

Marcin KULIK\*  
Rafał GABOR\*

## SPRZĘŻONA ANALIZA POŁOWO-OBWODOWA ELEKTROMAGNETYCZNEGO STOŁU WIBRACYJNEGO

W pracy zaprezentowano sprzężony model obliczeniowy do analizy dynamiki elektromagnetycznego stołu wibracyjnego. Model zawiera opis pola magnetycznego oraz obwodu elektrycznego z uwzględnieniem ruchu liniowego. Badany układ składa się ze stalowej podstawy, na której umieszczono elektromagnes zasilany prądem przemienicznym oraz płyty aluminiowej zamontowanej na sprężynach z umieszczonymi na jej spodzie magnesami trwałymi. Do opisu obwodu magnetycznego wykorzystano dwuwymiarową metodę elementów skończonych. Wielkością sprzęgającą pomiędzy modelami obwodu elektrycznego i magnetycznego jest prąd płynący w uzwojeniu elektromagnesu, natomiast sprzężenie pomiędzy modelem obwodu magnetycznego a modelem mechanicznym jest realizowane poprzez siłę magnetyczną wyznaczoną z tensora naprężeń Maxwell'a. Ruch liniowy jest modelowany metodą odkształcania elementów. Zbadano wpływ nasycenia obwodu magnetycznego na wyniki obliczeń przebiegów dynamicznych siły elektromagnetycznej oraz przemieszczeń.

SŁOWA KLUCZOWE: sprzężona analiza, metoda elementów skończonych, wibracje  
KEYWORDS: coupled analysis, finite element method, vibrations

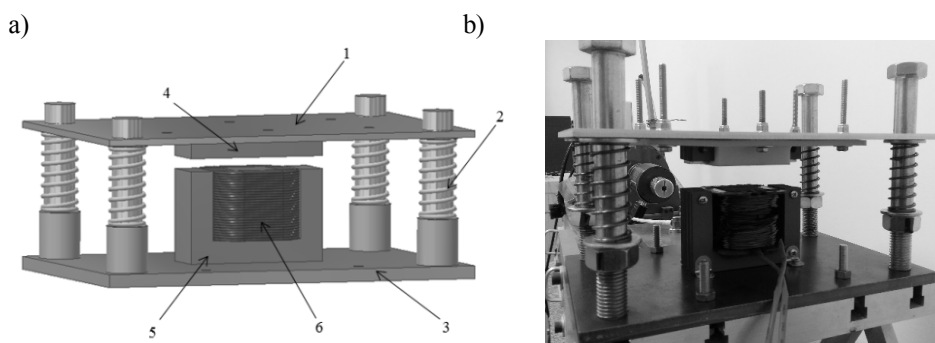
### 1. WSTĘP

Stoły wibracyjne składają się z platformy połączonej z układem, który wytwarza kontrolowane drgania [1]. W technice stoły wibracyjne wykorzystywane są do badań możliwości komponentów, urządzeń, systemów jak również do badań wytrzymałości materiałów na wstrząsy, uderzenia itp. Często, w spotykanych rozwiązaniach konstrukcyjnych, stoły wibracyjne napędzane są elektrycznie lub pneumatycznie, jak na przykład w przypadku zastosowania narzędzia wibrującego do produkcji ogrodzeń betonowych [1]. W tym przypadku drgania stołu są generowane przez silniki elektryczne przymocowane bezpośrednio od spodu pełniąc funkcję wibratora. Prezentowany w artykule stół wibracyjny jest gabarytowo znacznie mniejszy od konstrukcji przemysłowych i wykorzystywany jest on jako narzędzie badawcze do imitowania pracy dużych maszyn tech-

---

\* Politechnika Opolska.

nologicznych, których efektem ubocznym są występujące drgania. Istnieje możliwość zamocowania na platformie wibrującej układu konwertującego energię z drgań mechanicznych w energię elektryczną, który jest w stanie zasilić czujniki występujące w maszynach. Taki układ generatora małej mocy został zaprezentowany w pracy [2], natomiast na rysunku 1 zaprezentowano budowę badanego stołu wibracyjnego.



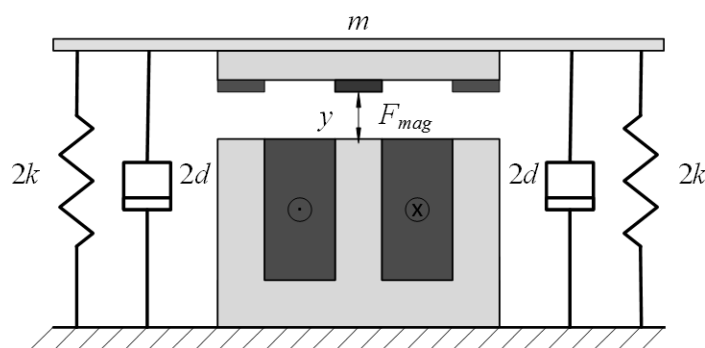
Rys. 1. Elektromagnetyczny stół wibracyjny: a) rysunek komputerowy (1 – platforma drgająca, 2 – sprężyna, 3 – podstawa konstrukcji, 4 – zwora z magnesami trwałymi, 5 – rdzeń ferromagnetyczny, 6 – cewka), b) skonstruowany model fizyczny.

Przedstawiony powyżej stół wibracyjny składa się z nieruchomej podstawy do której przymocowany został elektromagnes oraz z platformy wykonanej z aluminiowej płyty posiadającej od spodu przymocowane jarzmo z naklejonymi magnesami trwałymi. Rdzeń cewki i jarzmo są usytuowane w układzie centralnie i osiowo, tak aby zasilając elektromagnes prądem przemiennym, doszło do zamknięcia obwodu magnetycznego. Cykliczna zmiana zwrotu przepływu prądu w elektromagnesie powoduje przyciąganie i odpychanie platformy drgającej zawieszanej na sprężynach.

Znane są z literatury obliczenia sprzężone dla układów elektromagnetycznych o ruchu liniowym, takie jak tubowe silniki liniowe z magnesami trwałymi [3], gdzie do przemieszczeń siatki zastosowano metodę powierzchni ślizgowej [4]. W pracach [5, 6] zaprezentowano liniowe solenoidalne akтуatory, gdzie w artykule [6] zastosowano podzieloną siatkę elementów skończonych w obszarze ruchu na kilkanaście regionów, w których w zależności od aktualnego przemieszczenia zwory, aktualizowane są właściwości materiałowe, co imituje ruch. W badanym elektromagnetycznym stole wibracyjnym trudno jest zastosować metodę powierzchni ślizgowej ze względu na ograniczenie ruchu zwory względem rdzenia elektromagnesu, dlatego też zastosowano podobną metodę dzielenia szczeliny powietrznej na regiony [6], ale zamiast aktualizować właściwości materiałowe, dokonywane są przesunięcia poszczególnych regionów i odkształcanie elementów, co dokładnie opisano w kolejnym rozdziale.

## 2. SPRZEŻONY MODEL OBLICZENIOWY

Część mechaniczna układu składa się z 4 sprężyn, na których zawieszona jest platforma ze zworą i magnesami trwałymi, co przedstawiono na rysunku 2. Ponieważ ruch platformy odbywa się tylko w jednej osi, to uwzględnia się tylko jedno równanie mechaniczne, w którym całkowita sztywność układu jest sumą sztywności wszystkich sprężyn, całkowita masa jest sumą masy aluminiowej płyty, zwory oraz magnesów trwałych, natomiast całkowite tłumienie jest sumą tłumienia wszystkich części ruchomych.



Rys. 2. Schemat poglądowy elektromagnetycznego stołu wibracyjnego

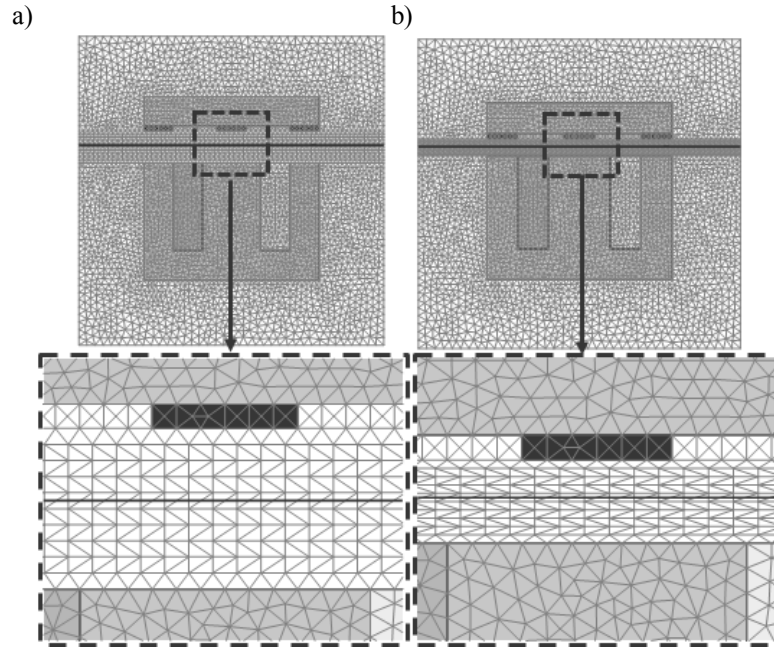
Ze względu na symetrię występującą w obwodzie magnetycznym, w obliczeniach zastosowano dwuwymiarową metodę elementów skończonych [7]. Na rysunku 3 przedstawiono siatkę dyskretyzacyjną dla dwóch różnych położenia zwory. Aby przyspieszyć obliczenia, zastosowano jedną siatkę, w której elementy trójkątne pogrupowane w poziomych regionach znajdujących się w szczelinie powietrznej, rozciągają lub ściskają się w zależności od aktualnego przemieszczenia. Sprzężony model obliczeniowy badanego układu składa się z równania pola magnetycznego, oraz równań równowagi elektrycznej i mechanicznej:

$$S\varphi - Qi = M \quad (1)$$

$$\frac{d\psi}{dt} + L_c \frac{di}{dt} + R_c i = u \quad (2)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + d \frac{dy}{dt} + ky + F_{mag} = -mg \quad (3)$$

gdzie  $S$  jest macierzą reluktancji,  $\varphi$  jest wektorem potencjałów węzłowych,  $Q$  jest wektorem pełniącym funkcję rozłożenia przepływu prądu  $i$  płynącego w obwodzie w węzłach siatki należących do cewki,  $M$  jest wektorem przepływów pochodzących od magnesów trwałych.



Rys. 3. Siatka dyskretyzacyjna dla różnych położeń zwoy z magnesami trwałymi:  
a) bez przemieszczenia, b) przemieszczenie równe 1 cm

W równaniu (2)  $L_c$ ,  $R_c$ ,  $u$  to odpowiednio indukcyjność rozproszenia cewki, rezystancja uzwojenia cewki oraz napięcie zasilania, natomiast strumień skojarzony z cewką jest wyznaczany z zależności  $\psi = l_{zflux} Q^T \varphi$ , w której  $l_{zflux}$  jest długością rdzenia w kierunku osi  $z$ . W równaniu mechanicznym (3)  $m$  jest sumaryczną masą jarzma z magnesami trwałymi i aluminiowej platformy,  $d$  jest współczynnikiem tłumienia,  $k$  jest współczynnikiem sztywności,  $y$  jest przemieszczeniem platformy drgającej,  $g$  stałą grawitacji, natomiast  $F_{mag}$  jest siłą elektromagnetyczną obliczaną z tensora naprężeń Maxwell'a na linii znajdującej się pomiędzy elektromagnesem a zwoją z magnesami trwałymi (oznaczoną kolorem czerwonym na rys. 3). W celu przeprowadzenia symulacji w dziedzinie czasu koniecznym jest obliczenie wartości początkowych potencjałów węzłowych  $\varphi_0$  oraz przemieszczenia  $y_0$ , ze względu na występowanie w układzie siły grawitacji oraz siły reluktancyjnej pochodzącej od oddziaływania magnesów trwałych z ferromagnetycznym rdzeniem elektromagnesu. Układ równań dla warunków początkowych przedstawia się następująco

$$\begin{bmatrix} S(\varphi_0, y_0) & 0 \\ C(\varphi_0) & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ -mg \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie wektor  $C$  pomnożony przez wektor potencjałów węzłowych jest dyskretną formułą tensora naprężeń Maxwell'a [8]. Aby dokonać analizy dynamicznej, należy zdyskretyzować równania (2), (3) w dziedzinie czasu. Zastępując pochodne różnicami skończonymi [9], po odpowiednich przekształceniach otrzymano układ równań różnicowych postaci

$$A_{t+\Delta t} X_{t+\Delta t} - A_t X_t = B \quad (5)$$

gdzie wektory rozwiązań dla aktualnego i poprzedniego kroku czasowego mają postać

$$X_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} \varphi_{t+\Delta t} \\ i_{t+\Delta t} \\ y_{t+\Delta t} \\ v_{t+\Delta t} \end{bmatrix}, \quad X_t = \begin{bmatrix} \varphi_t \\ i_t \\ y_t \\ v_t \end{bmatrix} \quad (6)$$

Ponieważ równanie (3) przekształcono na dwa równania różniczkowe I-go rzędu, to otrzymano dodatkową zmienną – prędkość  $v$ . Macierze współczynników równania (5) obliczane są w każdym kroku czasowym

$$A_{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} wS_{t+\Delta t} & -wQ_{t+\Delta t} & 0 & 0 \\ \frac{l_{zflux} Q_{t+\Delta t}^T}{\Delta t} & \frac{L_c}{\Delta t} + wR_c & 0 & 0 \\ wC_{t+\Delta t} & 0 & wk & \frac{m}{\Delta t} + wd \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} & -w \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$A_t = \begin{bmatrix} -(1-w)S^t & (1-w)Q_t & 0 & 0 \\ \frac{l_{zflux} Q_t^T}{\Delta t} & \frac{L_c}{\Delta t} - (1-w)R_c & 0 & 0 \\ -(1-w)C_t & 0 & -(1-w)k & \frac{m}{\Delta t} - (1-w)d \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} & (1-w) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B = \begin{bmatrix} wM_{t+\Delta t} + (1-w)M_t \\ wU_{t+\Delta t} + (1-w)U_t \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

gdzie  $\Delta t = 0,001$  s jest krokiem całkowania,  $U_{t+\Delta t}$  i  $U_t$  są wartościami napięcia zasilania w danych krokach czasowych, natomiast  $w$  jest współczynnikiem wagowym [10]. Rozwiązanie w aktualnym kroku czasowym przyjmuje postać

$$X_{t+\Delta t} = A_{t+\Delta t}^{-1}(A_t X_t + B) \quad (10)$$

Ze względu na nieliniowości występujące w układzie, takie jak nieliniowa charakterystyka magnesowania oraz zależność wektora  $C$  od potencjałów węzłowych, równanie (10) jest rozwiązywane metodą stałego punktu

$$X_{t+\Delta t}^i = (1 - \alpha)X_{t+\Delta t}^{i-1} + \alpha \tilde{X}_{t+\Delta t}^i \quad (11)$$

gdzie jest kolejną iteracją metody stałego punktu,  $\alpha$  jest współczynnikiem relaksacji, natomiast  $\tilde{X}_{t+\Delta t}^i$  jest tymczasowym rozwiązaniem w danej iteracji. Iteracje są wykonywane do chwili, gdy błąd względny rozwiązania  $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\|X_{t+\Delta t}^i - X_{t+\Delta t}^{i-1}\|}{\|X_{t+\Delta t}^i\|} \quad (12)$$

osiągnie wartość mniejszą od zadanej.

### 3. WYNIKI OBLICZEŃ

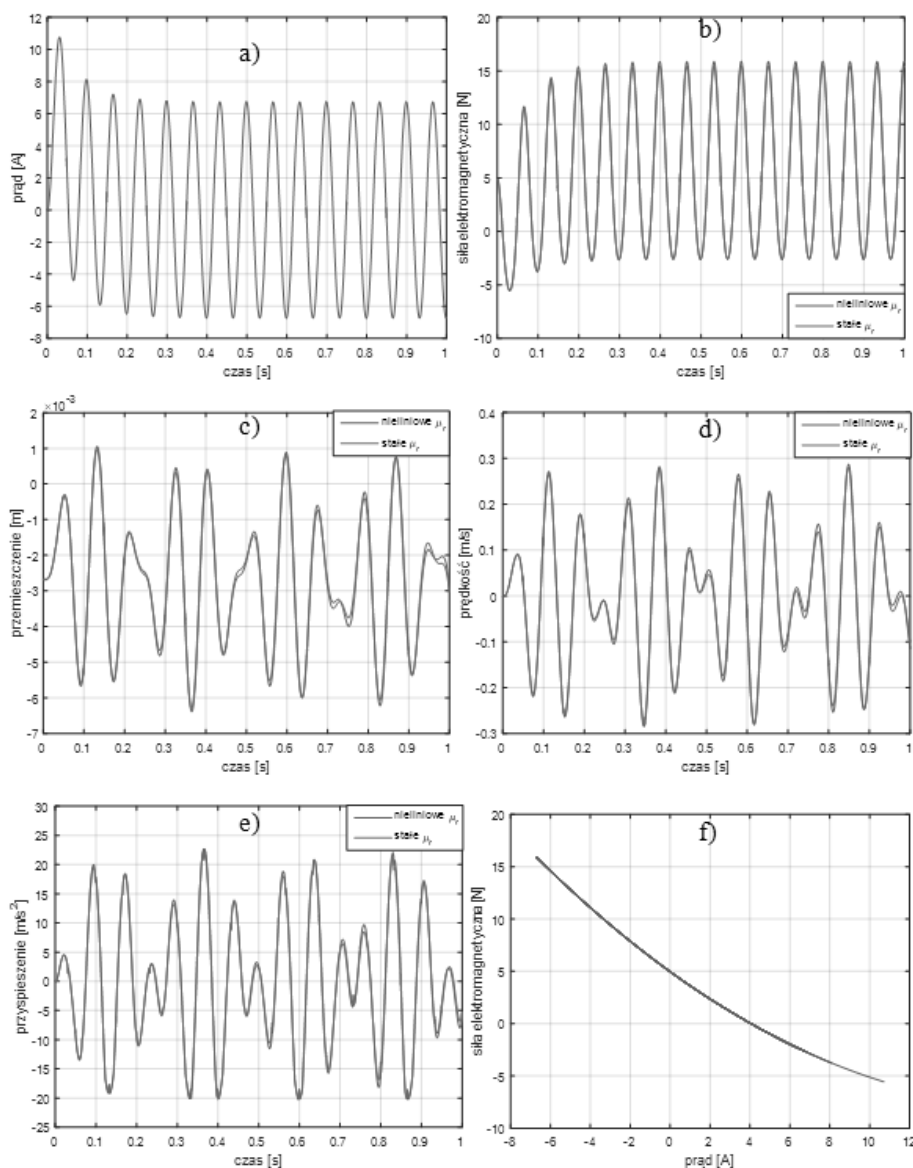
Obliczenia przeprowadzono dla przedziału czasowego od 0 do 1 s, przy współczynniku wagowym  $w = 1/2$ , co odpowiada schematowi Cranka-Nicolsona. Dodatkowo zbadano wpływ nieliniowej charakterystyki magnesowania na wyniki i porównano je z obliczeniami wykonanymi dla przenikalności magnetycznej względnej rdzenia ferromagnetycznego  $\mu_r = 600$ . Symulację przeprowadzono dla stałych materiałowych i parametrów skupionych obwodu elektrycznego przedstawionych w tabeli 1.

Tabela 1. Stałe materiałowe i parametry skupione obwodu elektrycznego przyjęte w obliczeniach

Parametr	Wartość
Natężenie koercji magnesów trwałych	$H_c = -950$ kA/m
Długość obwodu magnetycznego w kierunku osi $z$	$L_{zflux} = 37$ mm
Indukcyjność rozproszenia cewki	$L_c = 0,05$ H
Rezystancja uzwojenia cewki	$R_c = 1,05$ $\Omega$
Liczba zwojów cewki	$z = 300$
Całkowita masa	$M = 1,461$ kg
Całkowite tłumienie	$d = 0,1$ Ns/m
Całkowita sztywność	$k = 7160$ N/m

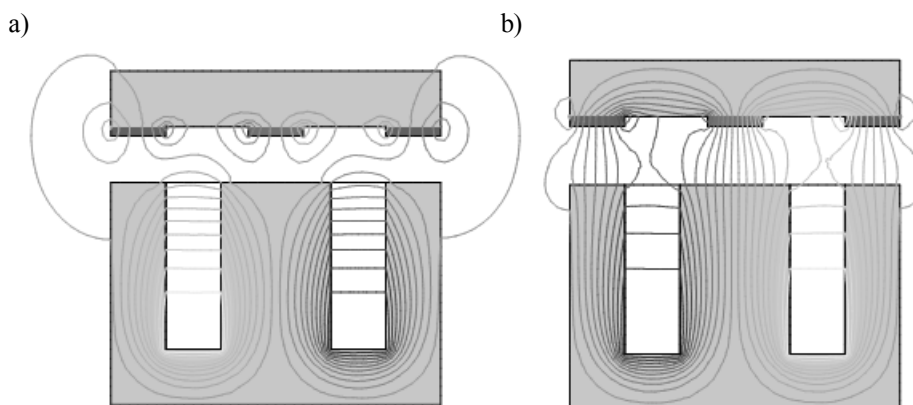
Na rysunku 4a przedstawiono przebieg prądu płynącego w uzwojeniu cewki, natomiast rysunek 4b przedstawia siłę elektromagnetyczną w zależności od czasu. Stan nieustalony prądu jak i siły trwa około 0.3 s. Przebiegi przemiesz-

czenia (rys. 4c), prędkości (rys. 4d) oraz przyspieszenia (rys. 4e) nie posiadają ustabilizowanej amplitudy, co jest spowodowane dużą sztywnością sprzężyn oraz parametrycznością układu (zależność siły od przemieszczenia).

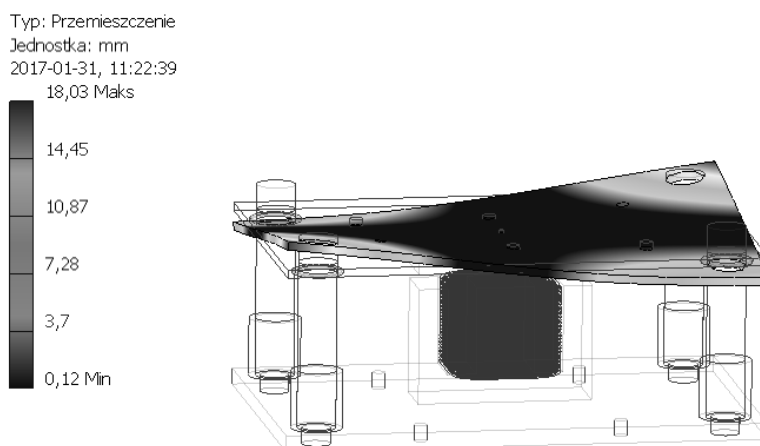


Rys. 4. Przebiegi dla amplitudy napięcia zasilania  $\underline{U} = 30$  V oraz częstotliwości  $f = 15$  Hz:  
 a) prąd płynący w uzwojeniu, b) siła elektromagnetyczna, c) przemieszczenie platformy drgającej wraz z ferromagnetyczną zwarą z magnesami trwałymi, d) prędkość, e) przyspieszenie, f) siła elektromagnetyczna w zależności od prądu płynącego w uzwojeniu

Na rysunku 4f zaprezentowano zmienność siły elektromagnetycznej w zależności od prądu. Siła elektromagnetyczna posiada silny składnik reluktancyjny wywołany oddziaływaniem magnesów trwałych z rdzeniem, dlatego jej zależność od prądu nie jest symetryczna. Wyniki symulacji wykazały niewielkie różnice w przebiegach dla stałej przenikalności magnetycznej rdzenia w stosunku do nieliniowej. Rysunek 5 przedstawia rozkłady strumienia magnetycznego dla dwóch różnych kroków czasowych. W czasie  $t = 0.033$  s (rys. 5a) zwora z magnesami trwałymi jest odpychana od rdzenia elektromagnesu, natomiast w czasie  $t = 0.066$  s (rys. 5b) kierunek przepływu prądu zmienia się i zwora jest przyciągana do ferromagnetycznego rdzenia.



Rys. 5. Rozkłady strumienia magnetycznego dla kroku czasowego: a) 0.033 s, b) 0.066 s



Rys. 6. Odształcenia platformy stołu wibrującego przy częstotliwości rezonansowej 281,75 Hz



W celu sprawdzenia, czy częstotliwość pracy urządzenia dochodząca do kilkudziesięciu herców nie pokrywa się z częstotliwością rezonansową platformy drgającej, przeprowadzono analizę modalną w programie Autodesk Inventor [11]. Wyznaczono kilka częstotliwości rezonansowych, jednak w badaniach, dla których stanowisko zostało przeznaczone nie przewiduje się wyższych ani zbliżonych częstotliwości działania. Na rysunku 6 zaprezentowano obraz pierwszej mody drgającej osiąganą przy częstotliwości rezonansowej równej 281,75 Hz.

#### 4. WNIOSKI

W pracy zaprezentowano sprzężony model polowo-obwodowo-mechaniczny elektromagnetycznego stołu wibracyjnego. Symulacja wykazała, że w tym układzie można pominąć wpływ nieliniowej charakterystyki magnesowania ferromagnetycznych rdzeni na ruch zwory, co przyspiesza obliczenia, natomiast koniecznym jest zastosowanie sprężyn o mniejszej sztywności. Dodatkowo stwierdzono, że częstotliwość rezonansowa platformy drgającej jest o jeden rząd wyższa od częstotliwości pracy urządzenia, dzięki czemu układ nie jest narażony na nadmierne deformacje. Autorzy pracy aktualnie pracują nad weryfikacją pomiarową zaproponowanego modelu obliczeniowego.

#### LITERATURA

- [1] <http://www.wibet.pl/oferta/stoly-wibracyjne/> – dostęp 25.01.2017.
- [2] Kulik M., Jagiela M., Coupled dynamic FE analysis of permanent-magnet mechanical vibration energy harvesting converter, *Poznan University of Technology Acad. Journals. Electr. Eng.*, vol. 85, pp. 245–254, 2016.
- [3] Demenko A., Mendrela E., Szelaż W., Finite element analysis of saturation effects in a tubular linear permanent magnet machine, *COMPEL The int. journal for computation and mathematics in electrical and electronic engineering*, vol. 25, pp. 43–54, 2006.
- [4] Buffa A., Maday Y., Rapetti F., Calculation of eddy currents in moving structures by a sliding mesh-finite element method, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 36, pp. 1356–1359, 2000.
- [5] Mitsutake Y., Hirata K., Dynamic response analysis of a linear solenoid actuator, *IEEE Transactions on Magnetism*, vol. 33, no. 2, pp. 1634–1637, 1997.
- [6] Schmidt E., Hamberger P., Inrush behaviour of a plunger core reactor with parallel winding paths obtained from field-circuit coupled finite element analyses, *Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering*, Niagara Falls, pp. 169–172, 2008.
- [7] Bolkowski S., Stabrowski M., Skoczylas J., Sroka J., Sikora J., Wincenciak S., *Komputerowe metody analizy pola elektromagnetycznego*, WNT, Warszawa, 1993.

- [8] Demenko A., Łyskawinski W., Wojciechowski R. M., Equivalent Formulas for Global Magnetic Force Calculation From Finite Element Solution, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 48, no. 2, pp. 195–198, 2012.
- [9] Tandon S.C., Armor A.F., Chari M.V.K., Nonlinear transient finite element field computation for electrical machines and devices, IEEE Transactions on Power and Systems, vol. PAS–102, no. 5, pp. 1089–1096, 1983.
- [10] Ebrahimi H., Gao Y., Dozono H., Muramatsu K., Comparison of Time Integration Methods in Magnetomechanical Problems, IEEE Transactions on Magnetics, vol. 51, no. 3, pp. 1–4, 2015.
- [11] Autodesk Inventor 2015 Help, [www.help.autodesk.com](http://www.help.autodesk.com).

### **COUPLED FIELD-CIRCUIT ANALYSIS OF THE ELECTROMAGNETIC VIBRATING TABLE**

This paper presents a coupled computational model for dynamic analysis of the electromagnetic vibrating table. The model contains description of the magnetic field and the electrical circuit taking account of the linear motion. Studied system consists of an electromagnet fixed on the steel slab and an aluminum plate suspended on springs with permanent magnets mounted underneath. In order to describe the magnetic circuit a two-dimensional finite element method is used. Coupling between the electrical and magnetic circuits is realized by current that flows through the winding of the electromagnet, whereas the coupling between the magnetic circuit and the mechanical model is accomplished by a magnetic force determined from the Maxwell's stress tensor. A linear movement is modeled using distorted elements. The influence of saturation of the magnetic circuit on the calculation results is examined showing small impact on the system performance.

*(Received: 09. 02. 2017, revised: 21. 02. 2017)*