyskano w postaci zamkniętej lub za pomocą szeregów Fouriera, a następnie zilustrowano przykładami w formie wykresów otrzymanych przy wykorzystaniu programu Mathematica®. Oprócz aspektu poznawczego wyników prezentowanych rozwiązań warto podkreślić ich przydatność do weryfikacji rozwiązań otrzymywanych za pomocą metod numerycznych, w tym doboru parametrów tych metod (kalibracji modeli obliczeniowych), a w szczególności w odniesieniu do metody elementów skończonych.

WSTĘP

Zagadnienia termiczne są jednymi z ważniejszych w analizie nawierzchni drogowych. W szczególności zagadnieniem podstawowym w tej problematyce jest rozkład temperatury w nawierzchni – stacjonarny i niestacjonarny – determinujący przepływ ciepła przez nawierzchnię. Do wyznaczenia tego rozkładu powszechnie stosuje się model Fouriera przepływu ciepła. Racjonalnym jest przy tym założenie, choć nie zawsze adekwatne do rzeczywistości fizycznej, iż rozkład temperatury jest przestrzennie jednowymiarowy lub dwuwymiarowy, tzn. temperatura jest funkcją jedynie zmiennej po grubości nawierzchni lub funkcją dwu zmiennych parametryzujących przekrój poprzeczny nawierzchni.

1. ZAŁOŻENIA, RÓWNANIA I DANE LICZBOWE

Równanie niestacjonarnego rozkładu temperatury ma postać [2], [3]:

$$\Delta T - a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} f, \quad a^2 = \frac{c_V}{\lambda}, \quad (1)$$

gdzie

- T – temperatura (funkcja zmiennej czasowej t i zmiennych przestrzennych (x, y, z)); wobec założenia o rozkładzie jedno- lub dwuwymiarowym odpowiednio funkcja z lub (y, z)),
- f – gęstość wewnętrznego źródła ciepła; dalej w przykładach przyjmujemy $f \equiv 0$,
- Δ – operator Laplace'a; w rozpatrywanych przykładach odpowiednio $\Delta = d^2/dz^2$ lub $\Delta = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$,

- λ – współczynnik przewodnictwa cieplnego,
- c_v – ciepło właściwe (objętościowe).

Do równania (1)₁ dołączamy warunek brzegowy na powierzchniach brzegowych nawierzchni – w prezentowanych dalej przykładach na krawędziach przekroju poprzecznego – w jednej z postaci:

$$T = T_b, \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q_b, \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha T = \alpha T_o, \quad (4)$$

w których T_b jest daną funkcją (daną temperaturą) na powierzchni brzegowej, q_b daną gęstością strumienia przepływu (transferu) ciepła przez powierzchnie brzegową, a λ znanym współczynnikiem przepływu ciepła przez tę powierzchnię, zaś T_o jest daną funkcją na powierzchni brzegowej (daną temperaturą otoczenia powierzchni brzegowej), natomiast α współczynnikiem przejmowania / oddawania ciepła przez powierzchnię brzegową.

W zagadnieniach nieustalonych (niestacjonarnych) do równania (1)₁ dołączamy jeszcze warunek początkowy – w prezentowanych dalej przykładach w obszarze przekroju poprzecznego:

$$T = T_p, \quad (5)$$

gdzie T_p jest daną temperaturą początkową (w obliczeniach przyjmujemy w chwili początkowej $t = 0$).

W tabeli poniżej zestawiono wartości współczynników c_v i λ typowych materiałów warstw nawierzchni drogowych

Tab. 0. Przykładowe wartości parametrów c_v i λ typowych materiałów warstw nawierzchni drogowych [1]

l.p.	warstwa - materiał	c_v [kJ/(m ³ ·°K)]	λ [W/(m·°K)]
1	warstwa ściernalna – SMA (kruszywo magmowe)	2107,0	0,71
2	warstwa ściernalna – AC (kruszywo magmowe)	2107,0	0,75
3.	warstwa wiążąca – AC (kruszywo magmowe)	2210,2	0,95
4.	podbudowa asfaltowa – AC (kruszywo węglan.)	2089,8	0,68
5.	podbudowa pomocn. – żużel wielkopiec.	810,0	0,24
6.	podłoże gruntowe - piasek	1680,0	0,58
7.	podłoże gruntowe - pospółka	1900,4	2,50

Ponieważ w prezentowanych dalej przykładach rozwiązań analitycznych zagadnień brzegowych i brzegowo-początkowych zakładamy, że nawierzchnia jest jednorodna współczynnik a^2 wyznaczamy jako wielkość uśrednioną dla układu warstw nawierzchni według wzoru:

$$a^2 = \frac{c_{vz}}{\lambda_z} = \left[\sum_i c_{v_i} (h_i / h) \right] \left[\sum_i \frac{h_i / h}{\lambda_i} \right] = \frac{1}{h^2} \left(\sum_i c_{v_i} h_i \right) \left(\sum_i \frac{h_i}{\lambda_i} \right), \quad (6)$$

gdzie c_{Vz} i λ_z oznaczają zastępcze (uśrednione) charakterystyki termiczne nawierzchni (ciepło właściwe i współczynnik przewodnictwa cieplnego), c_{Vi} i λ_i oznaczają charakterystyki termiczne i -tej warstwy nawierzchni, h_i jest grubością tej warstwy, a h sumaryczną grubością warstw nawierzchni.

Dane liczbowe i wyliczenie wartości parametru a wg wzoru (6) dla przykładowego układu warstw nawierzchni zamieszczono w tabeli 2.

Tab. 2. Charakterystyki termiczne przykładowego układu warstw nawierzchni drogowej – dane i wyniki obliczeń

Warstwa	h [m]	λ [W/(m·°K)]	h/λ	c_V [J/(m ³ ·°K)]	$c_V \cdot h$
Warstwa ściernalna	0,04	0,71	0,056	$2107,0 \cdot 10^3$	84280
Warstwa wiążąca	0,06	0,95	0,063	$2210,2 \cdot 10^3$	132612
Podbudowa asfaltowa	0,12	0,68	0,176	$2089,8 \cdot 10^3$	252840
Podbudowa niezwiązana	0,20	0,24	0,833	$810,0 \cdot 10^3$	162000
Podbudowa pomocnicza	0,15	2,50	0,060	$1900,4 \cdot 10^3$	285060
Podłoże gruntowe	1,00	0,58	1,724	$1680,0 \cdot 10^3$	1680000
$a = 1752$ [\sqrt{s} / m] $\sum h$:	1,57	$\sum h/\lambda$:	2,913	$\sum c_V h$:	2596792

2. PRZYKŁADY ROZKŁADÓW TEMPERATURY W NAWIERZCHNI DROGOWEJ

W tym rozdziale przedstawimy rozwiązania wybranych zagadnień brzegowych i brzegowo-początkowych przedstawiających rozkłady jedno- i dwuwymiarowe, stacjonarne i niestacjonarne temperatury w termicznie jednorodnej nawierzchni drogowej o zastępczych (uśrednionych) charakterystykach przy założeniach i danych liczbowych wymienionych we Wstępie.

2.1. Stacjonarny jednowymiarowy rozkład temperatury w warstwie

Rozwiązanie tego zagadnienia traktujemy jako przykład odniesienia dla kolejnych przykładów rozkładu temperatury w nawierzchni drogowej.

Rozważmy jednorodną nieograniczoną („uśrednioną”) warstwę o grubości h i założmy, że rozkład temperatury jest stacjonarny i jednowymiarowy. Równanie (1) przyjmuje postać:

$$\frac{d^2}{dz^2} T(z) = 0, \quad z \in (0, h). \quad (7)$$

Natomiast warunki brzegowe (2)-(4) przyjmujemy w następujących wariantach:

$$T = T^g \quad \text{dla } z = 0, \quad T = T^d \quad \text{dla } z = h, \quad (8)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = q^g \quad \text{dla } z = 0, \quad T = T^d \quad \text{dla } z = h, \quad (9)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha T = \alpha T^o \quad \text{dla } z = 0, \quad T = T^d \quad \text{dla } z = h. \quad (10)$$

Poszukiwana funkcja $T = T(z)$ wyraża się odpowiednio wzorem:

$$T = T^d \frac{z}{h} + T^g \frac{h-z}{h}, \quad z \in [0, h], \quad (11)$$

$$T = T^d + \frac{q^d}{\lambda} (h-z), \quad z \in [0, h], \quad (12)$$

$$T = T^d + \frac{\alpha T^o}{\lambda + \alpha h} (h-z), \quad z \in [0, h]. \quad (13)$$

2.2. Cyklicznie zmienna temperatura na powierzchni półprzestrzeni

Wyznaczamy jednowymiarowy rozkład temperatury w obszarze półprzestrzeni (np. jednorodnego podłoża gruntowego o uśrednionym współczynniku przewodnictwa cieplnego równym $\lambda = \lambda_p$ i uśrednionym współczynniku a równym odpowiednio $a = a_p$). Zakładamy, że na górnej powierzchni podłoża (S_p^g) temperatura T_p^g zmienia się, zgodnie z cyklem dobowym lub rocznym w przybliżeniu sinusoidalnie z częstością kołową $\omega = \omega_p$, czyli

$$T_p^g = T_p^s + T_p^a \sin(\omega_p t), \quad (14)$$

gdzie $T_p^s = \text{const}$ oznacza temperaturę średnią, a $T_p^a = \text{const}$ – amplitudę wahania temperatury. Można przyjąć, że $T_p^s = 0$, gdyż do końcowej funkcji rozkładu temperatury można dodać T_p^s . Zakładamy też, że w obszarze wewnętrznym podłoża nie ma źródeł ciepła ($f \equiv 0$). Mamy zatem na powierzchni (S_p^g) następujący warunek brzegowy (2) dla temperatury $T = T(z, t)$:

$$T(0, t) = T_p^a \sin(\omega t). \quad (15)$$

Rolę drugiego warunku brzegowego pełni warunek zanikania temperatury w nieskończoności ($T = 0$ dla $z = \infty$).

Równanie (1) jednowymiarowego (jednokierunkowego) przewodnictwa cieplnego w podłożu (w kierunku osi z) ma postać (por.(6.4.11)):

$$\frac{\partial T}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad a^2 = \frac{c_v}{\lambda}, \quad z \in (0, \infty), \quad t > 0. \quad (16)$$

Rozwiązanie zagadnienia (15), (16) opisuje tzw. falę termiczną:

$$T = T_p^a e^{-\frac{z}{\delta}} \sin\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right), \quad (17)$$

gdzie parametr

$$\delta = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\omega}} \quad (18)$$

nosi nazwę głębokości wnikania fali termicznej i oznacza głębokość, na której amplituda fali termicznej maleje e razy, tzn. $T|_{z+\delta} / T|_z = e$ ($e \approx 2,71$).

Głębokość wnikania zależy od częstości kołowej cyklu zmian temperatury. I tak, przykładowo, dla cyklu dobowego ($\omega = 2\pi / (3600 * 24 [1/s])$) i cyklu rocznego ($\omega = 2\pi / (3600 * 24 * 365 [1/s])$) mamy:

$$\frac{\delta_{\text{roczne}}}{\delta_{\text{dobowe}}} \approx 19. \quad (19)$$

Zauważmy też, że dla

$$\Delta z = \pi \delta \quad (20)$$

mamy opóźnienie fazowe równe π . Oznacza to w szczególności, że jeśli na powierzchni górnej podłoża jest temperatura maksymalna, to na głębokości (20) jest wtedy najniższa w cyklu.

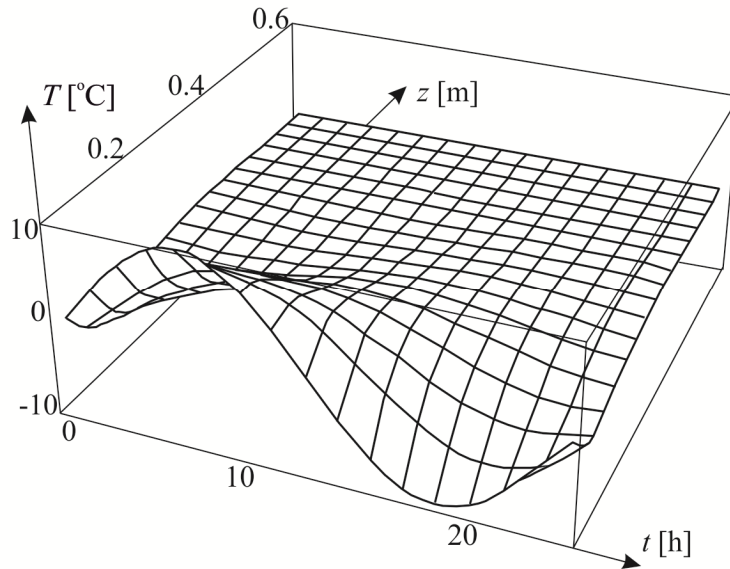
Do poniższych przykładowych ilustracji rozkładu temperatury w podłożu gruntowym przyjmujemy zgodnie z (1)₂ (por. tab. 1):

$$a = \sqrt{\frac{170,2 \cdot 10000}{0,58}} \left[\frac{\text{s}^{1/2}}{\text{m}} \right] = 1713 \left[\frac{\text{s}^{1/2}}{\text{m}} \right], \quad T_p^a = 10 \text{ [}^\circ\text{C]}, \quad (21)$$

a w konsekwencji otrzymujemy (por. (18))

$$\delta_{\text{dobowe}} = 0,097 \text{ [m]}, \quad \delta_{\text{roczne}} = 1,849 \text{ [m]}. \quad (22)$$

Na rys.1 przedstawiono trójwymiarowy wykres funkcji $T = T(z, t)$ przy dobowym cyklu zmiany temperatury.



Rys. 1. Niestacjonarny rozkład temperatury w podłożu gruntowym przy dobowym cyklu zmiany temperatury

2.3. Niestacjonarny jednowymiarowy rozkład temperatury w warstwie

Założmy, że nieograniczona warstwa jednorodna, ma na górnej powierzchni (przy $z = 0$) zmienną w czasie temperaturę T^g przy $t \in [0, \Delta t]$, a na powierzchni dolnej temperaturę $T^d = 0$. W chwili początkowej temperatura warstwy wynosiła $T_p = 0$.

Mamy zatem do rozwiązania następujący zagadnienie brzegowo-początkowe na wyznaczenie niestacjonarnego rozkładu temperatury $T = T(z, t)$ przy $z \in [0, h]$ i $t \in [0, \Delta t]$ na podstawie:

- równania różniczkowego przewodnictwa w obszarze warstwy

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, \Delta t), \quad (23)$$

- warunków brzegowych na górnej i dolnej powierzchni warstwy

$$T = T^g, \quad z = 0, \quad T = 0, \quad z = h, \quad t \in (0, \Delta t), \quad (24)$$

- warunku początkowego przedstawiającego rozkład temperatury w warstwie w chwili początkowej

$$T = 0, \quad t = 0, \quad z \in (0, h). \quad (25)$$

Gdyby przyjąć, że dla $z = h$ jest $T = T^d = \text{const}$, a dla $t = 0$ jest $T = T_p = T^g = \text{const}$, to zastępując $T^g(t)$ przez $T^g(t) - T^d$ oraz dodając T^d do końcowej funkcji $T = T(z, t)$ ($T = T(z, t) + T^d$) otrzymujemy rozwiązanie zmodyfikowanego zagadnienia (23)-(25).

Rozwiązanie zagadnienia (23)-(25) przedstawia się następująco:

$$T(z, t) = T^g(\tau) \zeta + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 2T^g(0) \frac{(-1)^n}{\delta_n} \exp(-\varepsilon_n \tau) + 2 \frac{(-1)^n}{\delta_n} \int_0^{\tau} T^g(\tau') \exp[-\varepsilon_n(\tau - \tau')] d\tau' \right\} \sin \delta_n \zeta, \quad (26)$$

$$\tau = \frac{t}{\Delta t}, \quad \zeta = \frac{h-z}{h}, \quad \kappa = \frac{a^2 h^2}{\Delta t}, \quad \delta_n = n\pi, \quad \varepsilon_n = \delta_n^2 / \kappa,$$

$$z \in [0, h], \quad t \in [0, \Delta t].$$

Niech, tytułem przykładu

$$T^g(\tau) = T_0 \tau. \quad (27)$$

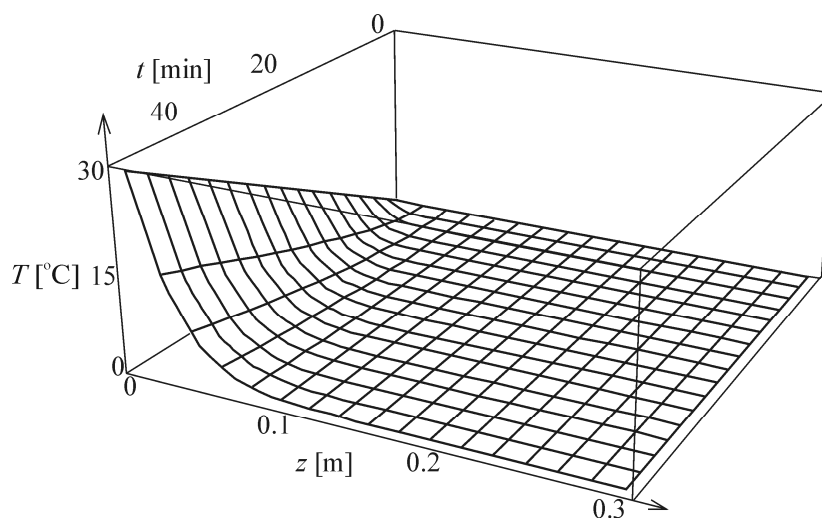
Wtedy na podstawie (26) otrzymujemy:

$$T(z, t) = T_0 \tau \zeta + 2T_0 \kappa \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta_n^3} [1 - \exp(-\varepsilon_n \tau)] \sin \delta_n \zeta. \quad (28)$$

Dane liczbowe przyjmujemy z tab. 2. Zatem przy $\Delta t = 1 \text{ h} = 3600 \text{ [s]}$ jest

$$\kappa = \kappa_z = 2102 \text{ [1]}. \quad (29)$$

Na rys. 2 przedstawiono wykres funkcji $T = T(z, t)$ (przykładowo przy $T_0 = 30^\circ\text{C}$)



Rys. 2. Niestacjonarny rozkład temperatury w warstwie przy jednostajnym wzroście temperatury na górnej powierzchni od 0 do T_0

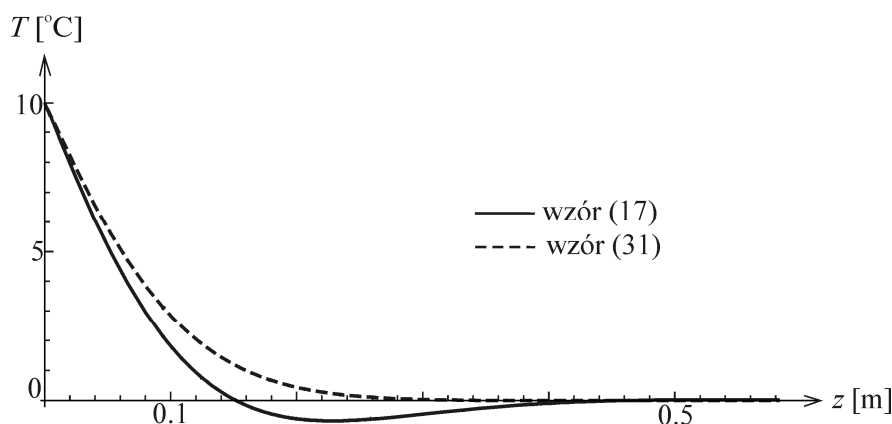
W interesującym przypadku, gdy (tak jak w w p. 2.2 przy $\omega = 2\pi / \Delta t$ i $\Delta t = 24 \text{ h} = 24 \cdot 3600 \text{ s}$)

$$T^s(\tau) = T_0 \sin(2\pi\tau), \quad (30)$$

po wykonaniu całkowania w (26) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} T(z, t) = & T_0 \zeta \sin(2\pi\tau) - 2T_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta_n} \frac{2\pi \varepsilon_n}{4\pi^2 + \varepsilon_n^2} \exp(-\varepsilon_n \tau) \sin \delta_n \zeta + \\ & + 4\pi T_0 \cos(2\pi\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta_n} \frac{\varepsilon_n}{4\pi^2 + \varepsilon_n^2} \sin \delta_n \zeta + \\ & + 4\pi T_0 \sin(2\pi\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\delta_n} \frac{2\pi}{4\pi^2 + \varepsilon_n^2} \sin \delta_n \zeta. \end{aligned} \quad (31)$$

Na rys. 3 przedstawiono porównanie wartości wyrażenia (31) z wyrażeniem (17) z p. 2.2 przy $T_p^a = T_0 = 10^\circ\text{C}$ i dla grubości warstwy h w wyrażeniu (31) równej $6\delta_{\text{dobowe}}$ obliczonej ze wzoru (18), tj. dla $h = 0,582 \text{ m}$ (zgodnie z (22)₁), by T określona z wyrażenia (17) dla $z = h$ była praktycznie równa zero ($\exp(-h/\delta) = \exp(-6) \approx 0$). Przyjęto a jak dla warstwy podłoża gruntowego, czyli $a = 1713 \text{ [s}^{1/2}/\text{m]}$ i w efekcie (wg (26)₄) jest $\kappa = 11,50$.



Rys. 3. Porównanie rozkładu temperatury $T(z, t)$ w podłożu wg wzorów (17) i (31) dla $t = \Delta t/4 = 6 \text{ h}$

2.4. Stacjonarny dwuwymiarowy rozkład temperatury w przekroju prostokątnym

Wyznaczamy stacjonarny dwuwymiarowy rozkład temperatury w obszarze prostokątnym przekroju nawierzchni przy założeniu, że dana jest temperatura na brzegu tego obszaru. Mamy zatem do rozwiązania następujące zagadnienie brzegowe, z warunkami brzegowymi Dirichleta (por. (1) i (2) i rys. 4):

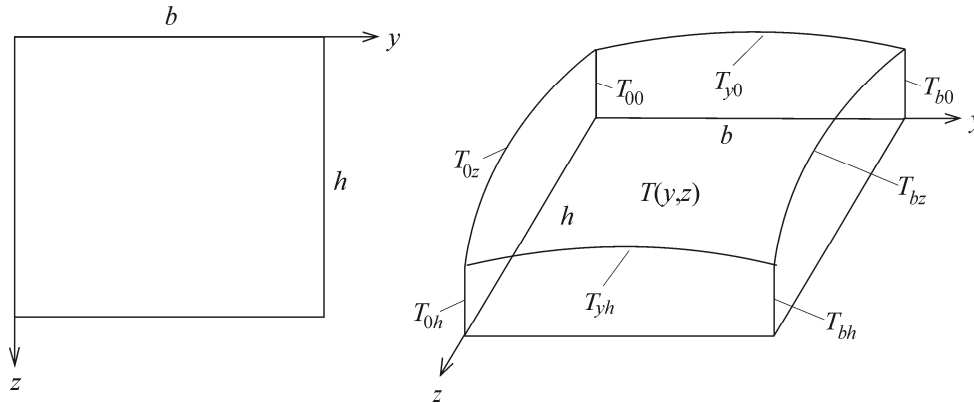
$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, h), \quad (32)$$

$$\begin{aligned} T(y, 0) = T_{y0}(y), \quad T(y, h) = T_{yh}(y), \quad y \in [0, b], \\ T(0, z) = T_{0z}(z), \quad T(b, z) = T_{bz}(z), \quad z \in [0, h], \end{aligned} \quad (33)$$

gdzie $T = T(y, z)$ jest poszukiwaną funkcją temperatury, a $T_{y0} = T_{y0}(y)$, ..., $T_{bz} = T_{bz}(z)$ są

danymi funkcjami, spełniającymi warunki zgodności wzdłuż boków prostokąta $\mathcal{P} = [0, b] \times [0, h]$ (rys.4)

$$\begin{aligned} T_{y0}(0) = T_{0z}(0) &\stackrel{\text{ozn}}{=} T_{00}, & T_{y0}(b) = T_{bz}(0) &\stackrel{\text{ozn}}{=} T_{b0}, \\ T_{yh}(0) = T_{0z}(h) &\stackrel{\text{ozn}}{=} T_{0h}, & T_{yh}(b) = T_{bz}(h) &\stackrel{\text{ozn}}{=} T_{bh}. \end{aligned} \quad (34)$$



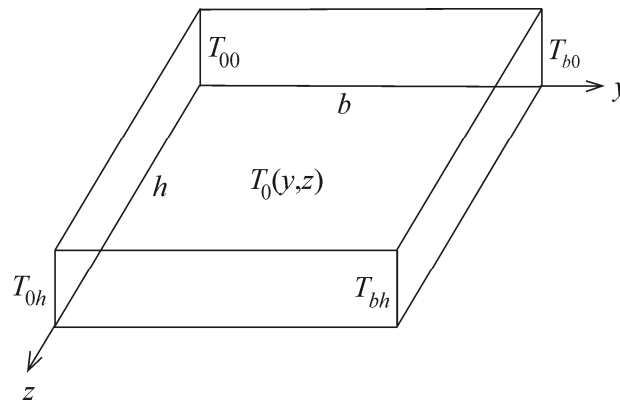
Rys. 4. Rozkład temperatury na brzegu prostokątnego przekroju nawierzchni

Funkcję $T = T(y, z)$ przedstawiamy w postaci

$$T(y, z) = T_0(y, z) + T_1(y, z) + T_2(y, z). \quad (35)$$

Wyznaczamy kolejne składniki tej funkcji (rys. 5):

$$T_0(y, z) = T_{00} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \left(1 - \frac{z}{h}\right) + T_{b0} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{z}{h}\right) + T_{0h} \left(1 - \frac{y}{b}\right) \frac{z}{h} + T_{bh} \frac{y}{b} \frac{z}{h}; \quad (36)$$



Rys. 5. Widok funkcji $T_0 = T_0(y, z)$

$$T_1(y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(z) \sin \alpha_n y, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{b}, \quad (37)$$

gdzie

$$\begin{aligned} T_n^1(z) = T_{n0}^1 &\frac{\text{sh } \alpha_n h \text{ch } \alpha_n z - \text{ch } \alpha_n h \text{sh } \alpha_n z}{\text{sh } \alpha_n h} + T_{nh}^1 \frac{\text{sh } \alpha_n z}{\text{sh } \alpha_n h} + \\ &-\frac{2}{b\alpha_n} [T_{00} - (-1)^n T_{b0}] \frac{\text{sh } \alpha_n h \text{ch } \alpha_n z - \text{ch } \alpha_n h \text{sh } \alpha_n z}{\text{sh } \alpha_n h} - \frac{2}{b\alpha_n} [T_{0h} - (-1)^n T_{bh}] \frac{\text{sh } \alpha_n z}{\text{sh } \alpha_n h}, \end{aligned} \quad (38)$$

przy czym

$$T_{n0}^1 = \frac{2}{b} \int_0^b T_{y0}(y) \sin \alpha_n y dy, \quad T_{nh}^1 = \frac{2}{b} \int_0^b T_{yh}(y) \sin \alpha_n y dy, \quad (39)$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad z \in [0, h];$$

$$T_2(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m^2(y) \sin \beta_m z, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{h}, \quad (40)$$

gdzie

$$T_m^2(y) = T_{m0}^2 \frac{\text{sh } \beta_m b \text{ch } \beta_m y - \text{ch } \beta_m b \text{sh } \beta_m y}{\text{sh } \beta_m b} + T_{mb}^2 \frac{\text{sh } \beta_m y}{\text{sh } \beta_m b} +$$

$$- \frac{2}{h\beta_m} [T_{00} - (-1)^m T_{0h}] \frac{\text{sh } \beta_m b \text{ch } \beta_m y - \text{ch } \beta_m b \text{sh } \beta_m y}{\text{sh } \beta_m b} - \frac{2}{h\beta_m} [T_{b0} - (-1)^m T_{bh}] \frac{\text{sh } \beta_m y}{\text{sh } \beta_m b}, \quad (41)$$

przy czym

$$T_{m0}^2 = \frac{2}{h} \int_0^h T_{0z}(z) \sin \beta_m z dz, \quad T_{mb}^2 = \frac{2}{h} \int_0^h T_{bz}(z) \sin \beta_m z dz, \quad (42)$$

$$m = 1, 2, \dots, \quad y \in [0, b].$$

W przypadku, gdy (por. (33))

$$T(y, 0) = T^g + \tilde{T}^g(y), \quad T(y, h) = T^d + \tilde{T}^d(y), \quad y \in [0, b], \quad (43)$$

przy

$$T^g = \text{const}, \quad T^d = \text{const}, \quad \tilde{T}^g(0) = \tilde{T}^g(b) = 0, \quad \tilde{T}^d(0) = \tilde{T}^d(b) = 0 \quad (44)$$

oraz (jak w p. 2.1)

$$T(0, z) = T(b, z) = T^d \frac{z}{h} + T^g \frac{h-z}{h}, \quad z \in [0, h], \quad (45)$$

to

$$T(y, z) = T^d \frac{z}{h} + T^g \frac{h-z}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} T_n^1(z) \sin \alpha_n y, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{b}, \quad (46)$$

$$T_n^1(z) = \tilde{T}_{n0}^1 \frac{\text{sh } \alpha_n h \text{ch } \alpha_n z - \text{ch } \alpha_n h \text{sh } \alpha_n z}{\text{sh } \alpha_n h} + \tilde{T}_{nh}^1 \frac{\text{sh } \alpha_n z}{\text{sh } \alpha_n h},$$

$$\tilde{T}_{n0}^1 = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{T}^g(y) \sin \alpha_n y dy, \quad \tilde{T}_{nh}^1 = \frac{2}{b} \int_0^b \tilde{T}^d(y) \sin \alpha_n y dy.$$

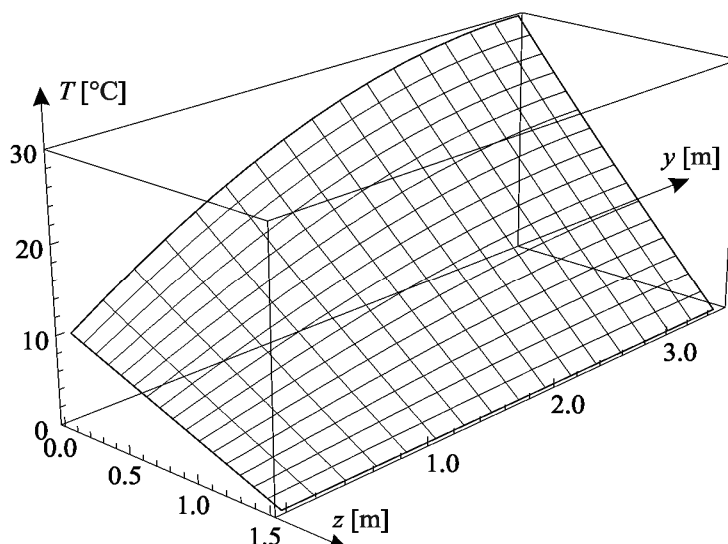
W szczególności, jeśli

$$\tilde{T}^g(y) = 4\hat{T} \frac{y}{b} \left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad \tilde{T}^d(y) = 0, \quad y \in [0, b], \quad (47)$$

to

$$\tilde{T}_{n0}^1 = \frac{16\hat{T}}{\pi^3} \frac{1 - (-1)^n}{n^3}, \quad \tilde{T}_{nh}^1 = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (48)$$

Na rys. 6 przedstawiono rozkład temperatury $T(y, z)$ dla $h = 1,50$ m, $b = 7,0$ m, $T^g = 10^\circ\text{C}$, $T^d = 0^\circ\text{C}$, $\hat{T} = 20^\circ\text{C}$ przy $z \in [0, h]$ oraz $y \in [0, b/2]$ (z uwagi na symetrię tego rozkładu względem płaszczyzny $y = b/2$).



Rys. 6. Rozkład temperatury w przekroju nawierzchni wg wzorów (45)-(48)

2.5. Niestacjonarny dwuwymiarowy rozkład temperatury w przekroju prostokątnym

Wyznaczamy niestacjonarny dwuwymiarowy rozkład temperatury w obszarze prostokątnym przekroju nawierzchni przy założeniu, że dana jest temperatura w tym obszarze w chwili początkowej oraz niezmienna w czasie temperatura na brzegu tego obszaru. Mamy zatem do rozwiązania zagadnienie brzegowo-początkowe, na które składa się równanie różniczkowe (por. (1)):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, h), \quad t \in (0, \infty), \quad (49)$$

warunek początkowy postaci:

$$T(y, z, 0) = T_p(y, z), \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, h), \quad (50)$$

gdzie $T_p = T_p(y, z)$ przedstawia rozkład początkowy temperatury początkowej w przekroju nawierzchni, oraz stacjonarne warunki brzegowe pierwszego rodzaju (rys.(4)):

$$\begin{aligned} T(y, 0, t) = T_{y0}(y), \quad T(y, h, t) = T_{yh}(y), \quad y \in [0, b], \quad t \in (0, \infty), \\ T(0, z, t) = T_{0z}(z), \quad T(b, z, t) = T_{bz}(z), \quad z \in [0, h], \quad t \in (0, \infty), \end{aligned} \quad (51)$$

gdzie funkcje po prawych stronach powyższych równości określają daną temperaturę wzdłuż boków prostokąta $\mathcal{P} = [0, b] \times [0, h]$, spełniającą warunki zgodności (34) w wierzchołkach tego prostokąta.

Funkcję $T = T(y, z, t)$ można przedstawić w postaci:

$$T(y, z, t) = T_0(y, z) + T_1(y, z) + T_2(y, z) + T_3(y, z, t), \quad (52)$$

gdzie składniki $T_0(y, z)$, $T_1(y, z)$, $T_2(y, z)$ wyrażają się odpowiednio wzorami (36)-(42), natomiast

$$T_3(y, z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} T_{nm}^3(0) \exp\left[-\frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2}{a^2} t\right] \sin \alpha_n y \sin \beta_m z, \quad \alpha_n = \frac{n\pi}{b}, \quad \beta_m = \frac{m\pi}{h}, \quad (53)$$

przy czym

$$T_{kl}^3(0) = T_{kl}^p - \frac{4}{bh\alpha_k\beta_l} \left[T_{00} - (-1)^k T_{b0} - (-1)^l T_{0h} + (-1)^{k+l} T_{bh} \right] + \quad (54)$$

$$- \frac{2\beta_l}{h(\alpha_k^2 + \beta_l^2)} \left[T_{k0}^1 - (-1)^l T_{kh}^1 - \frac{2}{b\alpha_k} (T_{00} - (-1)^k T_{b0}) + \frac{2}{b\alpha_k} (-1)^l (T_{0h} - (-1)^k T_{bh}) \right] +$$

$$- \frac{2\alpha_k}{b(\alpha_k^2 + \beta_l^2)} \left[T_{l0}^2 - (-1)^k T_{lb}^2 - \frac{2}{h\beta_l} (T_{00} - (-1)^l T_{0h}) + \frac{2}{h\beta_l} (-1)^k (T_{b0} - (-1)^l T_{bh}) \right],$$

zaś

$$T_{kl}^p = \frac{4}{bh} \int_0^b \int_0^h T_p(y, z) \sin \alpha_k y \sin \beta_l z dy dz, \quad (55)$$

$$T_{k0}^1 = \frac{2}{b} \int_0^b T_{y0}(y) \sin \alpha_k y dy, \quad T_{kh}^1 = \frac{2}{b} \int_0^b T_{yh}(y) \sin \alpha_k y dy,$$

$$T_{l0}^2 = \frac{2}{h} \int_0^h T_{0z}(z) \sin \beta_l z dz, \quad T_{lb}^2 = \frac{2}{h} \int_0^h T_{bz}(z) \sin \beta_l z dz,$$

$$T_{00} = T_{y0}(0) = T_{0z}(0), \quad T_{b0} = T_{y0}(b) = T_{bz}(0),$$

$$T_{0h} = T_{yh}(0) = T_{0z}(h), \quad T_{bh} = T_{yh}(b) = T_{bz}(h).$$

Niech, tytułem ilustracji, na powierzchni górnej warstwy nawierzchni ($z = 0$) wystąpi nagle stała temperatura T^g , a na powierzchni dolnej tej warstwy ($z = h$) niech będzie stała temperatura, np. zerowa ($T^d = 0$). Załóżmy, że na powierzchniach bocznych temperatura ma rozkład liniowo zmienny od T^g do $T^d = 0$, czyli warunki brzegowe (51) mają postać:

$$T(y, 0, t) = T^g, \quad T(y, h, t) = 0, \quad y \in [0, b], \quad t \in (0, \infty), \quad (56)$$

$$T(0, z, t) = T(b, z, t) = T^g (1 - z/h), \quad y \in [0, b], \quad t \in (0, \infty),$$

przy $T(y, 0, 0) = T(y, h, 0) = 0$ dla $y \in [0, b]$ i $T(0, z, 0) = T(b, z, 0) = 0$ dla $z \in [0, h]$. Załóżmy wobec tego, że $T_p \equiv 0$, czyli zerowy warunek początkowy:

$$T(y, z, t) = 0, \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, h). \quad (57)$$

Zatem ostatecznie jest:

$$T(y, z, t) = T^g \left(1 - \frac{z}{h} \right) - \frac{4T^g}{bh} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\alpha_n \beta_m} \exp \left(- \frac{\alpha_n^2 + \beta_m^2}{a^2} t \right) \sin \alpha_n y \sin \beta_m z = \quad (58)$$

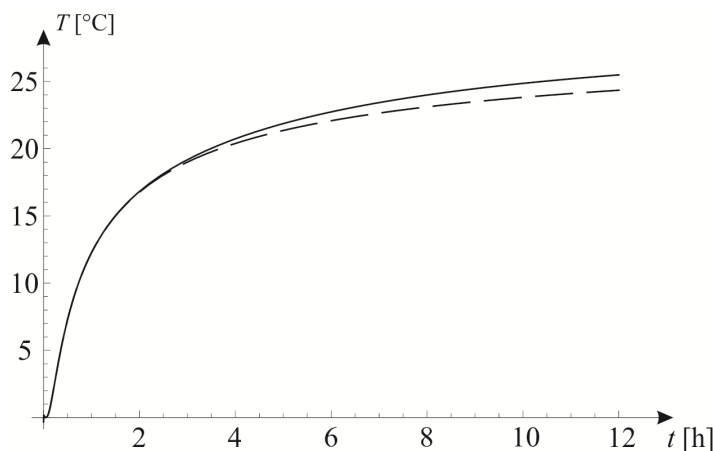
$$= T^g \left(1 - \frac{z}{h} \right) - \frac{4T^g}{bh} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\alpha_n} \exp \left(- \frac{\alpha_n^2}{a^2} t \right) \sin \alpha_n y \right] \left[\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m} \exp \left(- \frac{\beta_m^2}{a^2} t \right) \sin \beta_m z \right].$$

Porównajmy to rozwiązanie zagadnienia niestacjonarnego rozkładu dwuwymiarowego temperatury z rozwiązaniem analogicznego zagadnienia niestacjonarnego rozkładu jednowymiarowego w kierunku pionowym o identycznych parametrach materiałowych (uśredniona stała a) i o grubości (wysokości) h nawierzchni w przypadku, gdy temperatura początkowa jest zerowa ($T_p = 0$), na dolnej powierzchni ($z = h$) jest utrzymywana temperatura $T^d = 0$, a na górnej powierzchni pojawia się nagle (w chwili $t = 0^+$) temperatura T^g . Na podstawie wyników z p. 2.3 mamy (zgodnie z (26)):

$$T(z, t) = T^g \left(1 - \frac{z}{h} \right) - \frac{2T^g}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\beta_m} \exp \left(- \frac{\beta_m^2}{a^2} t \right) \sin \beta_m z. \quad (59)$$

Tytułem ilustracji, do obliczeń przyjęto wartość współczynnika a i grubości h dla układu warstw z tab. 2: $a = 1752\sqrt{s}/m$, $h = 1,57m$. Ponadto założono $b = 7,0m$ i $T^s = 30^\circ C$.

Na rys. 7 przedstawiono wykres funkcji $T = T(y, z, t)$ wg wzoru (58) dla $b = 0,2 m$ i dla $z = 0,04 m$ oraz wykres $T = T(z, t)$ wg wzoru (59) również dla $z = 0,04 m$ przy $t \in [0, 12 h]$.



Rys. 7. Wykres temperatury w przekroju nawierzchni wg wzorów (58) (linia ciągła) i (59) (linia przerywana) przy $b = 0,2 m$ oraz $z = 0,04 m$

BIBLIOGRAFIA

1. Górszczyk J., Grzybowska W.: *Analizy termiczne asfaltowej nawierzchni drogowej z wykorzystaniem MES*. Drogi Mosty, Nr 4, 2011, 7-30
2. Janczarek M., Skalski P., Suchorab Z.: *Przewodzenie ciepła przez przegrodę w stanach ustalonych i nieustalonych*. Postępy Nauki i Techniki, Nr 1, 2007, 13-16
3. Wiśniewski S.: *Wymiana ciepła*. WNT, Warszawa 2000

DISTRIBUTION OF TEMPERATURE IN THE ROAD PAVEMENT - APPLICATION OF ANALYTICAL METHODS

Abstract

The article presents analytical solutions for stationary and non-stationary problems of one-dimensional and two-dimensional distribution of the temperature in the cross-section of road pavement under various boundary conditions and - in the case of steady states – with different initial conditions (in the cross section). The solutions were obtained in closed form or by means of Fourier series, and exemplified in the form of graphs obtained using the Mathematica program. In addition to the cognitive aspect of the received results the presented solutions can emphasize their utility to verify the solutions obtained by means of numerical methods, including the selection of the parameters of these methods (computational model calibration), in particular with respect to the Finite Element Method.

Autorzy:

prof. dr hab. inż. **Roman Nagórski**, inż. **Paulina Stawarz**, mgr inż. **Magdalena Nagórska** – Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej, Instytut Dróg i Mostów