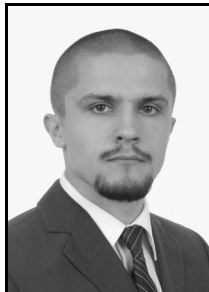


Szymon SOBCZYK, Leszek MIKULSKI
POLITECHNIKA KRAKOWSKA, INSTYTUT MECHANIKI BUDOWLI
ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Inny sposób znajdowania optymalnego rozwiązania dla stalowej ramy portalowej

Mgr inż. Szymon SOBCZYK

Projektant konstrukcji budowlanych. Absolwent Politechniki Krakowskiej (kierunek: budownictwo) oraz Akademii Górniczo-Hutniczej (kierunek: Geodezja i Kartografia). Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji.



e-mail: szymek.sobczyk@gmail.com

Prof. dr hab. inż. Leszek MIKULSKI

Prorektor ds. studenckich oraz Kierownik Zakładu Podstaw Mechaniki Ośrodka Ciągłego Wydziału Inżynierii Łądowej PK. Zainteresowania badawcze i naukowe dotyczą problemów optymalnego kształtowania konstrukcji i systemów, autor 50 publikacji z tego zakresu.



e-mail: ps@pk.edu.pl

Streszczenie

Praca dotyczy optymalnego kształtowania portalowej ramy stalowej. W artykule skupiono się na optymalnym doborze wysokości środka przekroju poprzecznego przy ustalonych parametrach geometrycznych pasów oraz przy określonych obciążeniach zewnętrznych. Formułując zagadnienie za pomocą prostych funkcji oraz stosując pętlę obliczeniową możliwe było precyzyjne i szybkie znalezienie rozwiązania optymalnego dla określonego zagadnienia optymalizacyjnego.

Słowa kluczowe: optymalizacja konstrukcji, metoda gradientowo-iteracyjna, rama stalowa.

A different way of finding optimal solution for steel portal frame

Abstract

The paper concerns the optimal modeling of portal steel frame with I-cross-section. It focuses on the selection of the optimal height of the cross-section at a fixed flanges and the set of external loads. The article describes the gradient-iterative optimization method and outlines the method's basic assumptions and illustrates its general use. The method makes it possible to quickly obtain optimal results using universally-available programming. In addition, the method makes it possible to find optimal solutions without the use of complicated mathematical formulas. On the one example was shown the efficacy of the presented optimization method. By formulating the task with the help of simple functions and carrying out calculation loops it was possible to find quickly and precisely an optimal solution.

Keywords: structure optimization, gradient-iterative method, steel frame.

1. Wstęp

Projektując ekonomicznie, przed przystąpieniem do obliczeń, należy szczegółowo przeanalizować wszystkie aspekty związane z wykonaniem danego elementu konstrukcji. Nie we wszystkich elementach budowlanych o minimalizacji kosztów będzie decydować zużycie materiałów.

W pracy skupiono się na optymalnym doborze wysokości środka stalowej ramy portalowej. Ze względu na cenę stali profilowej kluczowe znaczenie ma poprawne wygenerowanie przekroju porzecznego zapewniające minimalizację zużycia materiału.

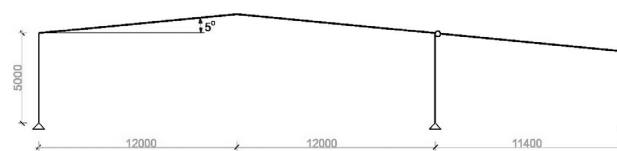
Do znalezienia rozwiązania optymalnego posłużono się autorską metodą optymalizacyjną, która stanowi połączenie metody gradientowo-iteracyjnej z algorytmem metody elementów skończonych.

2. Algorytm obliczeniowy

Założenia obliczeniowe

Analizie podlega stalowa rama portalowa o dwuteowym przekroju poprzecznym. Rama jest elementem powtarzalnym nawy

główniej hali magazynowej. Elementami ramy są: dwa słupy i rygiel o kształcie daszkowym połączone ze słupami w sztywnych węzłach. Słupy są oparte na stopach fundamentowych przegubowo. Po obu stronach nawy głównej dobudowane są nawy boczne. Elementy nawy lewej są całkowicie niezależne od ramy głównej. Pomiędzy lewą nawą a nawą główną wybudowane jest oddzielenie pożarowe. Rygle nawy z prawej strony oparte są z jednej strony na prawych słupach ramy głównej. Przyjęto, że rygiel nawy bocznej połączony jest ze słupem nawy głównej przegubowo [3]. Poniżej na rysunku (rys. 1) pokazano schemat statyczny (wymiały w mm).



Rys. 1. Schemat statyczny
Fig. 1. Static diagram

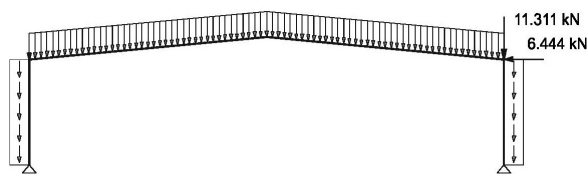
W obliczeniach uwzględniono dziewięć kombinacji obliczeniowych, które powstały dla siedmiu stanów obciążenia (tab. 1). Poniżej zestawiono stany obciążenia:

- F₁ – obciążenie ciężarem własnym (zmiennie) oraz poszyciem dachu i ścian (2,00 kN/m)
- F₂ – obciążenie technologiczne
- F₃ – obciążenie śniegiem
- F₄ – obciążenie wiatrem z lewej strony – wariant I
- F₅ – obciążenie wiatrem z lewej strony – wariant II
- F₆ – obciążenie wiatrem z prawej strony – wariant I
- F₇ – obciążenie wiatrem z prawej strony – wariant II

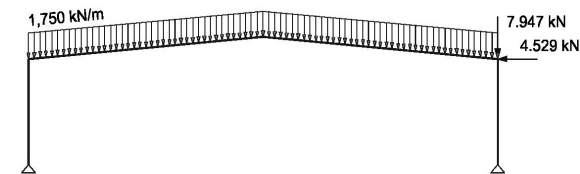
Tab. 1. Kombinacje obliczeniowe
Tab. 1. Computational combinations

Faza obciążenia / kombinacje obliczeniowe	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F ₁	X	X	X	X	X	X	X	X	X
F ₂	X	X	X	X	X	X	X	X	X
F ₃	X	X	X	X	X				
F ₄		X				X			
F ₅			X				X		
F ₆				X				X	
F ₇					X				X

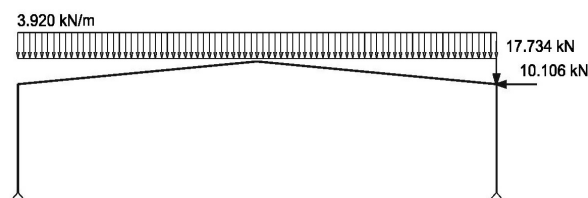
Na rysunkach 2÷8 pokazano wartości oddziaływań dla poszczególnych faz obciążenia.



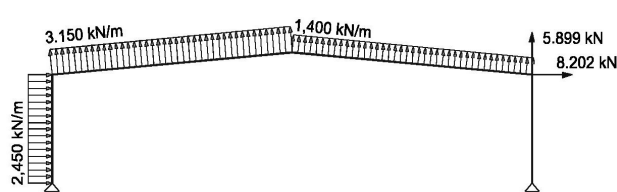
Rys. 2. Faza 1
Fig. 2. Phase 1



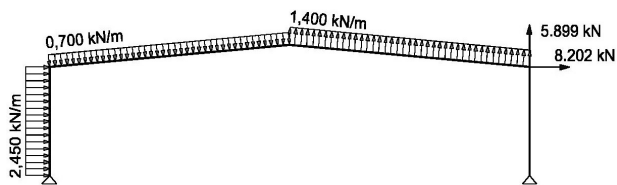
Rys. 3. Faza 2
Fig. 3. Phase 2



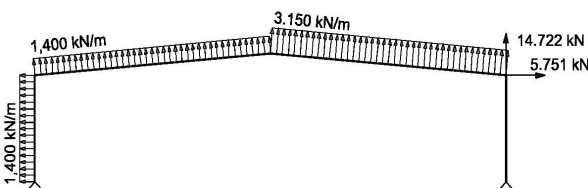
Rys. 4. Faza 3
Fig. 4. Phase 3



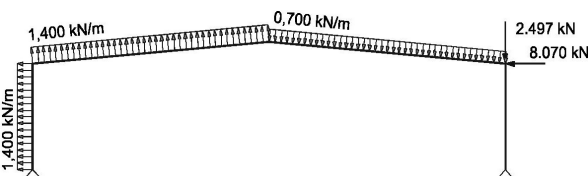
Rys. 5. Faza 4
Fig. 5. Phase 4



Rys. 6. Faza 5
Fig. 6. Phase 5



Rys. 7. Faza 6
Fig. 7. Phase 6



Rys. 8. Faza 7
Fig. 8. Phase 7

Metoda elementów skończonych w analizowanym problemie

Rozważaną ramę opisano stosując metodę elementów skończonych. Belkę zdyskretyzowano na elementy skończone o stałej (w obrębie jednego elementu) sztywności $EI(b)$ oraz stałej długości L_{ES} .

Zdefiniowano macierz sztywności w konfiguracji lokalnej (1), macierz transformacji dla kąta α (2) oraz zbudowano macierz Boole'a dla n elementów skończonych (3).

$$k(EI, L) = \begin{pmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$B_i = \begin{cases} B_{(1,3 \cdot (\text{top}^{n,1} - 1) + 1)} = 1 \\ B_{(2,3 \cdot (\text{top}^{n,1} - 1) + 2)} = 1 \\ B_{(3,3 \cdot (\text{top}^{n,1} - 1) + 3)} = 1 \\ B_{(4,3 \cdot (\text{top}^{n,2} - 1) + 1)} = 1 \\ B_{(5,3 \cdot (\text{top}^{n+2} - 1) + 2)} = 1 \\ B_{(6,3 \cdot (\text{top}^{n+2} - 1) + 3)} = 1 \end{cases} \quad (3)$$

gdzie: top^n – fragment macierzy topologii odpowiadający n -temu elementowi skończonemu

Funkcja (4) opisuje wprowadzoną macierz topologii dla n elementów skończonych.

$$\text{for } i \in 1 \dots n \\ \text{top} = \begin{cases} \text{top}_{i,1} = i \\ \text{top}_{i,2} = i + 1 \end{cases} \quad (4)$$

Zapis macierzowy (3) definiuje macierz Boole'a dla dowolnego i -tego elementu skończonego, co umożliwiła późniejszą automatyzację obliczeń dla dowolnej liczby elementów.

Dla każdego węzła określono trzy siły węzłowe: siłę pionową, siłę poziomą oraz moment zginający. Wektor sił węzłowych dla n elementów skończonych ma wymiar $3(n+1)$.

Transformacja do układu globalnego:

$$K_{e,i} = T(\alpha_i)^T k_{e,i} T(\alpha_i) \quad (5)$$

Agregacja macierzy sztywności:

$$K = \sum_{i=1}^n B_i^T K_{e,i} B_i \quad (6)$$

gdzie:

$k_{e,i}$ – macierz sztywności w układzie lokalnym obliczona zgodnie z równaniem (1) dla i -tego elementu skończonego

$K_{e,i}$ – macierz sztywności obliczona zgodnie z równaniem (5) dla i -tego elementu skończonego

B_i – macierz Boole'a dla i -tego elementu skończonego

Definicja wektorów zastępników obciążenia liniowego (7) oraz skupionego (8):

$$Z_c(q, L_{ES}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{qL_{ES}}{2} \\ \frac{qL_{ES}^2}{12} \\ 0 \\ \frac{qL_{ES}}{2} \\ -\frac{qL_{ES}^2}{12} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$Z_p(P, L_{ES}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{P}{2} \\ \frac{PL_{ES}}{8} \\ 0 \\ \frac{P}{2} \\ -\frac{PL_{ES}}{8} \end{pmatrix} \quad (8)$$

gdzie:

q – obciążenie liniowe

P – obciążenie skupione

L_{ES} – długość elementu skończonego

Agregacja wektorów zastępników:

$$Z = \sum_{i=1}^n B_i^T Z_{e,i} \quad (9)$$

gdzie:

$Z_{e,i}$ – wektor zastępników obciążenia liniowego obliczony zgodnie z równaniami (7) i (8) dla i -tego elementu skończonego

Warunki brzegowe opisano wektorem (10):

$$w = \begin{cases} w_1 = 1 \\ w_2 = 1 \\ \text{for } i \in 3 \dots 3n \\ w_i = 0 \\ w_{3n+1} = 1 \\ w_{3n+2} = 1 \\ w_{3n+3} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Rozwiązanie układu równań oraz obliczenie wektorów przemieszczeń dla elementów skończonych wynika z równania równowagi:

$$K_{wb} Q = S_{wb} \quad (11)$$

gdzie:

Q – wektor przemieszczeń węzłowych,

K_{wb} – macierz sztywności uwzględniająca warunki brzegowe,

S_{wb} – wektor obciążeń węzłowych uwzględniający warunki brzegowe.

Funkcje opisujące stany graniczne analizowanej ramy

a) Stan graniczny nośności: ograniczenie ekstremalnych naprężeń przy dolnej i górnej krawędzi

Warunek (12) polega na ograniczeniu maksymalnych naprężeń normalnych (13) w każdej sytuacji obliczeniowej.

$$\sigma_{lim} \geq \sigma_{max} \quad (12)$$

$$\sigma_{max} = \frac{|M_{max}|}{I} z + \frac{|N_{max}|}{A} \quad (13)$$

gdzie:

σ_{lim} – dopuszczalne naprężenia normalne,

M_{max} – maksymalny moment zginający,

N_{max} – maksymalna siła podłużna

I – moment bezładności przekroju poprzecznego

A – pole powierzchni przekroju poprzecznego

z – odległość od środka ciężkości do najdalej oddalonego punktu przekroju poprzecznego

W prezentowanym zadaniu optymalizacyjnym pominięty został wpływ zwichrzenia blachownicy.

b) Stan graniczny użytkowania

Warunek (14) polega na ograniczeniu maksymalnego przemieszczenia pionowego rygla i poziomego słupa w każdej sytuacji obliczeniowej.

$$u_{lim} \geq u_{max} \quad (14)$$

gdzie:

u_{lim} – dopuszczalne ugięcie

u_{max} – maksymalne obliczone ugięcie.

Optymalizacja

Zastosowana w obliczeniach metoda stanowi połączenie metody gradientu prostego oraz iteracyjnego rozwiązania sformułowanego problemu optymalizacyjnego. W ogólności zastosowanie metody można opisać w 6 krokach:

1. Matematyczny zapis funkcji opisujących rozważane zadanie optymalizacyjne.
2. Ustalenie funkcji celu oraz zmiennych decyzyjnych.
3. Określenie ograniczeń optymalizacyjnych.
4. Ustalenie punktu startowego optymalizacji oraz kierunku poszukiwań rozwiązania.
5. Opis funkcji przyrostowej.
6. Iteracyjne znalezienie rozwiązania spełniającego zadane kryteria optymalizacyjne.

Za funkcję celu w zadaniu optymalizacyjnym przyjęto objętość elementu.

$$f = \int_0^L A_c(x) dx \quad (15)$$

Optymalizacja polega na doborze wysokości średnika Δh , która minimalizuje ustaloną funkcję celu (15) oraz spełnia wszystkie przyjęte ograniczenia.

Obliczenia przeprowadzane są dla ustalonych danych:

- szerokości i grubości pasów,
- grubości średnika,
- obciążenia.

Za punkt startowy optymalizacji przyjęto minimalną wysokość przekroju poprzecznego uwarunkowaną narzuconymi ograniczeniami geometrycznymi.

Przyjęto skokowy przyrost zmiennej decyzyjnej w obrębie jednej pętli obliczeniowej. Kierunek przyrostu Δh zależy od spełnienia warunków nośności (12÷13) i jest określany w zależności od uzyskanego wyniku weryfikacji nośności przekroju. Dodatkowo wartość przyrostu Δh maleje wraz z kolejnymi fazami obliczeń. Poniżej przedstawiono w uproszczony sposób funkcję określającą gradientową zmianę wysokości przekroju (16).

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta h_1 = 0 \\ \text{while } |WN_p - WN_{p-1}| > \lambda \\ \left\{ \begin{array}{l} \Delta h_2 = 0,5h_{\max} \\ \dots \\ \Delta h_{p+1} = \Delta h_p + \begin{cases} \Delta h_p - \Delta h_{p-1} & \text{if } WN_p > 1 \\ -\Delta h_p - \Delta h_{p-1} & \text{if } WN_p \leq 1 \end{cases} \\ \text{break if } p > p_{\max} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (16)$$

gdzie:

λ – ustalone kryterium zbieżności,
 p – numer fazy obliczeniowej,
 p_{\max} – maksymalna ustalona liczba faz obliczeniowych,
 WN_p – zbiór warunków obliczeniowych wynikających z analizy stanów granicznych dla p -tej fazy obliczeniowej.

Z uwagi na statyczną niewyznaczalność analizowanego elementu obliczenia przebiegają zgodnie z następującą procedurą:

1. Obliczenia MES dla wielkości startowych.
2. Znalezienie optymalnej wysokości przekroju dla każdego punktu ramy. Przekrój poprzeczny dla wyznaczonej wysokości spełnia ustalone warunki nośności (12÷13) oraz minimalizuje zadaną funkcję celu (15).
3. Weryfikacja stanu granicznego użyteczności (14).
4. Iteracyjne obliczenia (dla każdej iteracji wykonywane są obliczenia MES dla optymalnych wysokości przekrojów wyznaczonych w poprzednim kroku iteracyjnym oraz wyznaczane jest nowe rozwiązanie optymalne dla określonych sił wewnętrznych).
5. Przerwanie obliczeń iteracyjnych w chwili osiągnięcia oczekiwanej zbieżności iteracyjnej.

Na podstawie powyższych założeń został napisany program komputerowy, który umożliwia znalezienie rozwiązania optymalnego dla rozważanego zagadnienia.

3. Wyniki

Dane przyjęte do obliczeń

Granica plastyczności stali: $f_{yd} = 215$ MPa
 Grubość środnika: 8 mm
 Grubość pasów rygli: 18 mm
 Grubość pasów słupów: 16 mm
 Szerokość pasów rygli i słupów: 250 mm
 Dopuszczalne przemieszczenie pionowe rygla: $L/200$
 Dopuszczalne przemieszczenie poziome słupa: $L/100$

Obliczenia przeprowadzono dla zmiennej decyzyjnej określonej w zakresie:

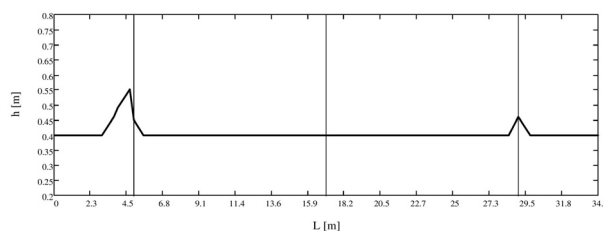
- wysokość środnika $h \in \langle 400 ; 800 \rangle$ mm
- przyrost wysokości $\Delta h = 1$ mm

Napisany algorytm komputerowy automatycznie uwzględni ciężar analizowanej ramy.

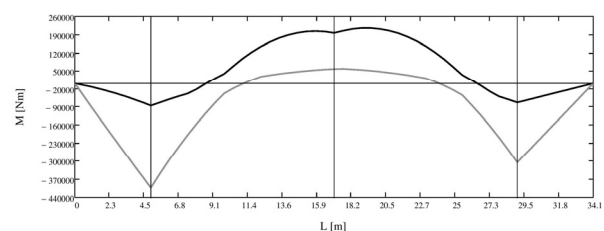
Wyniki

Poniżej przedstawiono komplet wyników obliczeń dla analizowanej ramy portalowej.

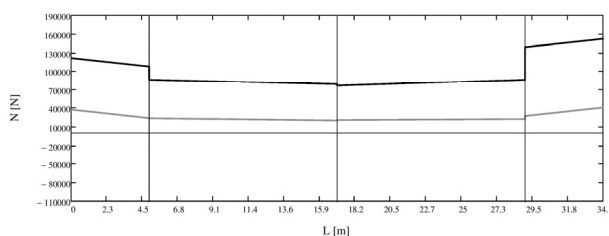
Na rysunku 10, 11 oraz 12 pokazano obwiednie momentów zginających, sił normalnych i ścinających. Optymalną wysokość środnika pokazano na rysunku 9. Na rysunkach 13 i 14 pokazano dodatkowo wyznaczone naprężenia normalne oraz obwiednie przemieszczeń węzłowych. Dla słupów rami pokazano przemieszczenie poziome, natomiast dla rygli pionowe. Na rysunku (rys. 14) dodatkowo zaznaczono granicę dopuszczalnych przemieszczeń



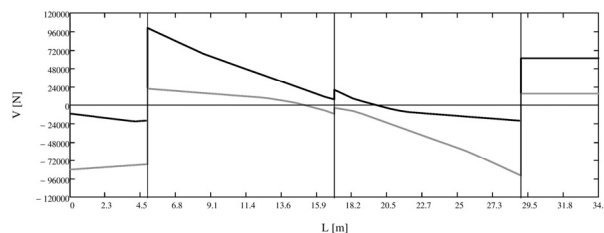
Rys. 9. Optymalna wysokość
 Fig. 9. Optimal height



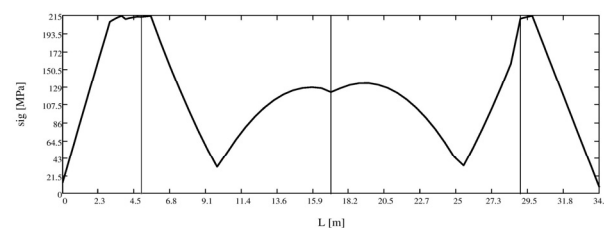
Rys. 10. Obwiednia momentów zginających
 Fig. 10. Boundary of bending moments



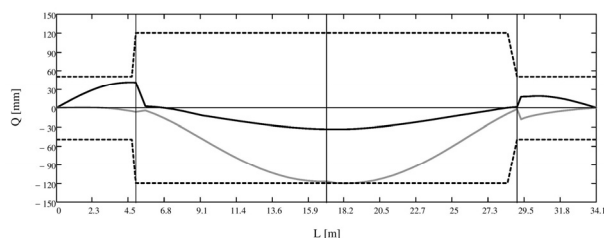
Rys. 11. Obwiednia sił normalnych
 Fig. 11. Boundary of normal forces



Rys. 12. Obwiednia sił ścinających
 Fig. 12. Boundary of shearing forces



Rys. 13. Naprężenia normalne
 Fig. 13. Normal stresses



Rys. 14. Obwiednia przemieszczeń węzłowych
Fig. 14. Boundary of nodes displacements

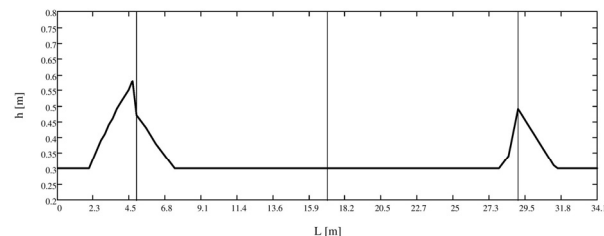
Z powyższej analizy wynika, że warunkami decydującymi o wysokości przekroju były naprężenia normalne w narożach ramy. Dodatkowo warto zauważyć, że w pozostałych fragmentach ramy warunkiem decydującym o wysokości przekroju poprzecznego było dolne ograniczenie zmiennej decyzyjnej. Należy jednak zwrócić uwagę na aktywność ograniczenia wynikającego ze stanu granicznego użyteczności.

W celu zobrazowania możliwości optymalizacyjnych, które oferuje prezentowana metoda przeprowadzono kolejne obliczenia dla innego zakresu zmiennej decyzyjnej:

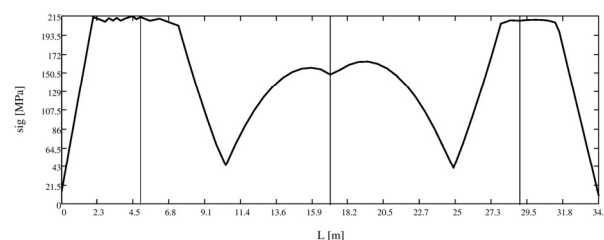
- wysokość środnika $h \in <300 ; 800>$ mm

Dodatkowo w obliczeniach zrezygnowano z ograniczenia maksymalnych przemieszczeń węzłowych.

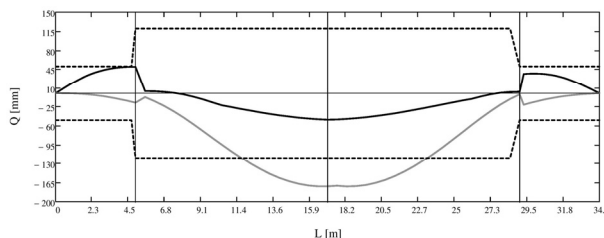
Poniżej na rysunku 15 pokazano optymalną wysokość środnika dla analizowanego przypadku obliczeniowego. Na rysunku 16 pokazano naprężenia normalne, natomiast na rysunku 17 przedstawiono przemieszczenia węzłowe wraz z ustaloną w pierwszym wariancie obliczeniowym granicą przemieszczeń dopuszczalnych.



Rys. 15. Optymalna wysokość
Fig. 15. Optimal height



Rys. 16. Naprężenia normalne
Fig. 16. Normal stresses



Rys. 17. Obwiednia przemieszczeń węzłowych
Fig. 17. Boundary of nodes displacements

Zmiana ograniczeń wpłynęła na zwiększenie wysokości przekroju poprzecznego w obszarze występowania ekstremalnych momentów zginających oraz znaczące zmniejszenie wysokości w pozostałych fragmentach ramy. Rozwiązanie wariantu II cechuje mniejsze zużycie stali niż dla wariantu I. Przekroczenie dopuszczalnych ugięć rygła ramy (rys. 17) można skompensować poprzez wykonanie podniesienia wykonawczego w węzle środkowym rygła ramy.

4. Wnioski

Przed przystąpieniem do projektowania elementów stalowych należy przeanalizować koszty związane z wykonaniem danego elementu. Dodatkowo należy dokładnie przeanalizować zarówno stan graniczny nośności jak i użytkowania. Niejednokrotnie można obniżyć zużycie materiału poprzez zabiegi wykonawcze, które pozwalają skompensować ewentualne przekroczenie dopuszczalnych przemieszczeń.

W pracy przedstawiono gradientowo-iteracyjną metodę optymalizacji ram portalowych. Metoda gradientowo-iteracyjna w połączeniu z algorytmem MES daje ogromne możliwości we współczesnym projektowaniu. Ze względu na relatywnie niewielkie wymagane nakłady czasu pracy metoda może zostać wykorzystana w biurach projektowania konstrukcji budowlanych do optymalizacji różnorodnych elementów budowlanych. Zadanie optymalizacyjne można sformułować w dowolnym języku programowania lub w popularnych programach matematycznych (np. Mathcad, Matlab).

Rozważany przykład statycznie niewyznaczalnej ramy portalowej obrazuje skuteczność prezentowanej metodologii obliczeniowej.

5. Literatura

- [1] Fenner R. T.: Finite Element Methods for engineers. 1997. ISBN-13: 978-1860940958.
- [2] Hamming R. W.: Numerical methods for scientists and engineers. 1987. ISBN-13: 978-0486652412.
- [3] Laskowski H.: Optymalne kształtowanie stalowej ramy portalowej. Inżynieria i budownictwo, 681-684, 12/2005.
- [4] Lapko A., Jensen B. C.: Podstawy projektowania i algorytmy obliczeń konstrukcji żelbetonowych. Wydawnictwo „Arkady”, Warszawa 2005.
- [5] Łodygowski T., Kąkol W.: Metoda elementów skończonych w wybranych zagadnieniach mechaniki konstrukcji inżynierskich. Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1994.
- [6] Mikulski L.: Teoria sterowania w problemach optymalizacji konstrukcji i systemów. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, ISBN 978-93-7242-440-2, Kraków 2007.
- [7] Rakowski G., Kacprzyk Z.: Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji. Oficyna wyd. Politechniki Warszawskiej, Warszawa 2005.
- [8] Ravindran A., Raqsdell K. M., Reklaitis G. V.: Engineering optimization: methods and applications. 2006. ISBN-13: 978-0471558149.
- [9] Sobczyk Sz.: Optymalne kształtowanie pól dźwigarów strunobetonowych. Badania doświadczalne i teoretyczne w budownictwie. monografia. Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2012.
- [10] Sobczyk Sz., Mikulski L.: Optymalizacja belek sprężonych. Pomiar Automatyka Kontrola nr 10/2012.
- [11] Sobczyk Sz., Mikulski L.: Optymalizacja dźwigarów strunobetonowych. „Poliptymalizacja i komputerowe wspomaganie projektowania. Tom X”, Wydawnictwo Politechniki Koszalińskiej, Koszalin 2012r.