Jakub OZIOMEK, Andrzej ROGOWSKI

PLANOWANIE PRZYDZIAŁU AUTOBUSÓW DO LINII W ASPEKCIE MINIMALIZACJI ZUŻYCIA PALIWA NA PRZYKŁADZIE MPK W OSTROWCU ŚWIĘTOKRZYSKIM

Streszczenie

W artykule zaprezentowane zostały praktyczne możliwości wykorzystania metod programowania liniowego w transporcie miejskim. Przedmiotem rozważań stał się taki przydział autobusów do linii, który zapewni możliwie najmniejsze zużycie paliwa, a co za tym idzie przyczyni się do zmniejszenia kosztów prowadzenia działalności. Ma to bowiem szczególne znaczenie w sytuacji, gdy gminny przewoźnik realizuje część przewozów na zasadach komercyjnych. Przydział do autobusów nie może być dowolny. Należy uwzględnić szereg warunków ograniczających, tzn. z jednej strony rozmiary pracy przewozowej, a z drugiej różnorodność i ograniczoną liczbę wozów w parku taborowym. Słowa kluczowe: programowanie liniowe, transport miejski, optymalizacja.

WSTĘP

Miejskie Przedsiębiorstwo Komunikacji Sp. z o.o. Gminy Ostrowiec Świętokrzyski świadczy usługi przewozowe na liniach miejskich oraz pozamiejskich i nie byłoby w tym nic dziwnego, gdyby nie fakt, że te pierwsze mają charakter użyteczności publicznej, drugie zaś prowadzone są na tzw. własny rachunek. Komercyjny charakter linii pozamiejskich „potęguje" konieczność maksymalizacji zysku z tytułu świadczenia usług przewozowych przy jednoczesnym minimalizowaniu kosztów prowadzenia działalności. Jednymi z nich są koszty materiałów pędnych, stanowiące w polskich przedsiębiorstwach komunikacyjnych średnio ok. 25% kosztów 1 wozokilometra autobusu i na które bezpośrednio wpłynąć można poprzez racjonalny, tj. rozumiany jako taki, który gwarantuje najmniejsze dzienne zużycie paliwa, przydział autobusów do linii [3], [6]. O ile zadanie to w soboty i dni świąteczne można zrealizować wręcz intuicyjnie, o tyle w dni robocze rozwiązanie problemu wygodnie jest wyznaczyć przy użyciu technik matematycznych.

1. ISTOTA PROGRAMOWANIA LINIOWEGO

Punktem wyjścia do rozważań na temat programowania liniowego (i nie tylko) jest zdefiniowanie pojęcia modelu. Najczęściej rozumie się przez nie pewien odpowiednik rzeczywistości, sformułowany i zapisany w postaci zależności matematycznych, celowo uproszczony i podporządkowany celowi badań. Istota każdego modelu polega na tym, że powinien on w toku prowadzonej analizy dostarczyć niezbędnych informacji o rzeczywistym procesie lub systemie. W takim aspekcie konieczne jest postrzeganie modelu jako narzędzia badawczego [2], [4].

Strukturę modelu decyzyjnego tworzą:

- zmienne decyzyjne – niewiadome, których wartości wyznaczane są w trakcie rozwiązywania zadania,
- parametry – wartości stałe, opisujące zasoby, którymi dysponujemy,
- funkcja celu – rozumiana jako kryterium optymalizacji zadania (w zależności od typu modelu może być minimalizowana lub maksymalizowana),
- warunki ograniczające – wymagania nakładane na zmienne (tzw. warunki zasadnicze) i/lub wymagania nakładane na typ zmiennych (tzw. warunki brzegowe).

Model liniowy, to taki, w którym funkcja celu i warunki ograniczające mają postać zależności liniowych:

$$FC = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \{\leq, =, \geq\} b_i \quad i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n \tag{2}$$

gdzie:
x_j – zmienne,
a_{ij}, b_i, c_j – stałe parametry,
$b_i \geq 0$.

Wobec powyższego zadanie programowania liniowego polega na znalezieniu takiego wektora liczb, który ekstremalizuje funkcję celu (1) pod warunkiem spełnienia ograniczeń zasadniczych (2) [1]. W notacji macierzowej zadanie programowania liniowego można wyrazić następująco:

$$FC = cx \tag{3}$$
$$Ax \leq b \tag{4}$$

gdzie:
$c = [c_1, c_2, \dots, c_n]$
$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$
$A = [a_{ij}]_{m \times n}$
$b = [b_1, b_2, \dots, b_m]^T$

Każdy model liniowy z maksymalizacją funkcji celu może zostać sprowadzony do postaci równoważnej z minimalizacją funkcji celu (i na odwrót). Zmiana kierunku optymalizacji wymaga zmiany znaków przy współczynnikach w funkcji celu. Zatem maksymalizacja wyrażenia $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ jest równoważna minimalizacji wyrażenia $\sum_{j=1}^{n} \left(-c_j\right) x_j$ i na odwrót.

Czasami, z różnych przyczyn zależnych od rodzaju modelowanego fragmentu rzeczywistości, zmienne decyzyjne powinny wyrażać się w liczbach całkowitych. Model, w którym na zmienne nałożony został warunek, że muszą przyjmować wartości całkowite nazywa się modelem programowania liniowego całkowitoliczbowego. Jeżeli natomiast zmienne mogą przyjmować tylko wartości ze zbioru {0, 1}, to taki model jest modelem programowania liniowego binarnego.

Rozwiązanie zagadnienia programowania liniowego możliwe jest przy pomocy szeregu algorytmów, jednak najbardziej rozpowszechnioną metodą okazał się algorytm simpleksowy G. Dantziga. W skrócie polega on na wyznaczeniu rozwiązania dopuszczalnego, czyli spełniającego układ ograniczeń, a następnie „poprawianiu" go – w toku kolejnych iteracji – aż do osiągnięcia rozwiązania optymalnego lub wykazaniu nieistnienia rozwiązania optymalnego. W przypadku modeli programowania liniowego całkowitoliczbowego i binarnego rozwiązanie można uzyskać np. metodą podziału i ograniczeń lub metodą cięć [5].

Ze względu na ten iteracyjny charakter algorytmów do rozwiązania modelu programowania liniowego (a także liniowego całkowitoliczbowego i binarnego) wygodnie jest w celu skrócenia czasu obliczeń wykorzystać dostępne programy komputerowe, jak chociażby dodatek Solver do arkusza kalkulacyjnego MS Excel, czy też narzędzia specjalizowane (np. WinQSB).

2. MATEMATYCZNY MODEL PRZYDZIAŁU AUTOBUSÓW DO LINII

Celem budowy modelu jest opracowanie planu przydziału autobusów do linii pozamiejskich w dni robocze w kontekście minimalizacji zużycia paliwa. Tabor spółki składa się z 40 autobusów, różnych typów i o różnych normach zużycia paliwa (tabela 1).

Tab. 1. *Charakterystyka taboru autobusowego MPK w Ostrowcu Św. – opracowanie własne na podstawie [7] (szarym kolorem zacieniowano pojazdy przeznaczone do obsługi linii podmiejskich)*

Marka/ model	Liczba autobusów	Przystosowany do przewozu osób niepełnosprawnych	Średnia norma zużycia paliwa [l/km]	
			miejska	pozamiejska
Jelcz 120M	6	Nie	0,35	0,34
Jelcz 120M/Aut	8	Nie	0,38	0,37
Jelcz PR110	5	Nie	0,35	0,34
MAN NÜ313	2	Tak	0,48	0,46
MAN NL202	8	Tak	0,36	0,35
MAN NM192	4	Tak	0,3	0,29
MAN NM223	2	Tak	0,34	0,33
Solaris Urbino 12	2	Tak	0,36	0,35
Solbus B9,5	2	Nie	0,25	0,24
Solbus SN11M	1	Tak	0,35	0,33

W grupie tej 32 sztuki, to wozy klasy MAXI (Jelcz 120M, Jelcz 120M/Aut, Jelcz PR110, MAN NÜ313, MAN NL202, Solaris Urbino 12, Solbus SN11M) o długości 11 lub 12 metrów, mogące jednocześnie zabrać na pokład około 105 pasażerów, pozostałe 8 sztuk, to wozy klasy MIDI o długości nie przekraczającej 10 metrów i liczbie miejsc około 65-80. Należy ponadto zaznaczyć, że obsługa linii miejskich powinna być zapewniona taborem o wyższym standardzie niż obsługa linii pozamiejskich, tj. pojazdami nowszymi, przystosowanymi do przewozu osób niepełnosprawnych (czyli autobusami niskopodłogowymi, względnie niskowejściowymi, których udział w parku taborowym przewoźnika wynosi blisko 48%). Wobec tego trzon linii pozamiejskich będą stanowić pojazdy marki Jelcz PR110, Jelcz 120M, MAN NM192, MAN NÜ313 i Solbus B9,5. Zdolności przewozowe wymienionych wozów zaspokajają maksymalne potoki pasażerskie na liniach pozamiejskich. Normy zużycia paliwa dla pojazdów marki Jelcz PR110 i Jelcz 120M są jednakowe, wozy te mają podobne parametry konstrukcyjne oraz pojemność i dlatego też w dalszej części tekstu będą ze sobą utożsamiane pod nazwą Jelcz PR110/120M.

Wśród linii pozamiejskich, na których spółka MPK świadczy usługi przewozowe wyróżnia się linię „D" (Ostrowiec Świętokrzyski – Doły Biskupie), „E" (Ostrowiec Świętokrzyski – Bukowie), „F" (Ostrowiec Świętokrzyski – Mychów), „G" (Ostrowiec Świętokrzyski – Garbacz) i „H" (Ostrowiec Świętokrzyski – Broniszowice). W celu zachowania pożądanej częstotliwości niektóre z nich muszą być obsługiwane przez większą niż jeden liczbę autobusów. Każdy pojazd na danej linii wykonujący kursy według rozkładu jazdy tworzy tzw. brygadę. Innymi słowy brygada to połączone w szeregi kursy na danej linii przeznaczone do wykonywania tym samym pojazdem. W tabeli 2. zebrano informacje o liczbie kursów i pracy przewozowej wykonywanej na każdej z nich, wyrażoną w wozokilometrach.

Tab. 2. *Planowane kursy i przebiegi na liniach pozamiejskich w dni robocze – opracowanie własne na podstawie [8]*

Linia	Brygada	Liczba kursów		Przebieg dzienny [wozokm]	
		na brygadzie	na linii	na brygadzie	na linii
D	D/1	13	21	234,78	401,34
	D/2	8		166,56	
E	E/1	12	24	226,85	426,31
	E/2	9		155,85	
	E/3	3		43,61	
F	F/1	12	20	165,63	260,51
	F/2	8		94,88	
G	G/1	19	30	260,14	410,93
	G/2	11		150,79	
H	H/1	10	10	111,71	111,71

Analiza danych zawartych w tabeli 1 i 2 pozwala stwierdzić, że matematyczny model dla rozważanego problemu można określić dwojako:

- w kontekście przydziału autobusów do brygad[1],
- w kontekście przydziału modeli autobusów do linii.

W pierwszym przypadku zmienna decyzyjna x_{ij} będzie przyjmować jedną z dwóch wartości: 1 – gdy autobus typu *i* obsługuje brygadę *j*, 0 – w pozostałych przypadkach. Parametr przy zmiennej stanowi wobec tego iloczyn średniej pozamiejskiej normy zużycia paliwa autobusu typu *i* i liczby wozokilometrów na brygadzie *j* (wyraża tym samym zużycie paliwa przez autobus na brygadzie). Matematyczny model przydziału autobusów do poszczególnych brygad linii pozamiejskich będzie miał zatem postać:

$$\begin{aligned} F_{min} = {} & 79{,}83x_{11} + 56{,}63x_{12} + 77{,}13x_{13} \\ & +52{,}99x_{14} + 14{,}83x_{15} + 56{,}31x_{16} + 32{,}26x_{17} \\ & +88{,}45x_{18} + 51{,}27x_{19} + 37{,}98x_{110} + 56{,}35x_{21} \\ & +39{,}97x_{22} + 54{,}44x_{23} + 37{,}4x_{24} + 10{,}47x_{25} \\ & +39{,}75x_{26} + 22{,}77x_{27} + 62{,}43x_{28} + 36{,}19x_{29} \\ & +26{,}81x_{210} + 68{,}09x_{31} + 48{,}3x_{32} + 65{,}79x_{33} \\ & +45{,}2x_{34} + 12{,}65x_{35} + 48{,}03x_{36} + 27{,}52x_{37} \\ & +75{,}44x_{38} + 43{,}73x_{39} + 32{,}4x_{310} + 108x_{41} \\ & +76{,}62x_{42} + 104{,}35x_{43} + 71{,}69x_{44} + 20{,}06x_{45} \\ & +76{,}19x_{46} + 43{,}64x_{47} + 119{,}66x_{48} + 69{,}36x_{49} \\ & +51{,}39x_{410} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1 \;\; dla\; j = 1, 2, \ldots, 10 \tag{6}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{1j} \leq 11 \tag{7}$$

[1] Tak sformułowany problem można sprowadzić do znanego w dyscyplinie badań operacyjnych zagadnienia transportowego, służącego pierwotnie do obliczania najkorzystniejszego rozplanowania wielkości dostaw homogenicznego towaru pomiędzy *m* dostawcami, a *n* odbiorcami. Algorytmy zagadnienia transportowego są co prawda efektywniejsze od algorytmu simpleks, ale przy wykorzystaniu współczesnych programów komputerowych aspekt efektywności można pominąć.

$$\sum_{j=1}^{10} x_{2j} \leq 2 \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{3j} \leq 4 \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{4j} \leq 2 \tag{10}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ dla\ i = 1, 2, 3, 4,\ \ j = 1, 2, \dots, 10 \tag{11}$$

gdzie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy autobus typu } i \text{ nie obsługuje brygady } j \\ 1, & \text{gdy autobus typu } i \text{ obsługuje brygadę } j \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{dla autobusu typu "Jelcz PR110/Jelcz 120M"} \\ 2 & \text{dla autobusu typu "Solbus B9,5"} \\ 3 & \text{dla autobusu typu "MAN NM192"} \\ 4 & \text{dla autobusu typu "MAN NU313"} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla brygady "D/1"} \\ 2 & \text{dla brygady "D/2"} \\ 3 & \text{dla brygady "E/1"} \\ & \vdots \\ 10 & \text{dla brygady "H/1"} \end{cases}$$

Równanie (5) jest funkcją celu podającą zużycia paliwa. Ponieważ każdą brygadę realizuje tylko jeden autobus konieczne jest założenie warunku ograniczającego w postaci (6), a ponadto ograniczenie na możliwą do wykorzystania liczbę autobusów typu Jelcz, Solbus i MAN – równania (7) – (10). W warunku (11) na zmienne nałożono warunek binarności.

Warto nadmienić, że na podstawie znajomości szacunkowych cen 1 wozokilometra dla różnych typów pojazdów przydział autobusów do brygad można także rozpatrywać pod kątem minimalizacji kosztów. Model taki będzie modelem ogólniejszym, bo oprócz kosztów materiałów pędnych (stanowiących – jak zauważono we wstępnie – średnio ok. 25% kosztów 1 wozokilometra) będzie uwzględniał również m.in. płace kierowców, koszty konserwacji i napraw bieżących (także napraw głównych i remontów), amortyzacje, koszty wydziałowe i ogólnozakładowe. Przyjmując dla autobusów Jelcz PR110/Jelcz 120M, Solbus B9,5, MAN NM192, MAN NÜ313 stawkę za 1 wozokilometr na poziomie odpowiednio 5 zł, 4,64 zł, 4,82 zł, 5,43 zł przykładowy model można sformułować następująco[2]:

$$\begin{aligned} F_{min} = {} & 1173{,}9x_{11} + 832{,}8x_{12} + 1134{,}25x_{13} \\ & +779{,}25x_{14} + 218{,}05x_{15} + 828{,}15x_{16} + 474{,}4x_{17} \\ & +1300{,}7x_{18} + 753{,}95x_{19} + 558{,}55x_{110} + 1089{,}38x_{21} \\ & +772{,}84x_{22} + 1052{,}58x_{23} +723{,}14x_{24} + 202{,}35x_{25} \\ & +768{,}52x_{26} + 440{,}24x_{27} + 1207{,}05x_{28} + 699{,}67x_{29} \\ & +518{,}33x_{210} + 1131{,}64x_{31} + 802{,}82x_{32} 1093{,}42x_{33} \\ & +751{,}2x_{34} + 210{,}2x_{35} + 798{,}34x_{36} + 457{,}32x_{37} \\ & +1253{,}87x_{38} + 726{,}81x_{39} + 538{,}44x_{310} \\ & +1274{,}86x_{41} + 904{,}42x_{42} + +1231{,}8x_{43} + 846{,}27x_{44} \\ & +236{,}8x_{45} + 899{,}37x_{46} + 515{,}2x_{47} + 1412{,}56x_{48} \\ & +818{,}79x_{49} + 606{,}59x_{410} \end{aligned} \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_{ij} = 1\ \ dla\ j = 1, 2, \dots, 10 \tag{13}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{1j} \leq 11 \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{2j} \leq 2 \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{3j} \leq 4 \tag{16}$$

$$\sum_{j=1}^{10} x_{4j} \leq 2 \tag{17}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ dla\ i = 1, 2, 3, 4,\ \ j = 1, 2, \dots, 10 \tag{18}$$

gdzie:

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{gdy autobus typu } i \text{ nie obsługuje brygady } j \\ 1, & \text{gdy autobus typu } i \text{ obsługuje brygadę } j \end{cases}$$

$$i = \begin{cases} 1 & \text{dla autobusu typu "Jelcz PR110/Jelcz 120M"} \\ 2 & \text{dla autobusu typu "Solbus B9,5"} \\ 3 & \text{dla autobusu typu "MAN NM192"} \\ 4 & \text{dla autobusu typu "MAN NU313"} \end{cases}$$

$$j = \begin{cases} 1 & \text{dla brygady "D/1"} \\ 2 & \text{dla brygady "D/2"} \\ 3 & \text{dla brygady "E/1"} \\ & \vdots \\ 10 & \text{dla brygady "H/1"} \end{cases}$$

W komunikacji miejskiej nierzadko wymaga się, aby na liniach kursowały tylko pojazdy o pożądanych parametrach konstrukcyjnych, bądź określonego typu. Oznacza to, że jeśli daną linię obsługuje kilka brygad, to na każdej z nich musi zostać zaplanowany ten sam model autobusu. W rozpatrywanym przypadku problem optymalizacyjny dotyczyć więc będzie takiego przydziału modeli autobusów do linii, aby osiągnąć możliwie najniższe zużycie paliwa (najniższe koszty). W ujęciu matematycznym problemu zmienna decyzyjna x_{ij} będzie zatem przyjmować jedną z dwóch wartości: 1 – gdy autobusy typu *i* obsługują linię *j*, 0 – w pozostałych przypadkach. Parametr przy zmiennej stanowi iloczyn średniej pozamiejskiej normy zużycia paliwa przez autobus typu *i* i liczby wozokilometrów na linii *j* (wyraża zużycie paliwa przez wszystkie autobusy konieczne do obsługi danej linii). Uzyskany w ten sposób model, można ująć w postaci:

$$\begin{aligned} F_{min} = {} & 136{,}46x_{11} + 144{,}95x_{12} + 88{,}57x_{13} \\ & +139{,}72x_{14} + 37{,}98x_{15} + 96{,}32x_{21} + 102{,}31x_{22} \\ & +62{,}52x_{23} + 98{,}62x_{24} + 26{,}81x_{25} + 116{,}39x_{31} \\ & +123{,}63x_{32} + 75{,}55x_{33} + 119{,}17x_{34} + 32{,}4x_{35} \\ & +184{,}62x_{41} + 196{,}1x_{42} + 119{,}83x_{43} \\ & +189{,}03x_{44} + 51{,}39x_{45} \end{aligned} \tag{19}$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \tag{20}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \tag{21}$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \tag{22}$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \tag{23}$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 1 \tag{24}$$

$$2x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 2x_{14} + x_{15} \leq 11 \tag{25}$$

$$2x_{21} + 3x_{22} + 2x_{23} + 2x_{24} + x_{25} \leq 2 \tag{26}$$

$$2x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 2x_{34} + x_{35} \leq 4 \tag{27}$$

$$2x_{41} + 3x_{42} + 2x_{43} + 2x_{44} + x_{45} \leq 2 \tag{28}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}\ dla\ i = 1, 2, 3, 4,\ \ j = 1, 2, \dots, 5 \tag{29}$$

[2] Model ten różni się od modelu przydziału autobusów do brygad rozpatrywanego w aspekcie minimalizacji zużycia paliwa (równania (5) – (11)) tylko współczynnikami przy zmiennych w funkcji celu. W tym przypadku są one iloczynami stawek za 1 wozokilometr i pracy przewozowej na poszczególnych brygadach; wyrażają tym samym łączne koszty pracy autobusów na brygadach.

gdzie:

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{gdy autobusy typu } i \text{ nie obsługują linii } j\\ 1, & \text{gdy autobusy typu } i \text{ obsługują linię } j\end{cases}$$

$$i=\begin{cases}1 & \text{dla autobusów typu "Jelcz PR110/Jelcz 120M"}\\ 2 & \text{dla autobusów typu "Solbus B9,5"}\\ 3 & \text{dla autobusów typu "MAN NM192"}\\ 4 & \text{dla autobusów typu "MAN NU313"}\end{cases}$$

$$j=\begin{cases}1 & \text{dla linii "D"}\\ 2 & \text{dla linii "E"}\\ 3 & \text{dla linii "F"}\\ 4 & \text{dla linii "G"}\\ 5 & \text{dla linii "H"}\end{cases}$$

Podobnie jak w modelu przydziału autobusów do brygad, tak i w modelu przydziału typów autobusów do linii równanie (19) jest funkcją celu określającą zużycia paliwa. W warunkach ograniczających (20) – (24) wymaga się, żeby na każdej linii kursowały tylko pojazdy jednego typu. Mając ponownie na uwadze, iż liczba wozów każdego typu jest z góry określona koniecznym jest sformułowanie tych ograniczeń w postaci nierówności (25) – (28). Strukturę modelu zamyka warunek brzegowy (29) o binarności zmiennych.

Przyjmując w powyższym modelu zamiast zużycia paliwa stawki za 1 wozokilometr pracy autobusów przykładowy model przydziału autobusów do linii pod kątem minimalizacji kosztów można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned}F_{min} &= 2006{,}7x_{11}+2131{,}55x_{12}+1302{,}55x_{13}\\ &+2054{,}65x_{14}+558{,}55x_{15}++1862{,}22x_{21}\\ &+1978{,}08x_{22}+1208{,}77x_{23}+1906{,}72x_{24}\\ &+518{,}33x_{25}+1934{,}46x_{31}+2054{,}81x_{32}\\ &+1255{,}66x_{33}+1980{,}68x_{34}+538{,}44x_{35}+\\ &+2179{,}28x_{41}+2314{,}86x_{42}+1414{,}57x_{43}\\ &+2231{,}35x_{44}+606{,}59x_{45}\end{aligned} \tag{30}$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}=1 \tag{31}$$

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}=1 \tag{32}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}=1 \tag{33}$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=1 \tag{34}$$

$$x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}=1 \tag{35}$$

$$2x_{11}+3x_{12}+2x_{13}+2x_{14}+x_{15}\le 11 \tag{36}$$

$$2x_{21}+3x_{22}+2x_{23}+2x_{24}+x_{25}\le 2 \tag{37}$$

$$2x_{31}+3x_{32}+2x_{33}+2x_{34}+x_{35}\le 4 \tag{38}$$

$$2x_{41}+3x_{42}+2x_{43}+2x_{44}+x_{45}\le 2 \tag{39}$$

$$x_{ij}\in\{0,1\}\ dla\ i=1,2,3,4,\ \ j=1,2,\dots,5 \tag{40}$$

gdzie:

$$x_{ij}=\begin{cases}0, & \text{gdy autobusy typu } i \text{ nie obsługują linii } j\\ 1, & \text{gdy autobusy typu } i \text{ obsługują linię } j\end{cases}$$

$$i=\begin{cases}1 & \text{dla autobusów typu "Jelcz PR110/Jelcz 120M"}\\ 2 & \text{dla autobusów typu "Solbus B9,5"}\\ 3 & \text{dla autobusów typu "MAN NM192"}\\ 4 & \text{dla autobusów typu "MAN NU313"}\end{cases}$$

$$j=\begin{cases}1 & \text{dla linii "D"}\\ 2 & \text{dla linii "E"}\\ 3 & \text{dla linii "F".}\\ 4 & \text{dla linii "G"}\\ 5 & \text{dla linii "H"}\end{cases}$$

PODSUMOWANIE

Dla każdego z przedstawionych powyżej modeli, przy przyjętych danych, można uzyskać tylko jedno rozwiązanie optymalne. Biorąc pod uwagę modele dotyczące przydziału autobusów do brygad rozwiązanie optymalne ma postać:

– dla modelu z kryterium minimalizacji zużycia paliwa: x_{15} = 1, x_{17} = 1, x_{19} = 1, x_{110} = 1, x_{21} = 1, x_{28} = 1, x_{32} = 1, x_{33} = 1, x_{34} = 1, x_{36} = 1, pozostałe zmienne są równe 0; wartość funkcji celu wynosi 462,4 i wyraża najmniejsze (oczekiwane) dzienne zużycie paliwa (w litrach) na liniach pozamiejskich,
– dla modelu z kryterium minimalizacji kosztów: x_{15} = 1, x_{17} = 1, x_{19} = 1, x_{110} = 1, x_{21} = 1, x_{28} = 1, x_{32} = 1, x_{33} = 1, x_{34} = 1, x_{36} = 1, pozostałe zmienne są równe 0; wartość funkcji celu wynosi 7747,16 i wyraża najmniejsze dzienne koszty (w złotych) na liniach pozamiejskich.

Autobusy marki Jelcz PR110/120M, Solbus B9,5, MAN NM192 i MAN NÜ313 należy przydzielić do brygad zgodnie z tabelą 3.

Tab. 3. *Optymalny przydział autobusów do brygad wg kryterium minimalizacji zużycia paliwa i minimalizacji kosztów – opracowanie własne*

Marka/model	Liczba autobusów		Przydzielone brygady
	dostępna	wykorzystana w rozwiązaniu optymalnym	
Jelcz PR110/120M	11	4	E/3, F/2, G/2, H/1
Solbus B9,5	2	2	D/1, G/1
MAN NM192	4	4	D/2, E/1, E/2, F/1
MAN NÜ313	2	0	–

W przypadku modeli dotyczących przydziału typów autobusów do linii rozwiązanie optymalne ma postać:

– dla modelu z kryterium minimalizacji zużycia paliwa: x_{12} = 1, x_{15} = 1, x_{24} = 1, x_{31} = 1, x_{33} = 1, pozostałe zmienne równe 0; wartość funkcji celu wynosi 473,5,
– dla modelu z kryterium minimalizacji kosztów: x_{12} = 1, x_{15} = 1, x_{24} = 1, x_{31} = 1, x_{33} = 1, pozostałe zmienne równe 0; wartość funkcji celu wynosi 7786,94.

Realizację przydziału typów autobusów zobrazowano w tabeli 4.

Tab. 4. *Optymalny przydział typów autobusów do linii wg kryterium minimalizacji zużycia paliwa i minimalizacji kosztów – opracowanie własne*

Marka/model	Liczba autobusów		Przydzielone linie
	dostępna	wykorzystana w rozwiązaniu optymalnym	
Jelcz PR110/120M	11	4	E (3 szt.), H (1 szt.)
Solbus B9,5	2	2	G (2 szt.)
MAN NM192	4	4	D (2 szt.), F (2 szt.)
MAN NÜ313	2	0	–

Na podstawie zaprezentowanych modeli niezaprzeczalna pozostaje wysoka użyteczność metod programowania liniowego w kontekście takiego przydziału autobusów, który zapewni możliwie najmniejsze zużycie paliwa na wybranych liniach komunikacyjnych. Należy jednak pamiętać, że przedstawione w pracy przypadki przydziału autobusów (czyli przydział autobusów do brygad lub przydział typów autobusów do linii) nie są jedynymi z jakimi przychodzi się zmierzyć w polskich przedsiębiorstwach komunikacyjnych.

BIBLIOGRAFIA

1. Findeisen W., Szymanowski J., Wierzbicki A., *Metody obliczeniowe optymalizacji*, Wydawnictwa Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1972.
2. Glinka M., *Elementy badań operacyjnych w transporcie*, Wydawnictwo Politechniki Radomskiej, Radom 2009.
3. Jackiewicz J., Czech P., Barcik J., *Sposoby rozliczania usług w transporcie miejskim. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, 68/2010, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, s. 65 – 72
4. Mikołajczyk Z., *Techniki organizatorskie w rozwiązywaniu problemów zarządzania*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1995.
5. Wagner H.W., *Badania operacyjne*, Państwowe Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 1980.
6. Wyszomirski O., *Transport miejski. Ekonomika i organizacja*, Wydawnictwo Uniwersytetu Gdańskiego, Gdańsk 2008.
7. *Infobus – baza autobusów*, data dostępu 4 grudnia 2014, dostępny w Internecie: http://infobus.pl/pokaz_autobusy_1.html
8. *Rozkład jazdy MPK Ostrowiec Św.*, data dostępu 10 kwietnia 2015, dostępny w Internecie: http://www.mpkostrowiec.com.pl/index.php?page=schedule&type=linie

PLANNING THE ALLOCATION OF THE BUSES TO THE LINES IN TERMS OF MINIMIZING FUEL CONSUMPTION BASED ON THE EXAMPLE OF MPK OSTROWIEC ŚWIĘTOKRZYSKI

Abstract

The paper presents practical possibilities of using linear programming methods in urban transport. The problem was such allocation of the buses to the lines that assures the lowest possible fuel consumption and thus contributes to reducing the costs of doing business. This is especially important when the public carriers realise the part of transport on a commercial basis. The allocation of the buses cannot be arbitrary. The conditions should be considered, i.e. the size of the transport activity and diversity and limited number of the buses.

Keywords: linear programming, urban transport, optimization.

Autorzy:
mgr inż. **Jakub Oziomek** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki
dr hab. inż. **Andrzej Rogowski** – Uniwersytet Technologiczno-Humanistyczny im. Kazimierza Pułaskiego w Radomiu, Wydział Transportu i Elektrotechniki