



# Wyznaczanie częstości drgań własnych łuków z wykorzystaniem sztucznych sieci neuronowych

Mgr inż. Mateusz Kaczmarek, Politechnika Wroclawska

## 1. Wprowadzenie

Analiza zagadnienia własnego, czyli częstości i postaci drgań własnych, prętów zakrzywionych stanowi tematykę interesującą wielu badaczy. Zagadnienie drgań łuków jest istotnym problemem z uwagi na zastosowanie tych układów w budownictwie i mechanice.

## 2. Wyznaczanie częstości drgań własnych łuków

W ciągu ostatnich lat powstało wiele prac podejmujących ten temat. Zagadnienie drgań swobodnych łuków było analizowane m.in. w pracach Chidamparam i Leiss [1] oraz Lee i in. [2]. W pracy [1] przedstawiono analityczne rozwiązanie zagadnienia z uwzględnieniem i pominięciem odkształcalności osiowej. W publikacji [2] wykorzystano metodę szeregów potęgowych do uzyskania fundamentalnego rozwiązania układu równań różniczkowych. Problem zagadnienia własnego dla łuków niepryzmatycznych rozwiązali P. Ruta i M. Meissner [3], wykorzystując w tym celu szeregi Czebyszewa. Kawakami i in. [4] do analizy zagadnienia własnego zastosowali dyskretną funkcję Greena.

Analiza literatury [5] potwierdza, że zagadnienie własne łuków może być rozwiązywane metodami analitycznymi. Wymaga to jednak, rozwiązania równania różniczkowego 6. rzędu, opisującego drgania elementu, które w przypadku łuków o stałym przekroju ma postać:

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \beta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} + \rho A \frac{r^4}{EI} \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial \beta^2} - \ddot{w} \right) = 0 \quad (1)$$

gdzie:

- $w$  – przemieszczenie w kierunku normalnym do osi łuku,  $\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ ,
- $\beta$  – kąt nachylenia przekroju poprzecznego,
- $r$  – promień krzywizny łuku kołowego,
- $\rho$  – gęstość materiału,
- $A$  – pole przekroju poprzecznego,
- $E$  – moduł Younga,
- $I$  – moment bezwładności.

Rozwiązanie równania (1) można jednak uzyskać tylko w formie przybliżonej (zagadnienie nie ma ścisłego rozwiązania). Z tego względu w wielu pracach do analizy drgań łuków stosuje się metodę elementów skończonych, np. w pracach Krishnana i in. [6], Yanga i in. [7].

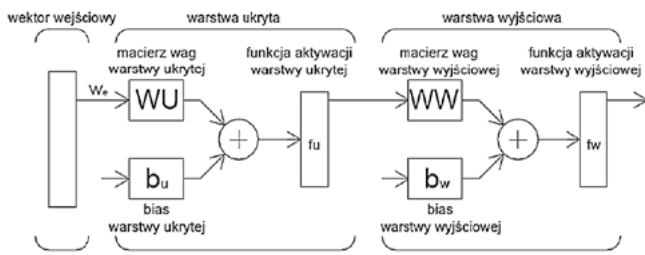
Niniejsza praca przedstawia inne podejście do tej tematyki. Przedstawione w pracy alternatywne narzędzie do wyznaczenia częstości drgań własnych łuków stanowi Sztuczne Sieci Neuronowe (SSN). Celem niniejszej pracy jest przedstawienie SSN jako narzędzia do modelowania, które może być odpowiednim instrumentem do opracowania systemu przewidywania wartości częstości drgań własnych w oparciu o uzyskany wcześniej zestaw danych uczących.

## 3. Sztuczne sieci neuronowe

Sztuczne sieci neuronowe to powszechnie stosowane narzędzia do analiz. Do zastosowań sieci należą m.in.: interpolacja, predykcja, optymalizacja czy grupowanie. W literaturze można odnaleźć przykłady zastosowań SSN do rozwiązań problemów inżynierskich, m.in. analiz wyników badań nieniszczących [8], w zagadnieniach geotechniki [9] itd.

W zależności od złożoności rozwiązywanego problemu neurony tworzące sztuczną sieć neuronową pogrupowane są w różną liczbę warstw. Działanie sztucznego neuronu polega na przekazie elementu wejściowego przez więzy o odpowiednich wagach, blok sumacyjny oraz blok aktywacji, co w efekcie prowadzi do jego modyfikacji w wektor wyjściowy. Najczęściej wykorzystywaną architekturą sieci są sieci jednokierunkowe wielowarstwowe (sieci MLP – *Multi-Layered Perception*). Podstawą działania sieci jest algorytm wstecznej propagacji błędów. Sieci te są w stanie przybliżyć dowolnie złożone i skomplikowane odwzorowania. Strukturę takich sieci przedstawia rysunek 1.

Sieci neuronowe podlegają procesowi uczenia, który dopasowuje wagi wejść poszczególnych połączeń oraz parametry zadeklarowanych funkcji aktywacji każdego neuronu za pomocą wybranego algorytmu (np. wstecznej propagacji błędów).



**Rys. 1.** Schemat struktury jednokierunkowej wielowarstwowej sieci neuronowej

Do oceny skuteczności działania sieci wykorzystuje się różne miary. Najpopularniejszą jest *MSE* – błąd średniokwadratowy (2) bądź *RMSE* – pierwiastek z błędu średniokwadratowego (3). Błąd jest obliczany równoległe dla uczenia i testowania danych podczas procesu uczenia sieci neuronowej.

$$MSE(P) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (z_i - y_i)^2 \quad (2)$$

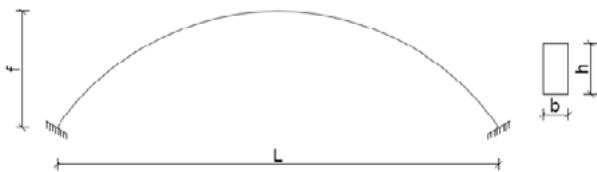
$$RMSE(P) = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (z_i - y_i)^2} \quad (3)$$

gdzie:

- $y_i$  – obliczony wektor wyjściowy sieci,
- $z_i$  – docelowy wektor wyjściowy, uzyskany z badań doświadczalnych,
- $P$  – liczba elementów w bazie danych.

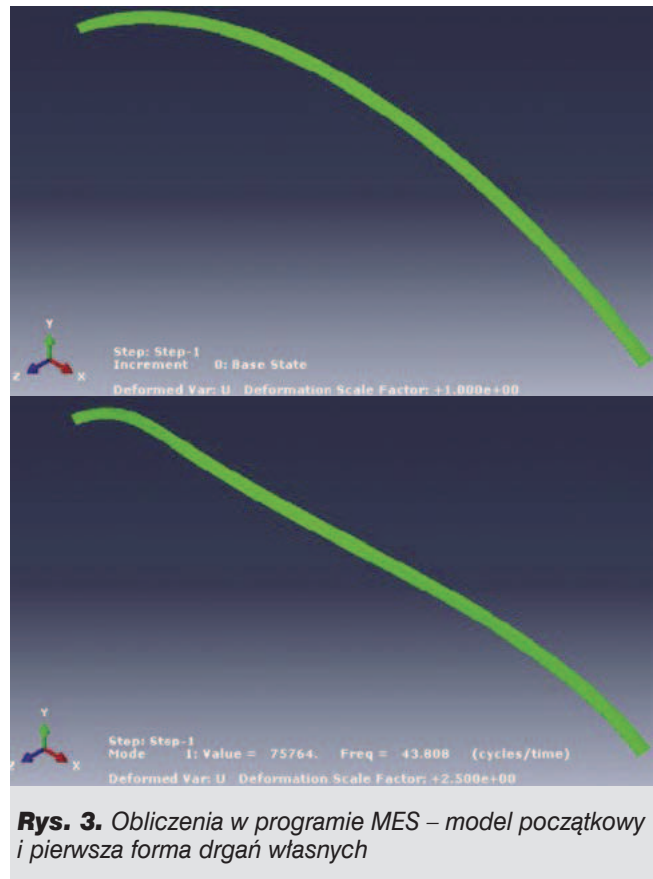
#### 4. Baza danych do uczenia i testowania sieci neuronowej

W celu uzyskania bazy danych wykorzystanej później do uczenia i testowania sieci neuronowej przeprowadzono obliczenia częstości drgań własnych łuków kołowych z wykorzystaniem programu MES (Abaqus) [10]. Do analiz przyjęto pręt zakrzywiony, będący wycinkiem łuku kołowego, o prostokątnym przekroju poprzecznym, sztywno utwierdzony na podporach. Jako materiał przyjęto stal konstrukcyjną o parametrach: gęstość  $\rho = 7860 \text{ kg}$ , moduł Younga  $E = 200 \text{ GPa}$ , współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$ .



**Rys. 2.** Schemat łuku przyjętego do analiz

Obliczenia z wykorzystaniem MES przeprowadzono dla łuków o rozpiętości  $5 \text{ m} \leq L \leq 25 \text{ m}$ , przyjmując skok wartości  $5 \text{ m}$ . Strzałkę łuku przyjmowano z przedziału  $4 \text{ m} \leq f \leq 12 \text{ m}$ , gdzie skok wartości wynosił  $2 \text{ m}$ . Szerokość prostokątnego przekroju poprzecznego przyjmowano z zakresu  $0,1 \text{ m} \leq b \leq 0,5 \text{ m}$ , przyjmując skok wartości  $0,1 \text{ m}$ . Natomiast wysokość przekroju przyjmowano z przedziału  $0,2 \text{ m} \leq h \leq 1,0 \text{ m}$ . Na podstawie wielu obliczeń za pomocą programu MES – Abaqus – wyznaczono 5 pierwszych częstości drgań własnych dla danych wejściowych z podanych zakresów.



**Rys. 3.** Obliczenia w programie MES – model początkowy i pierwsza forma drgań własnych

#### 5. Aplikacja sztucznych sieci neuronowych

W wyniku obliczeń uzyskano zbiór danych wykorzystywanych do uczenia i testowania sieci neuronowej. Ostatecznie otrzymano  $5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$  przypadków obliczeniowych, które rozdzielono losowo na wzorce uczące (415 wzorców – 66%) oraz testujące (210 wzorców – 34%).

W celu predykcji wartości deformacji belek żelbetonowych użyto sieci jednokierunkowej wielowarstwowej (MLP – rys. 1.) o czterech wejściach. Czteroelementowy wektor wejściowy  $x$  zawiera rozpiętość łuku  $L$ , strzałkę łuku  $f$ , a także szerokość  $b$  i wysokość  $h$  prostokątnego przekroju poprzecznego łuku:

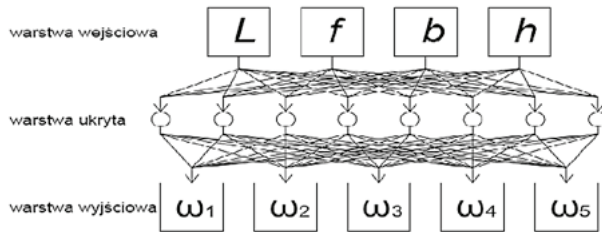
$$x = \{L, f, b, h\} \quad (4)$$



Liczba neuronów w warstwie ukrytej dobrano doświadczalnie – dla 8 neuronów w warstwie ukrytej uzyskano najmniejszą wartość MSE (2). Wektor wyjściowy y sieci jest pięcioelementowy – elementy wektora stanowią 5 pierwszych częstości drgań własnych łuku o zadanych parametrach:

$$y = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\} \quad (5)$$

Strukturę przyjętej sieci neuronowej I-H-O (Input – Hidden – Output) 4-8-5 przedstawia rysunek 4.



Rys. 4. Struktura przyjętej sieci neuronowej

W zaprojektowanej do predykcji częstości drgań własnych łuków sieci neuronowej przyjęto 100 epok uczenia,

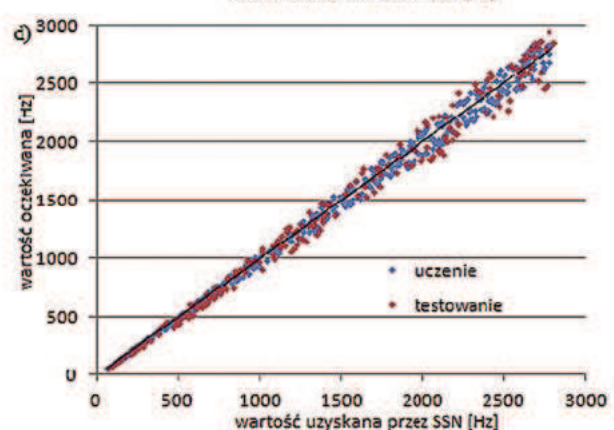
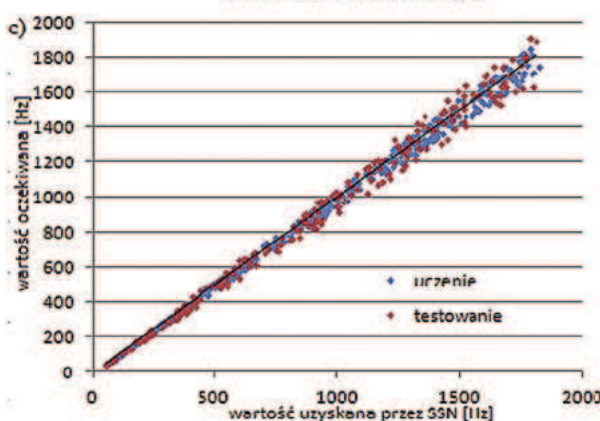
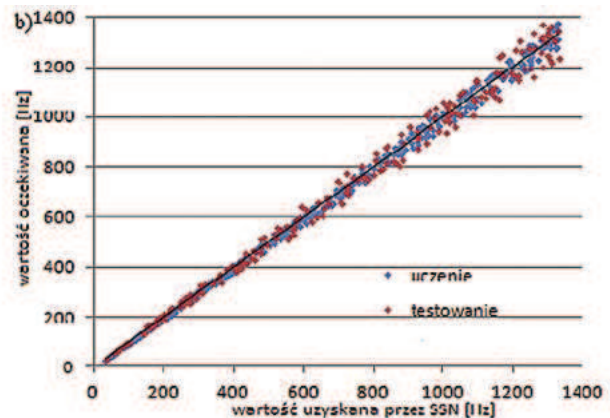
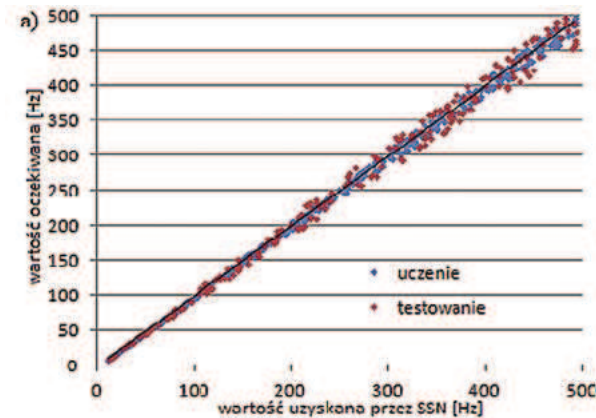
co zapewniało satysfakcjonującą minimalizację MSE. Zgodnie z przyjętą architekturą sieci jednokierunkowej wielowarstwowej MLP (rys. 1) wektor wejściowy  $x$  mnożony jest przez macierz wag warstwy ukrytej  $IW$ . Do uzyskanego w ten sposób wektora dodawany jest bias (macierz stałych współczynników)  $b_h$ . W warstwie ukrytej zastosowano tangensoidalną funkcję aktywacji, uzyskując wektor:

$$y_h = \tanh(IW \cdot x + b_h) \quad (5)$$

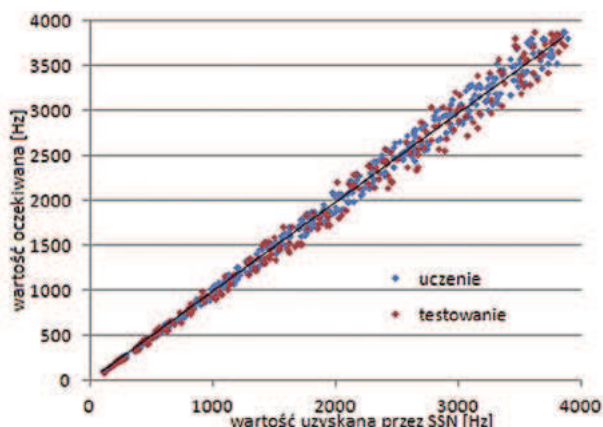
Uzyskany wektor na wyjściu warstwy ukrytej  $y_h$  (5) mnożony jest następnie przez macierz wag warstwy wyjściowej  $LW$ . Wynik mnożenia jest analogicznie sumowany z odpowiednim biasem  $b_o$ . Na tym etapie przyjęto liniową funkcję aktywacji, otrzymując wyjście układu:

$$y = LW \cdot y_h + b_o \quad (6)$$

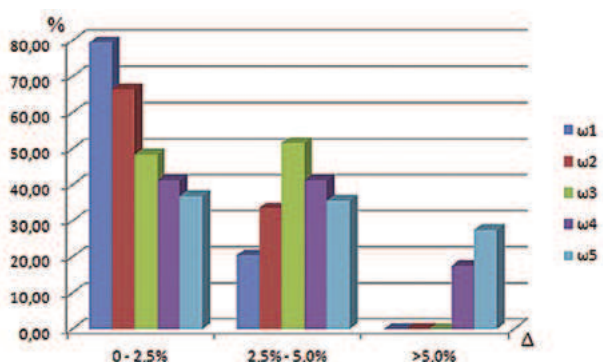
Dokładność predykcji częstości drgań własnych przez SSN oceniano, poza wyznaczeniem MSE (1) oraz RMSE (2), na podstawie współczynnika korelacji R-Pearsona. Uzyskane wartości współczynnika korelacji R-Pearsona dla zbioru uczącego i testowego przedstawia tabela 1.



Rys. 5. Wykresy korelacji częstości drgań własnych: a) pierwsza, b) druga, c) trzecia, d) czwarta



**Rys. 6.** Wykresy korelacji dla piątej częstości drgań własnych



**Rys. 7.** Histogram błędu względnego

Korelacje częstości drgań własnych uzyskanych przez SSN (oś pionowa) z wartościami obliczonymi przy użyciu MES (oś pozioma) przedstawiają wykresy na rysunkach 5–6.

Na rysunku 7 przedstawiono wyniki uzyskane z zaprojektowanej sieci neuronowej w postaci histogramów błędu względnego  $\Delta$ , przedstawiających na osi pionowej częstość występowania błędu względnego  $\Delta$  o danej wartości.

## 6. Podsumowanie

Zbieżność położenia punktów na wykresach z prostą o równaniu  $y = x$  świadczy o identyfikacji wartości częstości drgań własnych przez SSN z dużą dokładnością. W przypadku trzech pierwszych częstości drgań własnych wartości zostały wyznaczone bezbłędnie lub z błędem na poziomie  $\pm 5,0\%$ . W przypadku dalszych częstości drgań własnych względny błąd predykcji nie przekroczył  $\pm 5,0\%$  w ponad 70% wszystkich analizowanych przypadków obliczeniowych. Przeprowadzone analizy potwierdzają skuteczność stosowania sztucznych sieci neuronowych do przewidywania częstości drgań własnych łuków stalowych na podstawie ich geometrii.

**Tabela 1.** Parametry skuteczności działania SSN

Częstość drgań własnych $\omega_i$	Współczynnik korelacji R [-]	
	zbiór uczący	zbiór testowy
$\omega_1$	0,9993	0,9963
$\omega_2$	0,9990	0,9957
$\omega_3$	0,9982	0,9945
$\omega_4$	0,9971	0,9935
$\omega_5$	0,9964	0,9931

Wysoka korelacja wyznaczonych przez SSN wartości z wartościami oczekiwanymi (rys. 5–6 i tab. 1) świadczy, że uzyskana przez SSN zależność pomiędzy danymi wejściowymi (geometria łuków stalowych, wymiary przekroju) a elementami wyjściowymi jest jednoznaczna. Na tej podstawie można przypuszczać, że SSN mogą być skutecznym narzędziem również w zagadnieniu odwrotnym – identyfikacji geometrii łuku stalowego i wymiarów przekroju poprzecznego na podstawie częstości drgań własnych. Wraz z kolejnymi częstościami drgań własnych zmniejsza się współczynnik korelacji uzyskiwanego zbioru wartości. Z tego względu przy rozwiązywaniu zagadnienia odwrotnego największy wpływ na skuteczność identyfikacji będą miały początkowe częstości drgań własnych. Przedstawiony w niniejszej pracy model SSN może być stosowany do analiz zagadnienia odwrotnego.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Chindamparam P., Leissa A.W., Influence of centerline extensibility on the in-plane free vibrations of loaded circular arches. *Journal of Sound and Vibration*, nr 183(5)/1995, s. 779-79.
- [2] Lee S.-Y., Sheu J.-J., Lin S.-M., In-plane vibrational analysis of rotating curved beam with elastically restrained root. *Journal of Sound and Vibration*, nr 315/2008, s. 1086-1102
- [3] Ruta P. Meissner M., Rozwiązanie zagadnienia własnego dla niepryzmatycznego łuku kołowego z wykorzystaniem szeregow Czebyszewa. *Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture*, nr 60(1)/2013, s. 161-173
- [4] Kawakami M., Sakiyama T., Matsuda H., Morita C., In-plane and out of plane free vibrations of curved beams with variable sections. *Journal of Sound and Vibration*, nr 187(3)/1995, s. 381-401
- [5] Nowacki W., *Dynamika budowli*. Arkady, Warszawa 1972
- [6] Krishnan A., Dharmaraj S., Suresh Y.J., Free vibration studies of arches. *Journal of Sound and Vibration*, nr 186(5)/1995, s. 856-863
- [7] Yang F., Sedaghati R., Esmailzadeh E., Free in-plane vibration of general curved beams using finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, nr 318/2008, s. 850-867
- [8] Schabowicz K., Neural networks in the NDT identification of the strength of concrete, *Archives of Civil Engineering*, nr 51(3)/2005, s. 371-382
- [9] Ochmański M., Bzówka J., Back analysis of SCL tunnels based on Artificial Neural Network, *Architecture, Civil Engineering, Environment – ACEE Journal*, nr 3/2012, s. 73-81
- [10] ABAQUS/Standard User's Manual, Version 6.12 ABAQUS, Inc. Providence, RI