

Tomasz Janusz TELESZEWSKI,
Sławomir Adam SORKO

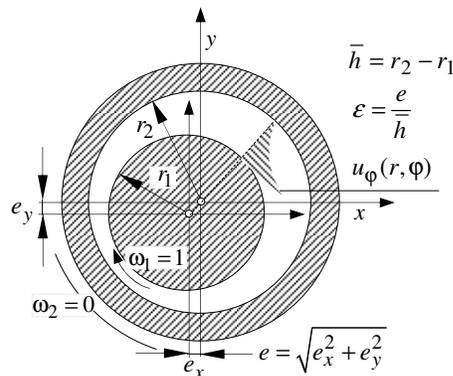
Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Modelowanie przepływu w układzie niekoncentrycznych obracających się cylindrów metodą elementów brzegowych

1 Wprowadzenie

Przedmiotem opracowania jest modelowanie laminarnego przepływu cieczy lepkiej w układzie niewspółosiowych, niekoncentrycznie usytuowanych cylindrów pozostających we wzajemnym ruchu. Zagadnienie matematycznego modelowania ruchu cieczy lepkiej w układach niewspółosiowych cylindrów (Rys. 1) jest interesujące w aspekcie naukowym jako osobliwa forma przepływów Taylora-Couette'a [1, 2] jak też niezwykle istotne z inżynierskiego punktu widzenia w teorii smarowania [3] i konstrukcji ślizgowych hydrodynamicznych łożysk poprzecznych [4], mieszalników cieczy o różnych właściwościach fizycznych, separatorów cieczy i frakcji stałych etc.

Jakkolwiek przepływ cieczy lepkiej w przestrzeni między cylindrami (dwoma, lub ogólniej wieloma) jest przepływem przestrzennym, to przy założeniu znacznej długości cylindrów, dostatecznym przybliżeniem jest przyjęcie modelu przepływu płaskiego cieczy lepkiej opisanego równaniami Naviera-Stokesa i ciągłości dla płynu lepkiego, nieściśliwego.



Rys. 1. Przepływ pomiędzy dwoma wirującymi niekoncentrycznymi cylindrami
Fig. 1. Flow between two eccentric rotating cylinders

Przy pewnych założeniach upraszczających dotyczących charakteru ruchu, tj. ruchu laminarnego cieczy lepkiej, matematyczny opis przepływu można sprowadzić do równania Stokesa [5].

2 Matematyczny opis przepływu. Sformułowanie całkowe

W przypadku ruchu płaskiego (dwuwymiarowego) całkowe sformułowanie zagadnienia przepływowego opisanego równaniami Stokesa w układzie współrzędnych kartezjańskich $\{x,y\}$ sprowadza się do brzegowego równania całkowego [6] względem składowych prędkości i tensora naprężeń lepkich po gładkim zamkniętym brzegu L , ograniczającym płaski jednopójny lub wielopójny obszar Λ w postaci:

$$\int_L \begin{bmatrix} G_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & G_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ G_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & G_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{q}) \\ f_y(\mathbf{q}) \end{bmatrix} dL_{\mathbf{q}} = -2\pi\mu \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{p}) \\ u_y(\mathbf{p}) \end{bmatrix} +$$

$$+\mu \int_L \begin{bmatrix} N_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & N_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \\ N_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) & N_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{q}) \\ u_y(\mathbf{q}) \end{bmatrix} dL_{\mathbf{q}} \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in L \quad (1)$$

gdzie: u_x, u_y są składowymi prędkości ruchu cieczy, f_x, f_y są składowymi tensora naprężeń lepkich w płynie, $\mu = \nu\rho$ oznacza dynamiczny współczynnik lepkości cieczy, natomiast $\mathbf{p} \equiv (x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$ i $\mathbf{q} \equiv (x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ oznaczają odpowiednio punkt źródłowy i punkt bieżący całkowania po brzegu L . Rozwiązania podstawowe (jądra całkowe w równ. (1)) są odpowiednio równe:

$$\left. \begin{aligned} G_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) + \frac{\delta_{x\mathbf{p}\mathbf{q}} \delta_{x\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}; & G_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) + \frac{\delta_{y\mathbf{p}\mathbf{q}} \delta_{y\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} \\ G_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= G_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\delta_{y\mathbf{p}\mathbf{q}} \delta_{x\mathbf{p}\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} \end{aligned} \right\}, \quad (1a)$$

gdzie $\delta_{x\mathbf{p}\mathbf{q}} = (x(\mathbf{p}) - x(\mathbf{q}))$; $\delta_{y\mathbf{p}\mathbf{q}} = (y(\mathbf{p}) - y(\mathbf{q}))$; $r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = \sqrt{\delta_{x\mathbf{p}\mathbf{q}}^2 + \delta_{y\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}$
oraz:

$$\left. \begin{aligned} N_{xx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (T_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{x\mathbf{q}} + T_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{y\mathbf{q}}) \\ N_{xy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (T_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{x\mathbf{q}} + T_{yxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{y\mathbf{q}}) \\ N_{yx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (T_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{x\mathbf{q}} + T_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{y\mathbf{q}}) \\ N_{yy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= (T_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{x\mathbf{q}} + T_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \bar{n}_{y\mathbf{q}}) \end{aligned} \right\}, \quad \begin{aligned} \mathbf{n}_{\mathbf{q}} &= [\bar{n}_{x\mathbf{q}}, \bar{n}_{y\mathbf{q}}] \\ \bar{n}_{x\mathbf{q}} &= \left. \frac{dy}{dL} \right|_{\mathbf{q}}, \quad \bar{n}_{y\mathbf{q}} = \left. \frac{dx}{dL} \right|_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (1b)$$

przy czym:

$$\left. \begin{aligned} T_{xxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= 4 \frac{\delta_x \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_x \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_x \mathbf{p} \mathbf{q}}{r_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^4}, \quad T_{yyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \frac{\delta_y \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_y \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_y \mathbf{p} \mathbf{q}}{r_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^4} \\ T_{xxy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= T_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T_{xyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \frac{\delta_x \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_x \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_y \mathbf{p} \mathbf{q}}{r_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^4} \\ T_{yyx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= T_{xyy}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = T_{yxx}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 4 \frac{\delta_x \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_y \mathbf{p} \mathbf{q} \delta_y \mathbf{p} \mathbf{q}}{r_{\mathbf{p} \mathbf{q}}^4} \end{aligned} \right\} \quad (1c)$$

W równaniu (1) składowe prędkości $u_x(\mathbf{q})$, $u_y(\mathbf{q})$ są dane jako składowe prędkości ruchu cieczy: na brzegu $L_1 = 2\pi r_1$ z prędkością $u_{\phi 1} = \omega_1 r_1$ oraz na brzegu $L_2 = 2\pi r_2$ z prędkością $u_{\phi 2} = \omega_2 r_2$, przy czym $L \equiv L_1 \cup L_2$.

Po wyznaczeniu gęstości $f_x(\mathbf{q})$, $f_y(\mathbf{q})$ na brzegu (L) składowe prędkości $u_x(\mathbf{v})$, $u_y(\mathbf{v})$ oraz ciśnienie w punktach $\mathbf{v} \equiv \{v_x, v_y\}$ w obszarze (Λ) ograniczonym brzegiem $L \equiv L_1 \cup L_2$ wyznacza się z zależności:

$$\begin{aligned} u_x(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{4\pi\mu} \int_L [G_{xx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) f_x(\mathbf{q}) + G_{yx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) f_y(\mathbf{q})] dL_{\mathbf{q}} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_L [N_{xx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) u_x(\mathbf{q}) + N_{yx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) u_y(\mathbf{q})] dL_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2a)$$

$\mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda$

$$\begin{aligned} u_y(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{4\pi\mu} \int_L [G_{xy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) f_x(\mathbf{q}) + G_{yy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) f_y(\mathbf{q})] dL_{\mathbf{q}} + \\ &+ \frac{1}{4\pi} \int_L [N_{xy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) u_x(\mathbf{q}) + N_{yy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) u_y(\mathbf{q})] dL_{\mathbf{q}} \end{aligned} \quad (2b)$$

$\mathbf{q} \in L; \mathbf{v} \in \Lambda$

$$\begin{aligned} p(\mathbf{v}) &= -\frac{1}{4\pi} \int_L (f_x(\mathbf{q}) P_x(\mathbf{v}, \mathbf{q}) + f_y(\mathbf{q}) P_y(\mathbf{v}, \mathbf{q})) dL_{\mathbf{q}} + \\ &+ \frac{\mu}{4\pi} \left[\int_L u_x(\mathbf{q}) (H_{xx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \bar{n}_{x\mathbf{q}} + H_{xy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \bar{n}_{y\mathbf{q}}) dL_{\mathbf{q}} + \right. \\ &\left. + \int_L u_y(\mathbf{q}) (H_{yx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \bar{n}_{x\mathbf{q}} + H_{yy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) \bar{n}_{y\mathbf{q}}) dL_{\mathbf{q}} \right] \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie:

$$P_x(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = -2 \frac{\delta_x \mathbf{vq}}{r_{\mathbf{vq}}^2}, \quad P_y(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = -2 \frac{\delta_y \mathbf{vq}}{r_{\mathbf{vq}}^2}, \quad (3a)$$

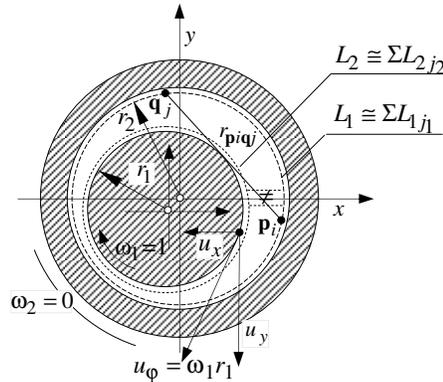
$$H_{xx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = 4 \left(-\frac{1}{r_{\mathbf{pq}}^2} + 2 \frac{\delta_x^2 \mathbf{vq}}{r_{\mathbf{pq}}^4} \right), \quad H_{yy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = 4 \left(-\frac{1}{r_{\mathbf{pq}}^2} + 2 \frac{\delta_y^2 \mathbf{vq}}{r_{\mathbf{pq}}^4} \right) \quad (3b)$$

$$H_{xy}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = H_{yx}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) = 8 \frac{\delta_x \mathbf{vq} \delta_y \mathbf{vq}}{r_{\mathbf{pq}}^4}$$

3 Numeryczna realizacja algorytmu obliczeniowego

Dyskretne rozwiązanie równań całkowych polega na sprowadzeniu całek do układu algebraicznych równań liniowych względem dyskretnych wartości niewiadomej funkcji w obranych punktach (punkty kolokacji) na brzegu rozpatrywanego obszaru. Najprostszą formą rozwiązania jest podział brzegu na elementy liniowe, na których wartości poszukiwanej funkcji w punktach kolokacji tożsamy z punktami centralnymi elementów przyjmuje się za stałe.

Przyjmując przybliżenie brzegu $L \equiv L_1 \cup L_2$ J -elementowym układem elementów liniowych $[L_j], j = \overline{1, J}$ (rys.2), na których funkcje $[f_x(\mathbf{q}_j)], j = \overline{1, J}$, $[f_y(\mathbf{q}_j)], j = \overline{1, J}$ w centralnych punktach elementów mają stałe wartości, równanie całkowe (1) sprowadza się do układu $2J$ algebraicznych równań liniowych względem zdyskretyzowanych wartości rozpatrywanych funkcji:



Rys. 2. Dyskretyzacja brzegu obszaru przepływu pomiędzy wirującymi niekoncentrycznymi cylindrami

Fig. 2. Discretization of the boundary of the flow between two eccentric rotating cylinders

$$\sum_{j=1}^J \begin{bmatrix} f_x(\mathbf{q}_j) \\ f_y(\mathbf{q}_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{G}_{xx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) & \mathcal{G}_{yx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \\ \mathcal{G}_{yx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) & \mathcal{G}_{yy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \end{bmatrix} = -2\pi\mu \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{p}_i) \\ u_y(\mathbf{p}_i) \end{bmatrix} + \mu \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{q}_j) \\ u_y(\mathbf{q}_j) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{N}_{xx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) & \mathcal{N}_{yx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \\ \mathcal{N}_{xy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) & \mathcal{N}_{yy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \end{bmatrix} \quad (4)$$

gdzie:

$$\mathcal{G}_{xx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} \left[\ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}} \right) + \frac{\delta_{x\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} \delta_{x\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}^2} \right] dL_j, \quad (4a)$$

$$\mathcal{G}_{yy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} \left[\ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}} \right) + \frac{\delta_{y\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} \delta_{y\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}^2} \right] dL_j, \quad (4b)$$

$$\mathcal{G}_{xy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \mathcal{G}_{yx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \int_{L_j} \left[\ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}} \right) + \frac{\delta_{x\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j} \delta_{y\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}}{r_{\mathbf{p}_i \mathbf{q}_j}^2} \right] dL_j \quad (4c)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{N}_{xx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left(T_{xxx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{x\mathbf{q}_j} + T_{xxy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{y\mathbf{q}_j} \right) dL_j \\ \mathcal{N}_{xy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left(T_{yxx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{x\mathbf{q}_j} + T_{yyx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{y\mathbf{q}_j} \right) dL_j \\ \mathcal{N}_{yx}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left(T_{xyx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{x\mathbf{q}_j} + T_{xyy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{y\mathbf{q}_j} \right) dL_j \\ \mathcal{N}_{yy}^o(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) &= \int_{L_j} \left(T_{yyx}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{x\mathbf{q}_j} + T_{yyy}(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) \bar{n}_{y\mathbf{q}_j} \right) dL_j \end{aligned} \right\}, \quad (4d)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} T_{xx}(p_i, q_j) &= 4 \frac{\delta_{xp_i q_j} \delta_{xp_i q_j} \delta_{xp_i q_j}}{r_{p_i q_j}^4}, T_{yy}(p_i, q_j) = 4 \frac{\delta_{yp_i q_j} \delta_{yp_i q_j} \delta_{yp_i q_j}}{r_{p_i q_j}^4} \\ T_{xy}(p_i, q_j) &= T_{yx}(p_i, q_j) = T_{xy}(p_i, q_j) = 4 \frac{\delta_{xp_i q_j} \delta_{xp_i q_j} \delta_{yp_i q_j}}{r_{p_i q_j}^4} \\ T_{yx}(p_i, q_j) &= T_{xy}(p_i, q_j) = T_{yx}(p_i, q_j) = 4 \frac{\delta_{xp_i q_j} \delta_{yp_i q_j} \delta_{yp_i q_j}}{r_{p_i q_j}^4} \end{aligned} \right\} \quad (4e)$$

Po wyznaczeniu dyskretnych wartości $[f_x(\mathbf{q}_j)]$, $j = \overline{1, J}$, $[f_y(\mathbf{q}_j)]$, $j = \overline{1, J}$ na brzegu rozpatrywanego obszaru przepływu $L \equiv L_1 \cup L_2$ wartości składowych prędkości $u_x(\mathbf{v}_k)$, $u_y(\mathbf{v}_k)$ i wartości ciśnienia w obranych punktach $\mathbf{v}(k) \equiv \{v_{xk}, v_{yk}\}$ w obszarze (Λ) wyznacza się ze zdyskretyzowanych jak wyżej związków (2a), (2b) i (3).

3 Weryfikacja algorytmu i programu obliczeniowego MEB

Obliczenia problemowego zagadnienia wedle przedstawionego wyżej algorytmu obliczeniowego zrealizowano przy użyciu sporządzonego przez autorów programu obliczeniowego w języku programowania FORTRAN, udostępnianego w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej w systemie wielodostępnym na wieloprocesorowym komputerze, przy czym program obliczeniowy może być realizowany również na komputerach personalnych.

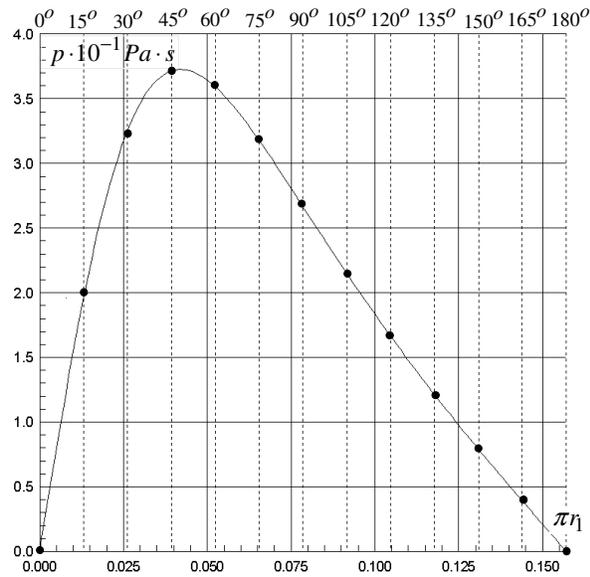
Podstawowa walidację algorytmu i programu obliczeniowego przedstawiono w opracowaniu T. Teleszewski, S.A. Sorko „Modelowanie przepływu Taylora-Couetta metodą elementów brzegowych” w odniesieniu do ustalonego ruchu obrotowego dwóch koncentrycznych cylindrów [8], które to zagadnienie ma rozwiązanie teoretyczne szeroko opisane w literaturze problemu. W niniejszym opracowaniu przedstawiono analizę rozkładu ciśnienia w układzie dwóch niekoncentrycznie usytuowanych nieskończenie długich cylindrów (uproszczony model łożyska hydrodynamicznego poprzecznego) opisany w literaturze [9, 10]:

$$p = C - 6 \frac{\mu \omega_1}{\psi^2} \varepsilon \frac{\sin(\varphi)(2 - \varepsilon \cos(\varphi))}{(2 - \varepsilon^2)(1 - \varepsilon \cos(\varphi))^2}, \quad (5)$$

gdzie: $\psi = \bar{h}/\eta_1$, przy czym $\bar{h} = r_2 - \eta_1$ (Rys. 1), natomiast ε oznacza względną niekoncentryczność układu cylindrów $\varepsilon = e/\bar{h}$, przy czym e jest przesunięciem osi cylindrów bezwzględny, C jest stałą dobieraną z warunków ciśnienia minimalnego w układzie nie mogącego być niższym od ciśnienia otoczenia. Porównania dokonano dla modelu dwóch cylindrów odpowiednio o promieniach: $r_1 = 0.05$ m i $r_2 = 0.1$ m zlokalizowanych mimośrodowo z przesunięciem $e = -0.025$, wirujących odpowiednio z prędkościami kątowymi $\omega_1 = -1.0 s^{-1}$ oraz $\omega_2 = 0.0 s^{-1}$, pomiędzy którymi

*Modelowanie przepływu w układzie
niekoncentrycznych obracających się cylindrów metodą elementów brzegowych*

przestrzeń jest wypełniona cieczą o lepkości $\mu = 0.01 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. W rozpatrywanym przypadku względny luz osiowy $\psi = 1.0$ natomiast względna mimośrodowość $\varepsilon = 0.5$. Na rysunku 3 przedstawiono wykres ciśnienia przy wartości stałej $C = 0.0$, gdzie linia ciągła obrazuje przebieg rozkładu ciśnienia w przedziale $\varphi(0.0^\circ - 180^\circ)$, natomiast punktami zaznaczono wartości uzyskane metodą elementów brzegowych, przy podziale brzegu obszaru odpowiednio na $J_1 = 7200$ i $J_2 = 3600$ w odniesieniu do elementów zewnętrznego i wewnętrznego układu cylindrów. Maksymalny błąd względny zdefiniowany jako $\delta p^{an} = |(p^a - p^n)/p^a| * 100\%$ (a -rozw. analityczne, n -rozw. num.) nie przekroczył wartości 0.1% .



*Rys. 3. Rozkład ciśnienia pomiędzy niekoncentrycznymi wirującymi cylindrami
Fig. 3. Pressure distribution in the system of two eccentric rotating cylinders*

Istotnym testem skuteczności algorytmu numerycznego i poprawności programu obliczeniowego jest wyznaczenie objętościowego natężenia przepływu przez szczelinę pomiędzy obracającymi się wałcami. W literaturze problemu [11], [12], [13] wyznaczono przepływ przez szczelinę o szerokości $\delta z = 0.1 \text{ m}$ w przekroju $y = 0.0$, w którym minimalna i maksymalna odległość pomiędzy wałcami wynosi odpowiednio: $e^- = 0.025$ i $e^+ = 0.075$. W rozpatrywanych przekrojach składowa prędkość $u_x = 0.0$, wobec czego zagadnienie sprowadza się do scałkowania składowej prędkości $u_y = f(x)$ odpowiednio w przedziałach $L(e^-) = [-0.1 \leq x \leq -0.925]$ i $L(e^+) = [0.025 \leq x \leq 0.1]$. W opracowaniu [11] przedstawiono rozwiązanie analityczne zagadnienia, natomiast w opracowaniach [12] i [13] rozwiązanie numeryczne uzyskane metodą rozwiązań podstawowych (MRP) przy podziale przedziału całkowania na 270 elementów metodą kwadratur Simpsona oraz metodą elementów skończonych (MES) przy podziale

obszaru całkowania (obszar pomiędzy walcami) odpowiednio na 3000 elementów i 4000 elementów. Wyniki porównania z wartościami otrzymanymi metodą elementów brzegowych wygenerowanego odpowiednio za pomocą kwadratur Simpsona przy podziale przedstawionych wyżej parametrów dyskretyzacji powierzchni brzegowej walców i podziale przedziałów całkowania $L(e^-)$ odpowiednio na 25 i 50 elementów oraz $L(e^+)$ na 75 i 150 elementów $\delta L(e^-) = \delta L(e^+) = 1.0 \times 10^{-3} / 1.0 \times 10^{-4}$. W tabeli 1 zestawiono wyniki obliczeń poszczególnymi metodami i zestawienie błędu względnego poszczególnych rozwiązań numerycznych w odniesieniu do wartości otrzymanych z rozwiązania analitycznego.

Tab. 1. Zestawienie wartości masowego natężenia przepływu (q) w przepływie między dwoma niekoncentrycznymi wirującymi cylindrami

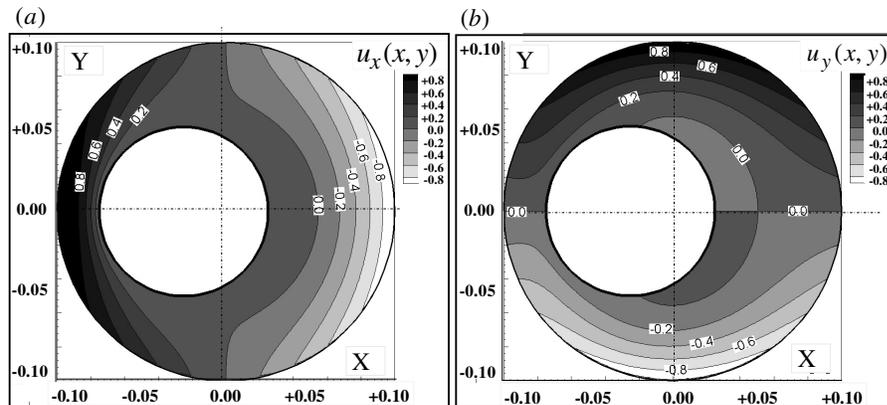
Tab. 1. Tabulation of the volumetric flow rate (q) of the flow between eccentric rotating cylinders

Parametr testowy	Rozwiązanie analityczne	Metoda numeryczna	Błąd metody numerycznej
	[11]	MRP 270 el.[12]	δq [%]
$q(e^-)$	-0.17671	-0.17688	0.096
$q(e^+)$	0.17671	0.17706	0.198
$q(e^-)$	-0.17671	MES 3000el. [13] -0.17649	δq [%] 0.124
$q(e^+)$	0.17671	0.17632	0.221
$q(e^-)$	-0.17671	MES 4000el. [13] -0.17659	δq [%] 0.068
$q(e^+)$	0.17671	0.17637	0.192
$q(e^-)$	-0.17671	MEB el. 1.0×10^3 -0.17675	δq [%] 0.023
$q(e^+)$	0.17671	0.17675	0.023
$q(e^-)$	-0.17671	MEB el. 1.0×10^4 -0.17670	δq [%] 0.005
$q(e^+)$	0.17671	0.17669	0.011

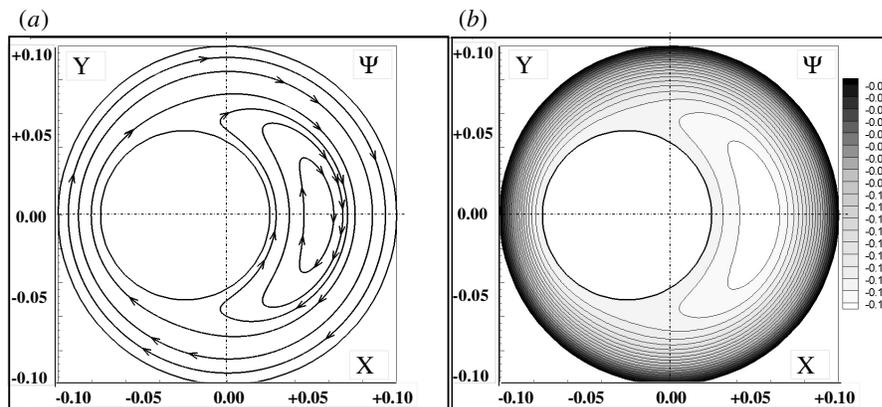
Na rysunkach 4a, 4b przedstawiono pola prędkości składowych prędkości.

Na rysunku 5a wykreślono linie prądu. Na rysunku 5b zaprezentowano funkcję prądu.

*Modelowanie przepływu w układzie
niekoncentrycznych obracających się cylindrów metodą elementów brzegowych*



Rys. 4. Składowe pola prędkości w przepływie Stokesa pomiędzy wirującymi niekoncentrycznie usytuowanymi cylindrami a) u_x b) u_y
 Fig.4. Velocity components of Stokes flow between rotating two eccentric cylinders a) u_x b) u_y

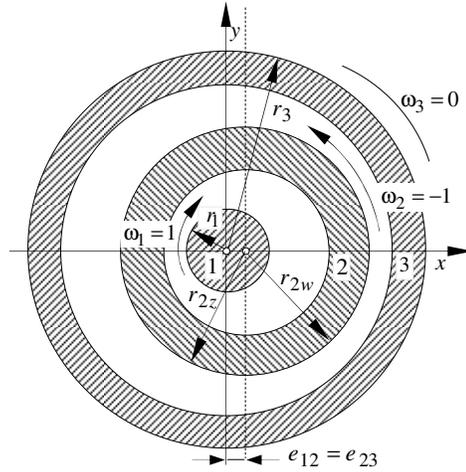


Rys. 5. Przepływ Stokesa pomiędzy niekoncentrycznymi wirującymi cylindrami: a) linie prądu, b) potencjał prądu
 Fig.5. Stokes flow between two eccentric rotating cylinders: a) streamline, b) stream function

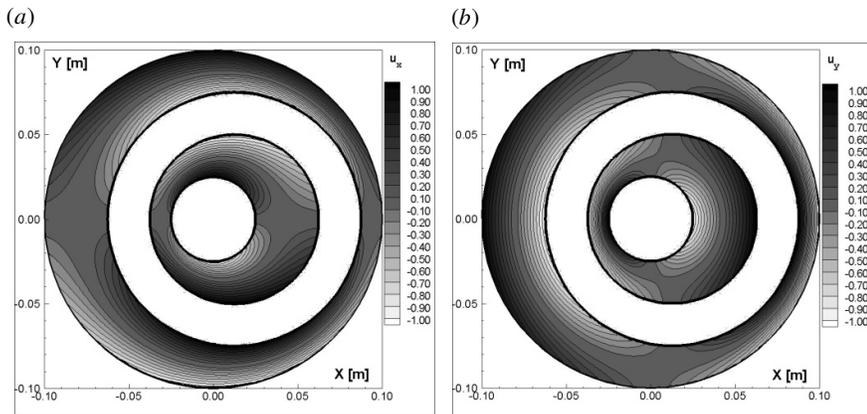
4 Przykłady obliczeniowe

Jako przykład zastosowania metody elementów brzegowych do wyznaczania przepływów Taylora przedstawiono rezultaty obliczeń przepływu pomiędzy trzema niekoncentrycznymi walcami: $r_1 = 0.025$ m, $r_{2w} = 0.050$ m, $r_{2z} = 0.075$ m, $r_3 = 0.100$ m wirującymi z prędkościami kątowymi: $\omega_1 = 1.00$ s⁻¹, $\omega_2 = -1.00$ s⁻¹, $\omega_3 = 0.00$ s⁻¹ (Rys. 6). Przy przyjętych jak wyżej promieniach cylindrów $h_{12} = r_{2w} - r_1 = 0.025$ m

$\bar{h}_{23} = r_3 - r_{2z} = 0.025$ m i założonej niekoncentryczności $e_{12} = e_{23} = 0.0125$ m określa się niekoncentryczność bezwzględną jako $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{23} = 0.5$. Lepkość płynu przyjęto jak w wyżej rozważanym przypadku $\mu = 0.01$ Pa·s, przy czym prezentowana metoda obliczeniowa umożliwia symulację i wyznaczenie przepływu przy różnych gęstościach cieczy w poszczególnych przestrzeniach między cylindrycznych.



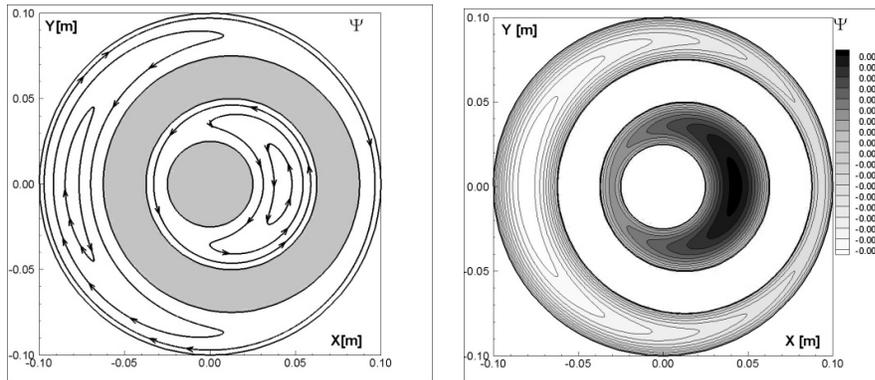
Rys.6. Szkic przykładowej konfiguracji trzech niekoncentrycznych cylindrów
 Fig.6. Sketch of the example-configuration of three eccentric cylinders



Rys. 7. Składowe prędkości w przykładowym przepływie: a) składowa u_x , b) składowa u_y
 Fig 7. Velocity component: of the example flow u_x , b) u_y

Na rysunkach 7a, 7b wykreślono składowe pola prędkości przepływu między trzema walcami: u_x (Rys. 7a) i u_y (Rys. 7b). Na rysunku 8a przedstawiono linie prądu

z zaznaczonymi zwrotami przepływu, natomiast na rysunku 8b funkcję prądu analizowanego przepływu.



Rys.8. Przepływ w układzie trzech wirujących niekoncentrycznych cylindrów: a) linie prądu, b) potencjał prądu

Fig. 8. Flow in the system of three rotating not concentric cylinders: a) streamline of the flow, b) the normalized potential of the flow

5 Podsumowanie

W prezentowanym wyżej opracowaniu wykazano użyteczność metody brzegowych równań całkowych do rozwiązywania zagadnień opisanych równaniami Stokes'a, w analizowanym przypadku do wyznaczenia płaskiego przepływu cieczy lepkiej w układzie niekoncentrycznie usytuowanych powierzchni cylindrycznych wirujących z różnymi prędkościami kątowymi, sprowadzonym do analizy przepływu rotacyjnego cieczy lepkiej w płaszczyźnie prostopadłej do osi cylindrów.

Wyznaczenie oporów ruchu układu niekoncentrycznych cylindrów pozostających we wzajemnym ruchu obrotowym jest niezwykle ważne w konstrukcji poprzecznych łożysk hydrodynamicznych, dla których przedstawiony wyżej model przepływu i jego matematyczny opis jest wystarczająco dokładny [10]. Metoda brzegowych równań całkowych w zastosowaniu do analizy płaskich przepływów cieczy lepkiej w układach wielu cylindrów niekoncentrycznych stwarza szerokie możliwości modelowania geometrycznych parametrów rozpatrywanych struktur i daje swobodę modelowania cech fizycznych cieczy w sensie możliwości zróżnicowania lepkości cieczy w poszczególnych obszarach, bez konieczności rozwiązań cząstkowych sprowadzających się do analizy odrębnych układów dwóch cylindrów.

Literatura

1. Johnson R.W.: *The Handbook o Fluid Dynamics*. CRC Press, 2000
2. Childs P. R. N.: *Rotating flow*. Elsevier Inc. 2011
3. Spurk J.H.: *Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 1977
4. White F.M.: *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, 2005
5. Prosnak W.J.: *Równania klasycznej mechaniki płynów*. PWN, 2006

6. Pozrikidis C.: *Boundary Integral and Singularity Methods for Linearized Viscous Flows*. Cambridge Univ. Press, 1991
7. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method Vol. I Applications in Thermo-Fluids and Acoustics*. John Wiley & Sons, LTD, 2002
8. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: *Modelowanie przepływu Taylora-Couette'a metodą elementów brzegowych*
9. Spurk J.H., Aksel N.: *Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 2008
10. Spurk J.H.: *Fluid Mechanics. Problems and Solutions*. Springer-Verlag, 1977
11. Ballal B.Y., Rivlin R.S.: Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders: inertial effects, *Arch. Rational Mech. Anal.*, Vol. 62, 1976
12. Young D.L., Chiua C.L., Fana C.M., Tsai C.C., Lin Y.C.: Method of fundamental solutions for multidimensional Stokes equations by the dual-potential formulation, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, Vol. 25, 877–893, 2006
13. Zhang P., Zhang X.: Numerical Modeling of Stokes Flow in a Circular Cavity by Variational Multiscale Element Free Galerkin Method, *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 451546, 2014

Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm rozwiązania zagadnienia przepływowego płaskiego, laminarnego ruchu cieczy lepkiej pomiędzy niekoncentrycznymi wirującymi cylindrami. Przedstawiono matematyczny opis zagadnienia przepływowego i metodę wyznaczania pola prędkości cieczy i pola ciśnienia oraz naprężeń lepkościowych na ściankach struktur ograniczających przepływ.

Słowa kluczowe: przepływ Taylora-Couette'a, metoda elementów brzegowych, przepływ Stokesa, łożysko ślizgowe

The modeling of the flow in system of eccentric rotating cylinders with the Boundary Elements Method

Summary

In the elaboration was presented the algorithm of solution of the problem of two dimensional, laminar flow of viscous fluid between eccentric rotating cylinders. The problem was formulated and solved by using Boundary Element Method. One introduced the mathematical description of the problem of flow and the method of calculating of the velocity and pressure fields, also tensions on sides of structures restrictive the flow.

Keywords: Taylor-Couette flow, boundary element method, Stokes flow, slide bearing

*Modelowanie przepływu w układzie
niekoncentrycznych obracających się cylindrów metodą elementów brzegowych*

Badania zostały zrealizowane w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 Katedry Ciepłownictwa, Ogrzewnictwa i Wentylacji Politechniki Białostockiej i sfinansowane ze środków na naukę MNiSW.