

# 17<sup>th</sup> SYMPOSIUM ON HYDROACOUSTICS

Jurata May 23-26, 2000



## PROPAGATION OF ACOUSTICAL WAVES IN GAS-LIQUID MIXTURE

Jaromir Jakacki,  
Institute of Oceanology PAS, Sopot, ul. Powstańców W-wy 55, Poland  
[jakacki@iopan.gda.pl](mailto:jakacki@iopan.gda.pl)

### ABSTRACT

*The paper presents a simple mathematical model of wave propagation through bubbly water. Basing on the Zabolotska and Soluyan semiempirical theory of bubble oscillation nonlinear properties of a medium was estimated. The upper frequency limit of detection of nonlinearity parameter in free gas – bubble mixture was established.*

### WPROWADZENIE

Poruszające się masy powietrza generują na powierzchni morza powierzchniowe fale grawitacyjne, nazywane również falami wiatrowymi, które przy wystarczającej sile wiatru załamują się. Załamujące się fale wtłaczają powietrze pod powierzchnię wody, wytwarzając chmury pęcherzyków gazowych w podpowierzchniowej warstwie morza. Obecność pęcherzyków pod powierzchnią powoduje, że ośrodek przestaje być jednorodnym, co w znacznym stopniu zmienia warunki propagacji fal sprężystych. Właściwości akustyczne pęcherzyków gazowych znacznie różnią się od właściwości wody np. impedancja akustyczna powietrza znajdującego się w pęcherzykach jest prawie  $10^4$  razy mniejsza od impedancji wody. Pojedyncze pęcherzyki stanowią prosty układ rezonansowy o znacznej dobroci co w sposób istotny wpływa na propagację fali w ośrodku [1]. Już niewielka ilość pęcherzyków gazowych w wodzie powoduje wzrost ściśliwości ośrodka, co w konsekwencji zwiększa dyspersyjność i nieliniowość ośrodka.

W poniższej pracy przedstawiono prosty model matematyczny propagacji fali w ośrodku zawierającym pęcherzyki gazowe. Model rozpatruje wyłącznie wpływ pęcherzyków gazowych na propagację fali. Dla ilustracji problemu propagacji fali w ośrodku niejednorodnym wykorzystane zostanie podejście zaproponowane przez Zabołotską i Solujana [2] przedstawiające równanie drgań pęcherzyka poprzez zmiany objętości. Ogranicza to nasze rozważania do pęcherzyków, dla których można zaniedbać napięcie powierzchniowe. Dotyczy to zakresu rozmiarów ograniczonych od dołu do promieni rzędu  $10 \mu m$ . Pomimo bardzo uproszczonych założeń, model ten dość dobrze opisuje zachowanie się fali w takim ośrodku.

### 1. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Podstawowym założeniem modelu jest przyjęcie cieczy bez pęcherzyków jako ośrodka liniowego i bezstratnego, a rozchodzącą się falę jako płaską. Założymy również, że nie

występuje oddziaływanie między pęcherzykami, ich drgania są radialnie symetryczne ( $ka_0 \ll 1$ ,  $k$  jest liczbą falową rozprzestrzeniającej się fali o nieskończenie małej amplitudzie, a  $a_0$  promieniem pęcherzyka w równowadze). Dodatkowo zakładamy, że w ośrodku znajduje się  $N$  pęcherzyków o jednakowych rozmiarach. Zdefiniujemy:  $\rho = \rho_0 + \rho'$  - gęstość mieszaniny,  $\rho_l = \rho_{l0} + \rho_l'$  - gęstość cieczy,  $\rho_g = \rho_{g0} + \rho_g'$  - gęstość gazu oraz objętość pęcherzyka  $V = V_0 + V'$ . Indeks 0 określa daną wielkość w równowadze, natomiast wielkości primowane odchylenie od stanu równowagi. Jeśli w ośrodku znajduje  $N$  pęcherzyków w jednostkowej objętości w stanie równowagi, objętość zajmowana przez pęcherzyki stanowić będzie  $NV_0$ , wtedy:

$$\rho_0 = NV_0 \rho_{g0} + (1 - NV_0) \rho_{l0}. \quad (1)$$

Na podstawie (1), gęstość mieszaniny w dowolnej chwili czasu jest dana przez:

$$\rho_0 / \rho = NV + (1 - NV_0) \rho_{l0} / \rho_l. \quad (2)$$

Jeśli objętość zajmowana przez gaz jest niewielka ( $NV \ll 1$ ), można przyjąć, że  $\rho_0 \approx \rho_{l0} \gg \rho_{g0}$ . Pozwala to na zastosowanie przybliżenia liniowego równania (2):

$$\frac{\rho'}{\rho_0} = \frac{p}{\rho_0 c_0^2} - NV', \quad (3)$$

gdzie  $p$  jest ciśnieniem fali akustycznej, a  $c_0$  prędkością fali o nieskończenie małej amplitudzie sprowadzającą się do znanego przybliżenia  $p = c_0^2 \rho_l'$ , przy  $N=0$ . Wzór (3) wraz z równaniem ciągłości oraz równaniem ruchu stanowią zamknięty układ równań opisujący propagację fali sprężystej w ośrodku zawierającym pęcherzyki gazowe. Taki układ równań prowadzi do nieliniowego równania falowego opisującego rozprzestrzenianie się płaskiej fali w ośrodku:

$$\nabla^2 p - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_0 N \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2}. \quad (4)$$

Wynika z niego, że przy braku pęcherzyków ośrodek staje się liniowym. Rozwiązanie równania (4) wymaga dodatkowej relacji między ciśnieniem rozchodzącej się fali a zmianami objętości pęcherzyka  $V' = V'(p)$ , wynikającej z dynamiki pęcherzyków. W tym celu zostanie wykorzystany model zaproponowany przez Zabołotską i Sołujana [2]:

$$\ddot{V} + \omega \delta \dot{V} + \omega_0^2 V + \epsilon p = \alpha V^2 + \mu (2\dot{V}V + \dot{V}^2), \quad (5)$$

gdzie:

$$\omega_0^2 = \frac{3\kappa p_0}{\rho_0 a_0^2}, \mu = \frac{1}{8\pi a_0^3}, \alpha = 3\mu(\kappa + 1)\omega_0^2, \epsilon = 4\pi a_0 / \rho_0 \quad (6)$$

oraz:  $\delta$  - jest stałą tłumienia pęcherzyka w rezonansie,  $\omega_0$  - częstotliwością rezonansową pęcherzyka,  $\kappa$  - wykładnikiem adiabaty,  $p_0$  - ciśnieniem panującym w ośrodku nie zaburzonym. W równaniu (5) zamiast  $V'$  zastosowano oznaczenie  $V$ . Lewa strona równania drgań pęcherzyka jest liniowa, natomiast z prawej strony znajdują się dwa człony nieliniowe, pierwszy wynikający z adiabatycznego zachowania się gazu wewnątrz pęcherzyka natomiast drugi, jest nieliniowością dynamiczną.

## 2. DYSPERSJA PRĘDKOŚCI DŹWIĘKU I TŁUMIENIE FALI

Do rozwiązania układu równań (4) i (5) można zastosować metodę kolejnych przybliżeń gdyż, równanie (5) zostało otrzymane przy założeniu niewielkich zmian objętości pęcherzyków. Założymy, że rozwiązaniem równań (4) i (5) są odpowiednio:

$$p = \frac{1}{2}(p_1 e^{i\omega x} + p_2 e^{i2\omega x}) + c.c., \quad V = \frac{1}{2}(V_1 e^{i\omega x} + V_2 e^{i2\omega x}) + c.c., \quad (7)$$

Powyższe rozwiązania dla fali i ruchu pęcherzyków o częstotliwości podstawowej prowadzą do liniowego równania falowego opisującego propagację fali pierwotnej:

$$\left( \nabla^2 + \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) p_1 = 0, \quad (8)$$

w którym  $c_1$  jest prędkością rozchodzenia się stałej fazy fali o częstotliwości  $\omega$ . Zdefiniowane jest poprzez położenie  $n=1$  w równaniu:

$$\frac{c_0^2}{c_n^2} = 1 + \frac{\eta C}{1 - n^2 \omega^2 / \omega_0^2 + i \delta n \omega / \omega_0}, \quad (9)$$

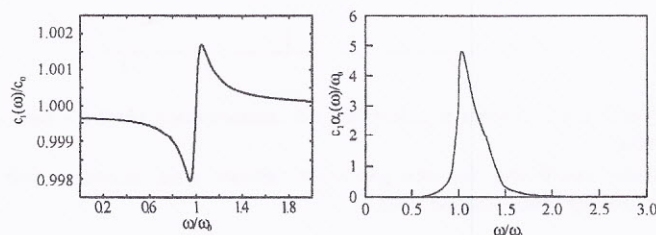
$$\eta = N V_0. \quad (10)$$

Stała  $C = \rho_0 c_0^2 / \kappa p_0$  określa stosunek ściśliwości adiabatycznej gazu  $1/\kappa p_0$  do ściśliwości cieczy  $1/\rho_0 c_0^2$  i wynosi  $C = 1.54 \times 10^4$  dla pęcherzyków powietrza w wodzie przy ciśnieniu atmosferycznym.

Rozwiązaniem równania (8) jest płaska fala rozprzestrzeniająca się w kierunku osi  $x$ :  $\exp[-i(\omega/\tilde{c}_1)x]$ . Pozwala to otrzymać z równania (9) prędkość fazową  $c_n$  oraz współczynnik tłumienia  $\alpha_n$ :

$$c_n(\omega) = 1/\text{Re} \tilde{c}_n^{-1}, \quad \alpha_n(\omega) = -n\omega \text{Im} \tilde{c}_n^{-1} \quad (11)$$

Rys.1 przedstawia prędkość fazową  $c_1$  unormowaną do prędkości rozchodzenia się stałej fazy przy nieskończonej małej amplitudzie, oraz współczynnik tłumienia  $\alpha_n$ , w zależności od częstotliwości dla  $\eta C = 1$  i  $\delta = 0.1$ . Dla małych w porównaniu do częstotliwości rezonansowej pęcherzyków częstotliwości fali ( $\omega^2 \ll \omega_0^2$ ), prędkość fazowa redukuje się do wartości  $c_1 = c_0 / \sqrt{1 + \eta C}$ , a więc nie zależy od częstotliwości. Przy niskich częstotliwościach, pęcherzyki gazów powodują wzrost ściśliwości wody, co implikuje spadek prędkości ultradźwięków. W obszarze dużych częstotliwości ( $\omega \rightarrow \infty$ ), czas odpowiedzi pęcherzyka jest dużo większy od okresu drgań rozprzestrzeniającej się fali. Dlatego ruch pęcherzyków w tym przypadku nie wpływa na rozchodzącą się falę, a prędkość fazowa odpowiada prędkości propagacji fali o małej amplitudzie ( $c_1 \rightarrow c_0$ ). Rejon największych zmian prędkości dźwięku znajduje się w sąsiedztwie pęcherzyków rezonansowych i cechuje się największym tłumieniem.



Rys. 1 Zależność prędkości fazowej (z lewej) i współczynnika tłumienia (z prawej) od częstotliwości dla fali rozchodzącej się w cieczy zawierającej pęcherzyki gazowe.

Fig.1 Phase speed of the sound (on the left) and attenuation coefficient (on the right) in a bubbly liquid as a function normalised frequency

## 2. PARAMETR NIELINIOWOŚCI OŚRODKA ZAWIERAJĄCEGO PĘCHERZYKI

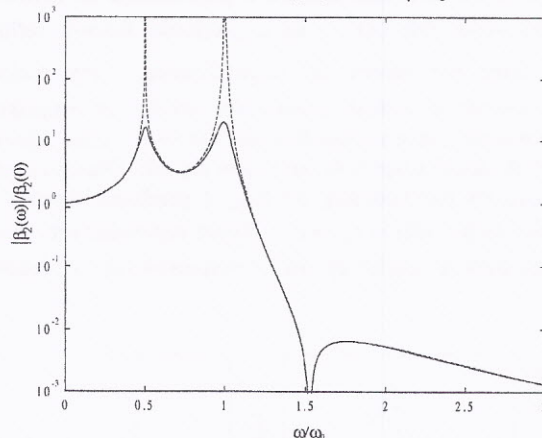
Własności nieliniowe ośrodka charakteryzuje parametr nieliniowości  $B/A$ , będący miarą efektów nieliniowych generowanych w ośrodku. W środowisku nieliniowym faza dodatnia rozchodzi się szybciej od fazy ujemnej co powoduje powstawanie harmonicznych. Wstawienie równań (7) do (4) i (5) prowadzi do równania falowego określającego propagację fali harmoniczej:

$$\left( \nabla^2 + \frac{4\omega^2}{c_2^2} \right) p_2 = \beta_2(\omega) \frac{2\omega^2}{\rho_0 c_0^4} p_1^2, \quad (12)$$

gdzie  $c_2$  jest określone wzorem (9) dla  $n=2$ . Wielkość  $\beta_2(\omega)$  jest współczynnikiem nieliniowości cieczy zawierającej pęcherzyki gazowe, lecz przy uwzględnieniu wyłącznie nieliniowości wynikającej z obecności pęcherzyków gazowych. Współczynnik nieliniowości, charakteryzujący powstawanie pierwszej harmoniczej jest określony zależnością:

$$\beta_2(\omega) = \frac{\eta C^2 (\kappa + 1 - \omega^2/\omega_0^2)}{2 \left( 1 - 4\omega^2/\omega_0^2 + i2\delta \omega/\omega_0 \right) \left( 1 - \omega^2/\omega_0^2 + i\delta \omega/\omega_0 \right)^2}, \quad (13)$$

Rys.2 przedstawia moduł współczynnika nieliniowości  $|\beta_2(\omega)|/\beta_2(0)$  w zależności od częstotliwości dla:  $\kappa=1.33$ ,  $\rho=800 \text{ kg/m}^3$ ,  $C=1.5 \times 10^3$ ,  $\omega_0=30 \text{ kHz}$ . Widoczne są dwa maksima rezonansowe i jedno minimum (antyrezonans), związane z generowaniem pierwszej harmoniczej. Większe maksimum ( $\omega/\omega_0=1$ ), występuje gdy rozprzestrzeniająca się fala posiada częstotliwość zgodną z częstotliwością rezonansową pęcherzyków, natomiast niższe maksimum odpowiada równości częstotliwości pierwszej harmoniczej z rezonansem pęcherzyków ( $\omega/\omega_0=0.5$ ). Antyrezonans występuje dla  $\omega/\omega_0 = \sqrt{\kappa+1}$ .



Rys. 2 Współczynnik nieliniowości w zależności od częstotliwości ( $\delta=0.1$  – linia ciągła,  $\delta=0$  – linia przerywana).

Fig. 2 Nonlinearity coefficient for free gas-water mixture with damping ( $\delta=0.1$ - solid line) and without damping ( $\delta=0$  - dashed line)

Dla małych częstotliwości  $\beta_2(0) = (\kappa + 1)\eta C^2/2$  i może być bardzo duże. Np. dla względnej objętości zajmowanej przez pęcherzyki rzędu 0.001 % ( $\eta=10^{-5}$ ),  $\beta_2(0) \approx 2 \times 10^3$  co znacznie przekracza wartość tego współczynnika dla wody nie zawierającej pęcherzyków ( $\beta_2 \approx 5$ ).

Załóżmy, że fala rozchodzi się w kierunku dodatnim osi  $x$ , dla  $x=0$  mamy  $p_1=p_0$  i  $p_2=0$  oraz pęcherzyki nie są tłumione ( $\delta=0$ ). Rozwiązaniem równania falowego dla fali harmonicznego jest:

$$p_2 = \frac{ip_0^2[(\kappa+1)\omega_0^2/\omega^2 - 1]}{6\kappa P_0(1-\omega^2/\omega_0^2)} \sin[(k_2 - 2k_1)x/2] e^{-i(k_2+2k_1)x/2} \quad (14)$$

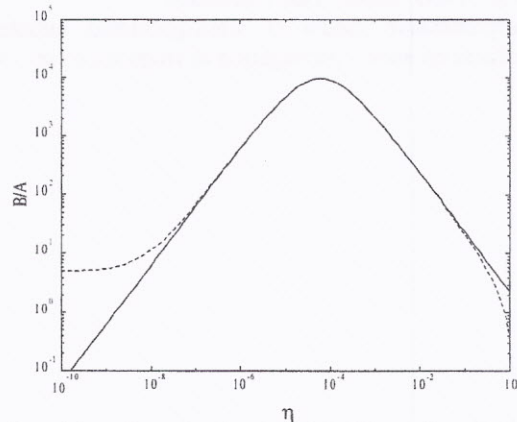
Ośrodek zawierający pęcherzyki gazowe jest bardzo dyspersyjny, a silna dyspersyjność ośrodka powoduje oscylacje amplitudy generowanej fali ( $\sin[(k_2 - 2k_1)x/2]$ ).

Dla bardzo małych odległości oraz przy dostatecznie małych  $\eta$  równość (14) redukuje się do  $|p_2| = |\beta_2| p_0^2 \omega x / 2 \rho_0 c_0^3$ , co odpowiada rozwiązaniu równania (12) przy braku dyspersji.

Rozważając granicę drgań pęcherzyka dla niskich częstotliwości, parametr nieliniowości  $B/A$  można zapisać następująco:

$$\frac{B}{A} = \frac{(k+1)\eta C^2}{(1+\eta C)^2}, \quad (15)$$

Stosunek  $B/A$  nie zbiega do wartości parametru nieliniowości wody (rzędu 5) gdy  $\eta=0$  oraz do 0.4 gdy  $\eta=1$  (co odpowiada  $B/A$  czystego gazu), gdyż nieliniowość wody nie była brana pod uwagę oraz zakładaliśmy niewielką względną objętość gazu w cieczy. Pomimo tego równość (15) dobrze opisuje nieliniowe właściwości cieczy zawierającej pęcherzyki gazów. Wykres 3 przedstawia zależność parametru nieliniowości  $B/A$  w granicy niskich częstotliwości (linia ciągła). Dla porównania, linią przerywaną naniesiony jest parametr nieliniowości takiego ośrodka z uwzględnieniem nieliniowości wody [4]:



Rys. 3 Parametr nieliniowości wody zawierającej pęcherzyki w zależności od objętości zajmowanej przez gaz bez uwzględnienia nieliniowości wody (linia ciągła) i z uwzględnieniem nieliniowości wody (linia przerywana)

Fig. 3 The  $B/A$  parameter for different gas void fraction -  $\eta$  in water in low frequency approximation, taking only bubble nonlinearity (solid line) and including gas and water nonlinearity

### 3. PODSUMOWANIE

Niniejsza praca daleka jest od wyczerpania problemów związanych z propagacją fal sprężystych w cieczy zawierającej pęcherzyki gazowe i ma służyć ocenie jakościowej. Z przedstawionych rozważań wynika, na własności nieliniowe ośrodka zawierającego pęcherzyki gazowe decydujący wpływ ma objętość gazu zawartego w cieczy, częstotliwość rozprzestrzeniającej się fali jak i rozmiary pęcherzyków. Przy niskich częstotliwościach fal, parametr nieliniowości zależy wyłącznie od objętości gazu zawartego w wodzie. Największe ilości pęcherzyków gazowych w podpowierzchniowej warstwie morza, przy prędkości wiatru ok.  $8 \text{ m/s}$  występują dla przedziału rozmiarów od  $30$  do  $50 \mu\text{m}$ , a ich ilości mieszczą się w granicach między  $10^3$  i  $10^6$  [5]. Biorąc pod uwagę największe z powyższych wartości, objętość zajmowana przez pęcherzyki o promieniu  $50 \mu\text{m}$  będzie rzędu  $5 \times 10^{-7}$ . Współczynnik nieliniowości  $\beta_2(\omega) = 1 + B/2A$  dla częstotliwości odpowiadającej rezonansowi pęcherzyka jest w przybliżeniu rzędu  $3 \times 10^3$ . Uwzględnienie takiej samej ilości pęcherzyków o promieniu  $30 \mu\text{m}$  powoduje ponad czterokrotne zmniejszenie się wartości współczynnika nieliniowości.

### LITERATURA

1. Clay C.S., Medwin H., „Acoustical Oceanography”, *Wiley-Interscience Publication*, 1977
2. Zabolotskaya E.A., Soluyan S.I. „Emission of harmonic and combination-frequency waves by air bubbles”, *Sov. Phys. Acoust.* 18, 396-398, 1972
3. Medwin H., „In situ acoustic measurements of microbubbles at sea”, *J. Geoph. Res.* 1977, 82, 6, 971-976
4. Everbach E.C., „Tissue composition determination via measurement of the acoustic nonlinearity parameter”, Ph.D. thesis, Yale University
5. Hall M.V., A comprehensive model of wind-generated bubbles in the ocean and predictions of the effects on sound propagation at frequencies up to 40 kHz, *JASA* 1989, 86, 3, 1103-1117