

ZASTOSOWANIE RADIALNYCH FUNKCJI BAZOWYCH DO ANALIZY DRGAŃ WŁASNYCH POWŁOKI WALCOWEJ

Streszczenie

W pracy przedstawiono bezsiatkową metodę kolokacyjną Kansy i jej zastosowanie do analizy drgań własnych powłoki walcowej swobodnie podpartej. W analizie wykorzystano funkcję wielokwadratową, zaś uzyskane wyniki porównano z wynikami obliczeń uzyskanymi z modelu analitycznego.

WSTĘP

Rozwiązania projektowe kabin maszyn i pojazdów muszą spełniać szereg wymagań, pośród których są również i takie, które narzucają zapewnienie określonych warunków komfortu pracy. Jednym z wielu istotnych środków technicznych prowadzących do spełnienia wymagań jest odstrojenie częstości drgań własnych elementów kabiny od częstości drgań wymuszonych konstrukcji.

W powszechnej praktyce inżynierskiej do analizy zagadnienia własnego najczęściej wykorzystywana jest Metoda Elementów Skończonych. Metoda ta ze względu na powszechnie akceptowaną dokładność obliczeń i łatwą dostępność (implementacje znaleźć można w wielu pakietach inżynierskich oraz dostępnych darmowych programach komputerowych). Do zalet należy również brak konieczności przeprowadzenia jakichkolwiek obliczeń wstępnych. Problemem z wykorzystaniem MES do obliczeń jest to, że obliczenia dynamiczne z wykorzystaniem MES są obliczeniami przybliżonymi i niezbędny jest bardzo gęsty podział na elementy (w praktyce przyjmuje się taki podział by na długość fali przypadało co najmniej sześć elementów [7]). Tak gęsty podział prowadzi do znacznego zwiększenia rzędu macierzy głównej analizowanego problemu i co za tym idzie do wydłużenia czasu i kosztów obliczeń. Wszystkie wymienione powyżej zalety i wady można również wykorzystać do opisu Metody Różnic Skończonych. Znacznie mniej popularną od dotychczas wymienionych metod obliczeniowych jest Metoda Elementów Brzegowych, w której równania różniczkowe zastępuje się odpowiednio skonstruowanymi równaniami całkowitymi. Idea MEB jest w zasadzie taka sama jak MES, z tą różnicą, że w MEB podziałowi na elementy podlega jedynie brzeg rozpatrywanego obszaru. Prowadzi to w sposób naturalny do obniżenia wymiaru przestrzeni o jeden, tzn. brzeg obszaru trójwymiarowego jest obszarem dwuwymiarowym, a tylko on podlega podziałowi na elementy skończone. Obniżenie wymiaru skutkuje zmniejszeniem wymiaru macierzy głównej problemu, a więc czasu i kosztów obliczeń. Do wad metody zaliczyć można wymagany duży nakład pracy poświęcony na obliczenia wstępne, niezbędne w tej metodzie. Obliczenia te związane są z wyznaczeniem (obliczeniem) odpowiednich całek z funkcji z osobliwością (funkcja zmierzająca do nieskończoności dla jednej zmiennej niezależnej). Te właśnie obliczenia wstępne są główną przeszkodą w popularyzacji tej metody. Kłopotliwe przy obliczeniach numerycznych jest również to, że macierze główne analizowanego problemu są pełne w odróżnieniu od pasmowych macierzy w analizie MES.

Stosunkowo mało znaną, ale również możliwą do zastosowania jest Metoda Rozwiązań Fundamentalnych, która nie wymaga podziału na elementy całego analizowanego obszaru [1,2]. Co więcej zbędna jest również dyskretyzacja brzegu obszaru [9]. Niezbędny jest jedynie wybór odpowiedniej ilości punktów na brzegu (tzw. punktów kolokacyjnych) i taka sama lub większa ilość punktów źródłowych poza (na

zewnątrz) analizowanego obszaru. Macierz główna analizowanego problemu ma wymiar: ilość punktów kolokacyjnych \times ilość punktów źródłowych. Do rozwiązania takiego problemu wykorzystuje się metodę minimalizacji sumy kwadratu błędu lub rozkład według wartości osobliwych – rozkład SVD. Jedyną wielkością konieczną przy analizie MRF jest znajomość rozwiązania fundamentalnego [3,7], czyli funkcji Greena równania różniczkowego opisującego rozwiązywany problem. Do wad tej metody zaliczyć należy możliwość analizy jedynie prostych geometrii (konieczność znajomości funkcji Greena analizowanego problemu), nierozwiązanym dotąd problemem jest optymalna (ze względu na błąd metody) ilość i położenie zarówno punktów kolokacyjnych, jak i punktów źródłowych, im dalej od brzegu obszaru umieszczone są punkty źródłowe tym większa dokładność obliczeń, ale jednocześnie macierze główne stają się źle uwarunkowane, w takich przypadkach do rozwiązania stosuje się ciągłą lub dyskretną regularyzację.

Innym podejściem poszukiwania przybliżonego rozwiązania problemu własnego jest zastosowanie metody Kansy [5] bazującej na Radialnych Funkcjach Bazowych. Metoda ta nie wymaga stosowania jakichkolwiek siatek elementów. Znalazła ona szereg zastosowań do rozwiązania wielu różnych problemów mechaniki m.in. analiza problemów wymiany ciepła [13], analizy równań Naviera–Stokesa [4], analiza pola elektromagnetycznego [8] i wielu innych. Metody numeryczne wykorzystujące Radialne Funkcje Bazowe charakteryzuje podstawowa własność polegająca na transformacji problemów wielowymiarowych do problemów jednowymiarowych. W pracy zastosowano kolokacyjną metodę Kansy wraz z wielokwadratową radialną funkcją bazową do analizy drgań własnych powłoki walcowej, która może być zastosowana do przybliżenia poszycia dachu kabin maszyn i pojazdów.

1. RADIALNE FUNKCJE BAZOWE

Funkcja radialna to każda funkcja jednej zmiennej, postaci:

$$\varphi_j(r) = \varphi(\|x - x_j\|) \quad (1)$$

gdzie: $\|x - x_j\|$ jest Euklidesową odległością pomiędzy punktami x i x_j . Punkt x_j jest nazwany centrum funkcji radialnej (1). Zmieniając położenie centrów otrzymuje się rodzinę funkcji, która tworzy bazę wykorzystywaną do interpolacji lub aproksymacji dowolnej funkcji. Każdą z funkcji bazowych (1) zaliczyć można do jednej z kategorii: funkcje o zwartym nośniku, tj. funkcje które są różne od zera jedynie w sferze o promieniu r (najczęściej $r = 1$) lub funkcje o nośniku nieograniczonym ($r \rightarrow \infty$). Najczęściej wykorzystywanymi funkcjami

z pierwszej kategorii są zamieszczone w tabeli 1 funkcje Wendlana [12]. W tabeli 2 pokazano przykłady funkcji o nośniku nieograniczonym.

Tab.1. Bazowe funkcje radialne o zwartym nośniku [12]

Wymiar przestrzeni	Definicja funkcji
d = 1	$\varphi(r) = (1-r)_+$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^3(3r+1)$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^5(8r^2+5r+1)$
d = 2, 3	$\varphi(r) = (1-r)_+^2$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^4(4r+1)$
	$\varphi(r) = (1-r)_+^6(35r^2+18r+3)$

gdzie:

$$\phi(r) = (1-r)_+^n = \begin{cases} (1-r)^n, & \text{dla } r \in \langle 0,1 \rangle \\ 0, & \text{dla } r > 1 \end{cases}$$

Tab.2. Bazowe funkcje radialne o nośniku nieograniczonym [6]

Nazwa funkcji	Definicja funkcji
liniowa	$\varphi(r) = r$
sześcienne	$\varphi(r) = r^3$
wielokwadratowa	$\varphi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$
cienkiej płyty	$\varphi(r) = r^2 \ln(r)$
wielokwadratowa odwrotna	$\varphi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$
Gausa	$\varphi(r) = e^{-cr^2}$

W pracy wykorzystano funkcję wielokwadratową, która dla zagadnień trójwymiarowych przyjmuje postać:

$$\varphi_j(r) = \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + (z-z_j)^2 + c^2} \quad (2)$$

Kształt funkcji (2) zależy od parametru kształtu c. Wraz ze wzrostem jego wartości funkcja (2) staje się bardziej płaska, przez to małowrażliwa na zmiany odległości pomiędzy punktem i centrum funkcji radialnej.

2. METODA KANSY

Analizowane zagadnienie początkowo brzegowe opisane jest równaniem postaci:

$$Lu = f(x), \quad x \in \Omega \quad (3)$$

z warunkami brzegowymi:

$$Bu = g(x), \quad x \in \Gamma \quad (4)$$

gdzie: L jest liniowym operatorem różniczkowym, B jest operatorem opisującym warunki brzegowe, Ω to analizowany obszar, Γ to brzeg tego obszaru.

Idea metody Kansy polega na aproksymacji rozwiązania problemu początkowo brzegowego (3), (4) za pomocą sumy szeregu rodziny funkcji radialnych, tj.:

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^N \alpha_j \varphi_j(r) \quad (5)$$

Współczynniki α_j wyznaczone są w procedurze kolokacji. W tym celu należy wybrać zbiór N₀ punktów {x₁, x₂, ..., x_{N0}} należących do obszaru Ω, w których żąda się by przybliżone rozwiązanie (5) spełniało równanie (3).

$$L\hat{u} = f(x_i) \Leftrightarrow \sum_{j=1}^N \alpha_j L\varphi_j(r_i) = f(x_i) \quad (6)$$

Podobnie należy wybrać zbiór N_b punktów {x_{N0+1}, x_{N0+2}, ..., x_{N0+Nb}} na brzegu Γ analizowanego obszaru. W tych punktach muszą zostać spełnione równania warunków brzegowych (4).

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j B\varphi_j(r_i) = g(x_i) \quad (7)$$

Równania (6) i (7) stanowią liniowy układ równań, który zapisać można w postaci macierzowej:

$$A\alpha = f \quad (8)$$

Z układu równań (8) można wyznaczyć poszukiwane współczynniki α_j. W przypadku gdy suma liczby wybranych punktów obszaru Ω tj. N₀ i liczby punktów brzegowych N_b jest równa liczbie punktów centralnych N (N₀+N_b=N) układ (8) rozwiązać można stosując metodę eliminacji Gaussa, w przypadku gdy N₀+N_b > N układ (8) jest nadokreślony i należy poszukiwać rozwiązania metodą najmniejszych kwadratów np. stosując rozkład SVD.

3. ANALIZA DRGAŃ WŁASNYCH POWŁOKI WALCOWEJ

W pracy analizowane drgania własne powłoki walcowej o małej wyniosłości, opisanej równaniem [10]:

$$c^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} - k^2 \nabla^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad (9)$$

gdzie:

$$c^2 = \frac{h^2}{12(1-\nu^2)R^2}, \quad k^2 = \frac{\gamma R^2}{Eg} \omega^2$$

Funkcja Φ z równania (9) musi dodatkowo spełniać warunki brzegowe. W pracy analizowano przypadek powłoki walcowej przedstawionej na rysunku 1 z warunkiem brzegowym typu swobodne podparcie. Zależność pozwalająca określić częstotliwości drgań własnych ω_{mn} opisana jest następującym wyrażeniem [10]:

$$\omega_{mn}^2 = \frac{g}{\gamma h R^2} \left[\frac{D}{R^2} (\lambda_n^2 + \chi_m^2)^2 + \frac{Eh\lambda_n^4}{(\lambda_n^2 + \chi_m^2)^2} \right] \quad (10)$$

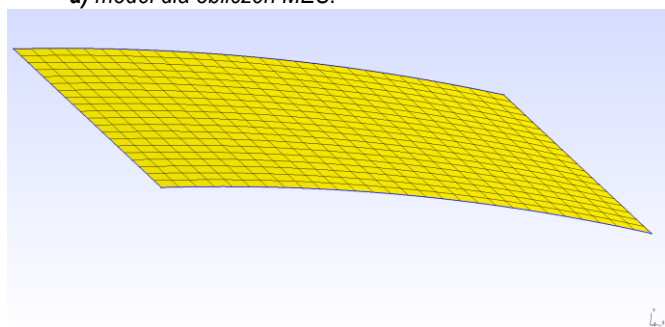
gdzie:

$$\lambda_n = \frac{n\pi R}{a}, \quad \chi_m = \frac{m\pi}{\beta_0}$$

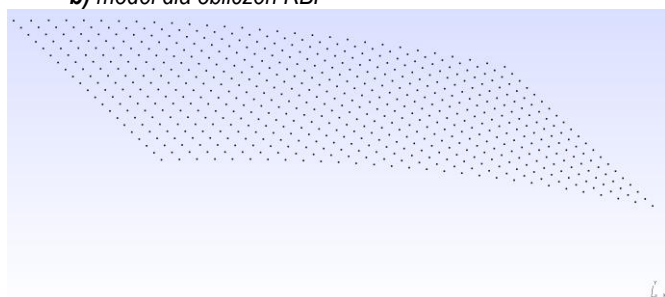
przy czym: $m, n = 1, 2, \dots$, zaś g oznacza przyspieszenie ziemskie, γ ciężar właściwy materiału, h grubość powłoki, R promień powłoki walcowej, ν współczynnik Poissona, E moduł Younga, D sztywność walcową na zginanie.

W przypadku długich powłok częstotliwości podstawowej odpowiadają dwie półfale poprzeczne i jedna podłużna.

a) model dla obliczeń MES:



b) model dla obliczeń RBF



Rys.1. Modelowana powłoka walcowa

Do obliczeń przyjęto wymiary powłoki wynoszące:

- długość 1,6 [m],
- rozpiętość 1,2 [m],
- wznios 0,04 [m].

Wykorzystanie kolokacyjnej metody Kansy prowadzi do układu równań postaci:

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0 \quad (11)$$

gdzie elementy macierzy \mathbf{A} zależą również od warunków brzegowych płyty. Częstotliwości drgań własnych płyty tj. nietrywialne rozwiązanie układu równań (11) otrzymuje się ze spełnienia warunku $\det \mathbf{A} = 0$.

Dla oceny wyników z przeprowadzonej aproksymacji częstotliwości drgań własnych uzyskanych z analizy przybliżonej opartej na funkcjach radialnych (RBF) z wynikami obliczeń na podstawie modelu określonego zależnością (10) przyjęto miarę błędu względnego wyrażony wzorem:

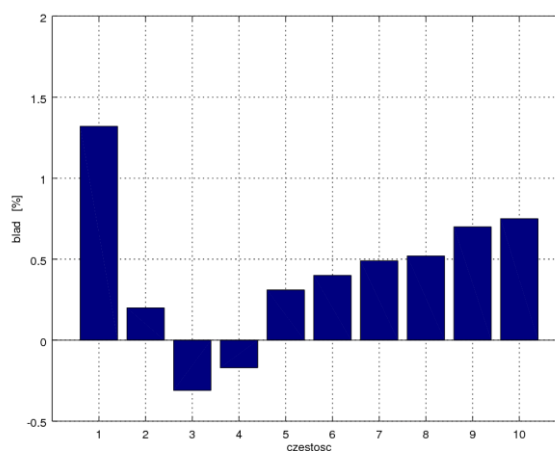
$$\delta = \frac{\omega_i^{RBF} - \omega_i^A}{\omega_i^A} \cdot 100\%$$

W podobny sposób wyznaczono błąd dla wyników uzyskanych z obliczeń Metodą Elementów Skończonych (MES):

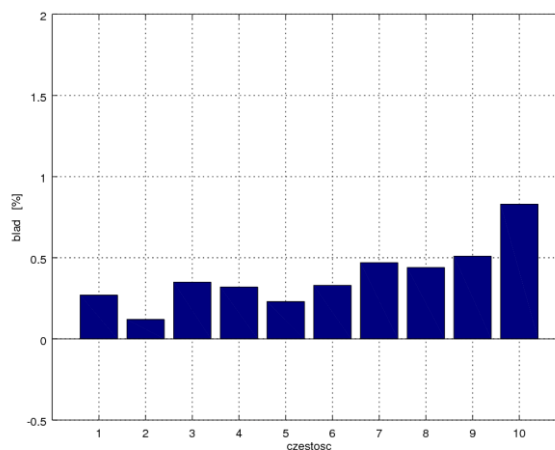
$$\delta = \frac{\omega_i^{MES} - \omega_i^A}{\omega_i^A} \cdot 100\%$$

Wartości błędów wyznaczonych dla 10 pierwszych częstotliwości własnych powłoki walcowej swobodnie podpartej metodą korzystającą z RBF oraz MES prezentuje rysunek 2.

a) metoda RBF



b) MES



Rys. 2. Wartości błędów przy wyznaczaniu wartości własnych powłoki walcowej

Uzyskane wyniki wskazują na stosunkowo dużą dokładność analizy problemu własnego z wykorzystaniem metody bezsiatkowej opartej na metodzie kolokacyjnej Kansy i funkcji wielokwadratowej.

PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono metodę kolokacyjną Kansy, którą wraz z funkcją wielokwadratową zastosowano do analizy problemu własnego powłoki walcowej. Powłoka walcowa jest jedną z możliwych do zastosowania jako model poszycia dachów kabin maszyn i pojazdów. Przyjęta do obliczeń funkcja wielokwadratowa jest funkcją o tzw. nieograniczonym nośniku, której działanie rozciąga się do całego obszaru.

Dla oceny dokładności metody analizy, porównano wyznaczone częstotliwości drgań własnych powłoki z wartościami uzyskanymi w drodze obliczeń analitycznych. Dodatkowo porównano wyniki obliczeń Metodą Elementów Skończonych z rozwiązaniem ścisłym. Uzyskane rezultaty wskazują na dużą dokładność analizy problemu własnego z wykorzystaniem metody bezsiatkowej opartej na Radialnych funkcjach Bazowych.

BIBLIOGRAFIA

1. Alves C.J.S., Antunes P.R.S., The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigenfrequencies and eigenmodes of 2D simply connected shapes. *Computers, Materials & Continua* 2005, nr 2.
2. Alves C.J.S., Chen C.S., A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems. *Advances in Computational Mathematics* 2005, nr 23.
3. Alves C.J.S., Valtchev S.S., Numerical comparison of two meshfree methods for acoustic wave scattering. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 2005, nr 53.
4. Chinchapatnam P.P., Djidjeli K., Nair P.B., Radial basis function meshless method for the steady incompressible Navier-Stokes equation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 84, 2007, pp.1509-1526.
5. Kaliski S., *Drgania i fale*. PWN, Warszawa 1986.
6. Kansa E.J., Multiquadratic a scattered data approximation scheme with application to computational fluid dynamics. *Computers & Mathematics with Applications* 19, 1990, pp. 147-165.
7. Kang S.W., Lee M.J. Kang Y.J., Vibration analysis of arbitrary shaped membranes using non-dimensional dynamic influence function. *Journal of Sound and Vibration* 1999, nr 221
8. Karageorghis A., The method of fundamental solutions for the calculation of the eigenvalues of the Helmholtz equation. *Applied Mathematics Letters* 2001, nr 69.
9. Osiński Z., *Teoria drgań*. PWN, Warszawa 1980.
10. Solecki R., Szymkiewicz J., *Układy prętowe i powierzchniowe. Obliczenia dynamiczne*. Arkady, Warszawa 1964.
11. Vu P., Fasshauer G.E., Application of two radial basis function-pseudospectral meshfree methods to three-dimensional electromagnetic problems. *IET Science, Measurements & Technology*, 5, 2011 pp. 206-210.
12. Reutskiy S.Y., The method of external sources for eigenvalue problems with Helmholtz equation. *Computer Modeling in Engineering & Science* 2006, nr 12.
13. Wawrzynek A., Detka M., Cichoń Cz., Zastosowanie metody R-funkcji do wyznaczania współczynnika przejmowania ciepła. *Modelowanie Inżynierskie* 43, Gliwice 2012, s.255-263.
14. Wendland H., Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics* 4, 1995, pp.389-396.
15. Zerroukat M., Power H., Chen C.S., A numerical method for heat transfer problem using collocation and radial basis function. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42, 1998, pp. 1263-1278.

APPLICATION OF RADIAL BASIS FUNCTIONS TO DYNAMIC ANALYSIS OF A CYLINDRICAL SHELL

Abstract

This paper describes a meshless Kansa collocation method and its application to dynamic analysis of a cylindrical shell. Multiquadratic functions were used in analysis. All results were compared to analytical result.

Autorzy:

dr hab. inż. **Leszek Majkut** – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza,
e-mail: majkut@agh.edu.pl

dr inż. **Ryszard Olszewski** – AGH Akademia Górniczo – Hutnicza,
e-mail: olszewsk@agh.edu.pl

Wydane w ramach działalności statutowej nr 11.11.130.955