

Prof. dr hab. inż. Leszek MIESZKALSKI
Katedra Organizacji i Inżynierii Produkcji
Wydział Inżynierii Produkcji
SGGW w Warszawie

MATEMATYCZNE MODELOWANIE KSZTAŁTU GŁÓWKI CEBULI CUKROWEJ (*Allium cepa* L.) ZA POMOCĄ RÓWNAŃ PARAMETRYCZNYCH®

Mathematical modeling of the shape of the onion head saccharic
(*Allium cepa* L.) by the parametric equations®

Słowa kluczowe: główka cebuli, kształt, model matematyczny, równania parametryczne.

*W artykule zaprezentowano metodę matematycznego modelowania kształtu główki cebuli cukrowej odmiany Alonso (*Allium cepa* L.). W modelu matematycznym zastosowano równania parametryczne. Do modelowania wybrano cebulę dużą o wymiarach: długość 147 mm, szerokość 125 mm i grubość 120 mm. Opracowano modele 3D główki cebuli bez zeschniętego szczypioru, z zeschniętym szczypiorem krótkim i z zeschniętym szczypiorem długim. Zapisane współrzędne węzłów siatki powierzchni modelu główki cebuli mogą być wykorzystane w projektowaniu pojemników metodą druku 3D.*

Key words: head of onions, shape, mathematical model, parametric equations.

*The article presents the method of mathematical modeling of the shape of the head of onion varieties of Alonso (*Allium cepa* L.). The mathematical model used parametric equations. The model chosen onion large dimensions: length 147 mm, width 125 mm and a thickness of 120 mm. 3D models head onion have been developed without dry chives, short dry chives and long dry chives. Saved node coordinates the surface mesh model onion bulbs can be used in the design of containers by 3D printing.*

WSTĘP

Cebula (*Allium cepa* L.) jest popularnym warzywem używanym w codziennej diecie człowieka. Uprawiana jest w ponad 175 krajach. Według danych FAO [2, 4] największym producentem cebuli na świecie są Chiny (205.080.000 ton) a następnie Indie (133.720.000 ton). Stany Zjednoczone Ameryki produkują 33.210.000 ton cebuli, a Rosja 15.360.000 ton. W pozostałych krajach produkcja wynosi 355.140.000 ton. Świetlikowska i in. [13] podają, że cebula zawiera olejki eteryczne, siarkowe, flawonole i glukozydy flawonolowe oraz wiele innych związków mających właściwości antyseptyczne i lecznicze. Po usunięciu suchej łuski i przekrojeniu lub rozdrobnieniu pochw liściowych (łuski mięsiste) związki o silnym zapachu i właściwościach bakterioobójczych (allycyna) ulatniają się. Podczas przygotowywania posiłków nie zawsze wykorzystywana jest cała główka cebuli, zwłaszcza o dużej masie powyżej 120 g. Zachodzi potrzeba przechowywania niewykorzystanej części główki cebuli w pojemniku dostosowanym do kształtu [7] cebuli i ograniczenia w ten sposób ulatniania olejków eterycznych do atmosfery. Cebula jest surowcem do produkcji niektórych preparatów farmaceutycznych. Na ocenę jakości cebuli składa się: zdrowotność, wielkość uszkodzeń, wilgotność, dojrzałość, podstawowe wymiary geometryczne, kształt, barwa łuski suchej i mięsistej, liczba suchych łusek, długość zeschniętej szyjki, obecność korzeni, jednolitość. Jakość cebuli powinna być taka, aby mogła ona wytrzymać transport i czynności manipulacyjne w procesie jej przetwarzania oraz dotrzeć do miejsca przeznaczenia zachowując wartość handlową [1].

Na procesy związane z obróbką i przetwórstwem cebuli ma wpływ jej kształt. Ocena cech morfologicznych cebuli wykazała istnienie różnych grup kształtu, a także koloru suchej łuski i łuski mięsistej [6, 10, 13]. Świetlikowska i in. [13] określają kształt cebuli jako: eliptyczny, jajowaty, szeroko elipsoidalny, kulisty, szeroko owalny, szeroko owalnie jajowaty, romboidalny, kulisto płaski, płaski. Cebula jest wrażliwa na warunki pogodowe w czasie zbioru. Podczas wstępnego podsuszania cebuli na polu w wałach pogoda deszczowa jest niekorzystna, gdyż w niewysuszonej warstwie cebuli może rozwijać się pleśń [12]. Na zdolność do przewietrzania złożonej cebuli w złożu ma wpływ kształt cebuli, jej wielkość, długość szczypioru i porowatość złoża. Łapczyńska-Kordon i Roczkowska-Chmaj [9] opracowały matematyczny model kinetyki rehydratacji suszu cebuli, gdzie na proces dyfuzji ma wpływ kształt rozdrobnionych cząstek cebuli. Według Bohdziewicz i Czachora [3] trudno jest podczas selekcji wymiarowej uzyskać kulisty kształt cebuli. Zauważyli, że egzemplarze o większych wymiarach miały kształt wydłużonej bądź spłaszczonej elipsoidy. Pomimo podobieństwa wymiarów i masy poszczególnych egzemplarzy cebuli odpowiedź na zadane obciążenie zewnętrzne jest niejednakowa. Ghagel i in [5] opracowali model, za którego pomocą jest możliwe przewidywanie masy cebuli na podstawie jej wielkości i kształtu.

Kształt i cechy geometryczne należą do podstawowych parametrów uwzględnianych przy projektowaniu sortowników, przenośników, opakowań [11]. Modele matematyczne kształtu cebuli są stosowane przy projektowaniu procesów roboczych związanych z jej przetwarzaniem takich jak cięcie,

obróbka termiczna. W sortownikach do warzyw, w tym i cebuli, są stosowane czujniki pracujące w bliskiej podczerwieni pozwalające klasyfikować warzywa pod względem koloru, kształtu, uszkodzeń, ciał obcych [8]. Problemem do rozwiązania jest matematyczne opisanie kształtu główki cebuli o dużej masie a tym samym dużej średnicy, która przekracza 100 mm. Zapisane współrzędne węzłów siatki powierzchni modelu cebuli są podstawą projektowania indywidualnych pojemników. Pojemniki o kształcie zbliżonym do cebuli mogą być wytwarzane technologią z zastosowaniem drukarek 3D.

Celem artykułu jest przedstawienie opracowanego na podstawie równań parametrycznych modelu matematycznego kształtu powierzchni zewnętrznej główki cebuli o średnicy powyżej 100 mm.

MATERIAŁ DO BADAŃ

Materiałem do badań była cebula cukrowa odmiany Alonso. Do modelowania z próby 108 egzemplarzy wybrano cebulę o średnicy większej od 100 mm. Za pomocą suwmiarki z dokładnością do 0,5 mm zmierzono jej długość, szerokość oraz grubość. Wybrana cebula (rys. 1) miała następujące wymiary: długość 147 mm, szerokość 125 mm, grubość 120 mm.



Rys. 1. Wybrana do modelowania cebula cukrowa odmiany Alonso.

Fig. 1. Selected for modeling saccharic onion Alonso varieties.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Cebulę fotografowano aparatem Panasonic LUMIX DMC-TZ3. Odległość obiektywu od fotografowanego obiektu wynosiła 400 mm. Zdjęcia o wymiarach 2560x1712 pikseli zapisywano w formacie JPEG.

Kształt powierzchni cebuli opisano równaniami parametrycznymi. Opracowano trzy modele 3D kształtu główki

cebuli: cebuli bez zeschniętego szczypioru, z długim zeschniętym szczypiorem, z krótkim zeschniętym szczypiorem. W celu weryfikacji kształtu modelu 3D główki cebuli porównano, w ustalonych przekrojach na wysokościach 15, 25, 50, 75, 100, 115 mm, wymiary długości odcinków łączących kontury rzutów na płaszczyznę XY modeli 3D cebuli z odpowiednimi wymiarami długości tych odcinków w odniesieniu do rzeczywistej cebuli. Wyznaczono błąd względny.

OPIS METODY TWORZENIA MODELU SIATKOWEGO POWIERZCHNI GŁÓWKI CEBULI

Równanie parametryczne współrzędnej XsR w zapisie macierzowym do opisu grubości główki cebuli ma następującą postać:

$$XsR_{i,j} = \frac{asz}{2} \cdot \sin(\xi_i)^k \cdot \cos(\zeta_j) \quad (1)$$

Równanie parametryczne współrzędnej YsR w zapisie macierzowym do opisu szerokości główki cebuli ma następującą postać:

$$YsR_{i,j} = \frac{bsz}{2} \cdot \sin(\xi_i)^m \cdot \sin(\zeta_j) \quad (2)$$

Równanie parametryczne współrzędnej ZsR w zapisie macierzowym do opisu długości główki cebuli ma następującą postać:

$$ZsR_{i,j} = \frac{csz}{2} \cdot \cos(\xi_i + \chi) \quad (3)$$

Gdzie: N – rozmiar macierzy, i – liczba wierszy, j – liczba kolumn, c – kąt mający wpływ na zmianę kształtu modelowanej bryły.

$$\xi_i = i \cdot \frac{\pi}{N} \quad (4)$$

$$\zeta_j = j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{N} \quad (5)$$

Zmiana w równaniach 1, 2 wartości parametrów asz i bsz należących do zbioru liczb rzeczywistych wpływa na zmianę kształtu warstwic bryły w rzucie na płaszczyznę XY układu współrzędnych XYZ . Zmianie ulegają również kształty rzutów bryły na płaszczyznach XZ i YZ . Jeżeli $asz=bsz$, to warstwic są okręgami. Jeżeli $asz < bsz$, to warstwic w płaszczyźnie XY przyjmują kształt zbliżony do eliptycznego. Długa oś warstwic jest skierowana wzdłuż osi Y układu współrzędnych XYZ . W przypadku, gdy $asz > bsz$ wówczas długa oś warstwic jest skierowana wzdłuż osi X układu współrzędnych. Zmiana wartości parametru csz w równaniu 3 wpływa na zmianę kształtu południków bryły w rzucie na płaszczyzny XZ i YZ układu współrzędnych XYZ . Przez zmianę wartości parametrów asz , bsz i csz są ustalane podstawowe wymiary bryły jej długość (csz), szerokość (bsz) i grubość (asz). Zmiana w równaniu 3 wartości wykładników potęg k , m należących do zbioru liczb naturalnych powoduje zmianę kształtu bryły. Jeżeli $k=m=0$ i $asz=bsz$, $csz > 0$, to otrzymuje się powierzchnię cylindryczną o wymiarach $asz=bsz$, csz . Zmianę kształtu powierzchni cylindrycznej przez zamknięcie

powierzchni w obszarach podstaw dolnej i górnej uzyskuje się przez zmianę wartości wykładników potęg dla $k > 0, m > 0$. Jeżeli $k=1, m=0$, to krawędzie zamykające powierzchnię zewnętrzną bryły w punkcie są skierowane wzdłuż osi Y , natomiast gdy $k=0, m=1$, to krawędzie zamykające są skierowane wzdłuż osi X . W przypadku gdy, $k=1, m=1$, to zamknięcia powierzchni występują w punktach $[0, 0, -csz/2]$, $[0, 0, csz/2]$. Zmianę kształtu bryły w obszarach zamknięcia powierzchni uzyskuje się przez zmianę w równaniu 3 wartości kąta c należącego do zbioru liczb rzeczywistych.

W celu uzyskania zadanych wymiarów długości (asz), szerokości (bsz), grubości (asz) modelu główki cebuli należy dokonać skalowania równań 1, 2, 3. Niżej są zapisane wyskalowane macierzowe równania współrzędnych X_s, Y_s, Z_s punktów węzłowych siatki powierzchni zewnętrznej główki cebuli:

$$X_s = \frac{asz}{\max(XsR) - \min(XsR)} \cdot XsR \quad (6)$$

$$Y_s = \frac{bsz}{\max(YsR) - \min(YsR)} \cdot YsR \quad (7)$$

$$Zas = \frac{asz}{\max(ZsR) - \min(ZsR)} \cdot ZsR \quad (8)$$

W celu uzyskania główki cebuli z długim szczypiorem w równaniu 9 wprowadzono współczynnik b , jego wartość mieści się w przedziale od 1 do 1,9.

$$Zs_{i,j} = Zas \cdot \beta \quad (9)$$

WYNIKI MODELOWANIA ICH ANALIZA I WERYFIKACJA MODELI

Kształt modelu 3D główki cebuli opisują równania od 1 do 9, a wartości parametrów sterujących jej kształtem są zapisane w tabeli 1.

Tabela 1. Wartości parametrów sterujących kształtem modelu 3D główki cebuli

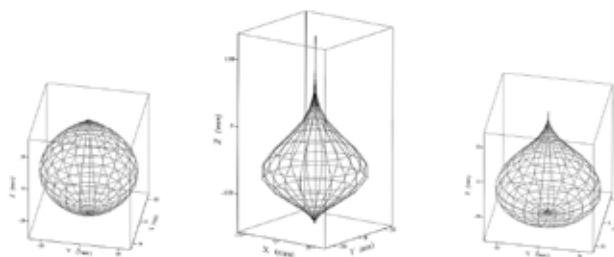
Table 1. Values of parameters that control the shape of a 3D model of the head of onion

Oznaczenie parametru	Cebula bez szczypioru (model I)	Cebula z zeschniętym szczypiorem	
		Szczypior długi (model II)	Szczypior krótki (model III)
asz	120	120	120
bsz	125	125	125
csz	147	147	147
k	2	10	3
m	2	10	3
c	0,1	0,5	0,6
b	1	1,9	1

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Na rysunku 2 zamieszczono modele 3D główki cebuli utworzone na podstawie równań 6, 7, 9. W proponowanych równaniach parametrycznych opisujących kształt dużej główki cebuli wykładniki potęg k i m zawierają się w zbiorze liczb naturalnych od 2 do 10. Wartości kąta c należącego do zbioru liczb rzeczywistych mającego wpływ na zmianę kształtu bryły w obszarach zamknięcia powierzchni należą do przedziału od 0,1 do 0,6. Wartość współczynnika b dla główki cebuli bez szczypioru i z krótkim zeschniętym szczypiorem wynosi 1, natomiast dla główki cebuli z długim szczypiorem 1,9.

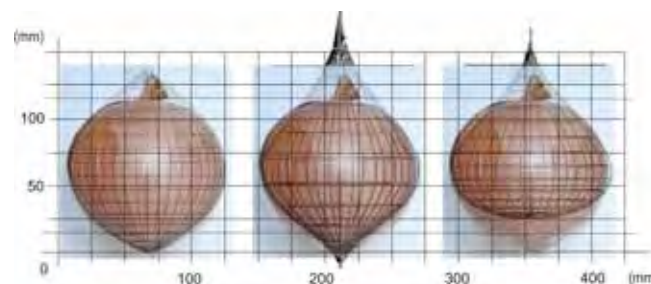


Rys. 2. Modele 3D (I, II, III) główki cebuli utworzone na podstawie równań 6, 7, 9.

Fig. 2. 3D models (I, II, III), onion bulbs formed by equations 6, 7, 9.

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study



Rys. 3. Rzuty na płaszczyznę YZ rzeczywistej bryły główki cebuli i jej modeli 3D (I, II, III).

Fig. 3. Projection for the YZ plane head onion and its 3D models (I, II, III).

Źródło: Opracowanie własne

Source: Own study

Tabela 2. Wartości błędów względnego (%) dla porównania wymiarów cebuli odmiany Alonso, z jej trzema modelami 3D

Table 2. The values of relative error (%) for comparing the dimensions of onion varieties Alonso, with its three 3D models

Wysokość przekroju (mm)	Numer modelu 3D główki cebuli		
	I	II	III
15	-4,6	13,8	-
25	2,1	15,8	-
50	0	0	0
75	0	1,7	2,2
100	-3,8	5	6,6
115	-66,4	-66,5	-62,9

Źródło: Badania własne

Source: The own study

W celu weryfikacji modelu matematycznego opisującego kształt dużej główki cebuli odmiany Alonso nałożono na siebie, na tle poziomych linii wykresu (rys. 3), rzutowane na płaszczyznę YZ fotografie główki cebuli i rzuty trzech jej modeli. Linie poziome przecinają obraz rzutu modelu i obraz rzutu rzeczywistej bryły główki cebuli. Linie poziome przekrojów leżących na wysokościach 15, 25, 50, 75, 100, 115 mm, przecinają się z konturami rzutów i wyznaczają długości przekrojów. Po wyznaczeniu różnic między długościami zaznaczonych przekrojów główki cebuli i jej modeli określono błąd względny, a wyniki zamieszczono w tabeli 2.

Z analizy wyników porównań zawartych w tabeli 2 wynika, że dokładność modelu I dużej główki cebuli bez zeschniętego szczypioru jest wystarczająca dla celów praktycznych, ponieważ błąd względny w zaznaczonych przekrojach modelu w obszarze główki cebuli zawiera się w granicach od -4,6 do 0%. Duży błąd względny wynoszący -66,4% wystąpił w obszarze zeschniętego szczypioru. Podobne wartości błędów względnego w obszarze zeschniętego szczypioru wystąpiły w przypadku modelu II (-66,5%) i modelu III (-62,9%). Model II opisuje niedokładnie kształt główki cebuli w obszarze jej piętki ponieważ błąd względny dla przekroju na wysokości 15 mm wynosi 13,8%, a dla przekroju na wysokości 25 mm wynosi 15,8%. Model III również opisuje niedokładnie kształt główki cebuli zarówno w obszarze jej piętki jak i dla przekroju na wysokości 100 mm błąd względny wynosi 6,6%.

WNIOSKI

1. Proponowane równania parametryczne mogą być stosowane do modelowania kształtów dużych główek cebuli bez zeschniętego szczypioru.
2. Opracowany model 3D bryły odwzorowujący kształt dobrze wykształconej główki cebuli może służyć do reprezentowania rzeczywistych cebul wszędzie tam, gdzie jest wymagana dokładność odwzorowania kształtu na poziomie nie przekraczającym 5%.
3. Odwzorowane równaniami parametrycznymi modele kształtu główki cebuli mają takie same wymiary podstawowe (długość, szerokość, wysokość) jak odpowiadająca im rzeczywista główka cebuli.
4. Proponowana metoda modelowania kształtu główki cebuli może ułatwić projektowanie indywidualnych pojemników i ich wykonanie metodą druku 3D.

LITERATURA

- [1] **AKADEMICKI F., NAWROCKA B. (red.). 2005.** *Metodyka integrowanej produkcji cebuli. Integrowana produkcja urzędowo kontrolowana.* Warszawa: Państwowa Inspekcja Ochrony Roślin i Nasiennictwa. Główny Inspektorat. www.plorin.gov.pl
- [2] **BALOCH R.A., BALOCH S.U., BALOCH S.K., BALOCH H.N., BADINI S.A., BASHIR W, BALOCH A.B., BALOCH J. 2014.** „Economic Analysis of Onion (*Allium cepa L.*) Production and Marketing in District Awaran, Balochistan”. *Journal of Economics and Sustainable Development* 5 (24): 192 – 206, ISSN 2222-1700 www.iiste.org
- [3] **BOHDZIEWICZ J., CZACHOR G. 2010.** „Wpływ obciążenia na przebieg odkształcenia warzyw o kształcie kulistym”. *Inżynieria Rolnicza* 1(119): 85 – 91.
- [4] **FAO, 2012.** *Major Food And Agricultural Commodities And Producers – Countries By Commodity.* Food and Agriculture Organization of the United Nations. www.Fao.org. Retrieved 2012-05-18.
- [5] **GHABEL R., RAJABIPOUR A., GHASEMI-VARNAMKHAZI M., OVEISI M. 2010.** „Modeling the mass of Iranian export onion (*Allium cepa L.*) varieties using some physical characteristics”. *Res. Agr. Eng.* 56, 1: 33–40.
- [6] **GHAFFARI H., MARGHOUB N., SHEIKHDARABADI M.S., HAKIMI A., ABBASI F. 2013.** *Physical properties of three Iranian onion varieties.* *International Research Journal of Applied and Basic Sciences*, ISSN 2251-838X, 7 (9): 587-593, www.irjabs.com
- [7] **Katalog Betterware. 2012.** www.betterware.pl
- [8] **Katalog firmowy. 2012.** Wysoko wydajny sortownik optyczny. Owoce i warzywa. *Innovation in Storting & Food Processing.* www.ODENBERG.COM
- [9] **ŁAPCZYŃSKA-KORDON B., ROCZKOWSKA-CHMAJ S. 2009.** „Matematyczny model kinetyki rehydratacji suszu warzywnego”. *Inżynieria Rolnicza* 9(118): 131 – 137.
- [10] **MARTÍNEZ A.R., PAZ J.F., ARES J.L.A. 2005.** „Evaluation of local onion lines from northwest Spain”. *Spanish Journal of Agricultural Research* 3(1): 90 – 97.
- [11] **MIESZKALSKI L. 2011.** „Komputerowe wspomaganie matematycznego modelowania kształtu cebuli za pomocą krzywej przestrzennej”. *Postępy Techniki Przetwórstwa Spożywczego* 2: 52 – 57.
- [12] **RANA S.S., SINIJA V.R. 2014.** „Study on curing of big Bellary onion when cured in Modular Ventilated Structure and by other popular curing practices”. *International Journal of Latest Trends in Engineering and Technology (IJLTET)* Vol. 4, 4: 150 – 156, ISSN: 2278-621X.
- [13] **ŚWIETLIKOWSKA K. (red.). 2008.** *Surowce spożywcze pochodzenia roślinnego.* Warszawa: Wydawnictwo SGGW. ISBN 978-83-7244-929-0.