

Marcin KLIMEK
Państwowa Szkoła Wyższa w Białej Podlaskiej
Zakład Informatyki
m.klimek@dydaktyka.pswbp.pl

PROBLEM LOSOWEGO PRZYDZIAŁU PRACOWNIKÓW DO MIEJSC PRACY Z UWZGLĘDNIENIEM ROTACJI STANOWISK

Streszczenie. W artykule opisany jest rzeczywisty problem przydziału pracowników do stanowisk pracy występujący w jednostkach administracji celnej. Zakłada się, że alokacja pracowników do stanowisk powinna być losowa, niemożliwa do przewidzenia dla pracowników. W poszukiwanej alokacji zalecane jest również unikanie przydziału pracowników do stanowisk, na których w ostatnim czasie pracowali najczęściej. Proponowany jest model matematyczny przydziału pracowników do stanowisk, który bierze pod uwagę rotację stanowisk. Dla tego modelu opracowany jest algorytm heurystyczny, który tworzy losową alokację pracowników.

Słowa kluczowe: przydział pracowników do stanowisk, rotacja stanowisk, odprawy celne, heurystyka

THE PROBLEM OF RANDOM ASSIGNMENT OF WORKERS TO WORKPLACES WITH REGARD TO JOB ROTATION

Abstract. The article describes the real problem of assignment of workers to workplaces occurring in customs administrations. This problem assumes that the allocation of employees to stations should be random, unpredictable for workers. It is also advisable to avoid assigning staff to workplaces where they have worked most recently. A mathematical model of the allocation of staff is proposed to the position, which takes into account the job rotation. For this model a heuristic algorithm, which creates random allocation of employees, is developed.

Keywords: random assignment of workers, job rotation, customs clearance, heuristics

1. Wprowadzenie

Problem przydziału pracowników do stanowisk pracy to ważne zagadnienie praktyczne. W badaniach analizowana jest szerzej rozumiana klasa problemów przydziału zasobów (maszyn, pracowników) do zadań/pracy/stanowisk, tj. przydział maszyn do zadań, kontraktów do oferentów, kierowników projektów do projektów, obszarów handlowych do handlowców itp. Celem alokacji jest najczęściej minimalizacja łącznych kosztów lub czasu niezbędnych do wykonania pracy i/lub maksymalizacja zysku, wydajności, wartości produkcji na jednostkę czasu itp. Często przyjmowane jest założenie, że tylko jeden zasób (pracownik) przydzielony jest do jednej maszyny (projektu, stanowiska).

W tej publikacji opisany jest rzeczywisty problem przydziału pracowników (funkcjonariuszy celno-skarbowych) do stanowisk pracy występujący przy odprawach celnych¹. Kierownik zmiany na każdej służbie przed rozpoczęciem pracy dokonuje obsady stanowisk, których liczba musi być równa liczbie pracowników dostępnych na zmianie. Na niektórych typach stanowisk liczba przydzielanych osób jest większa niż jeden (zależy to od specyfiki oddziału celnego i od bieżącego obciążenia pracą na tych stanowiskach). Przy obsadzaniu stanowisk odpraw celnych należy uwzględnić ich specyfikę. Zakłada się, że alokacja pracowników do stanowisk powinna być losowa, niemożliwa do przewidzenia dla funkcjonariuszy, co ma ograniczyć ryzyko występowania zachowań korupcyjnych, utrudnić możliwość współpracy funkcjonariuszy i przemytników (komunikacja telefoniczna w trakcie służby może podlegać kontroli). W poszukiwanym przydziale wskazane jest również unikanie przydziału pracowników do typów stanowisk, na których w ostatnim czasie pracowali najczęściej. Dodatkowo nie rozróżnia się pracowników pod względem ich kompetencji i wydajności pracy (ewentualne korekty w alokacji uwzględniające wydajność funkcjonariuszy wykonywane są „ręcznie” dla zatwierdzonego systemowego losowego przydziału). Każdy z funkcjonariuszy ma uprawnienia do pracy na wybranych typach stanowisk (niekoniecznie wszystkich, jest to zależne m.in. od przebytych szkoleń stanowiskowych, doświadczenia, predyspozycji itp.).

Przydział funkcjonariuszy do stanowisk odpraw celnych zrealizowany jest w systemie informatycznym, skonstruowanym przez autora, do prowadzenia elektronicznej książki służby „System Przetwarzania Danych – Elektroniczna Książka Służby” w skrócie SPD-EKS². System SPD-EKS jest używany przez każdy z szesnastu Urzędów Celno-Skarbowych w Polsce, przez większość oddziałów celnych, w szczególności na wszystkich przejściach granicznych. Wdrożenie wraz z SPD-EKS zautomatyzowanego przydziału pracowników do stanowisk pracy usprawniło funkcjonowanie przejść granicznych, w szczególności skróciło czas oczekiwania

¹ Klimek M., Łebkowski P.: Algorytm dla problemu losowego przydziału personelu. „Logistyka”, nr 2, 2011, s. 10; Klimek M., Łebkowski P.: Problem przydziału pracowników do stanowisk pracy zagrożonych ryzykiem korupcji. „Logistyka”, nr 2, 2012, s. 737-746.

² Klimek M.: System informatyczny do prowadzenia elektronicznej książki służby w oddziałach celnych. „Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Społeczno-Ekonomicznej”, nr 4, Ostrołęka 2016, s. 461-475.

funkcjonariuszy pojawiających się na służbie na wyznaczenie im miejsc pracy. Dodatkowo ograniczony jest potencjalnie występujący problem przydziału przez kierowników zmiany „wtajemniczonych” funkcjonariuszy na stanowiska kontrolne na konkretnych służbach, na których planowany jest np. przemyt towaru przez współpracujących z nimi przemytników.

W artykule opisano wybrane problemy alokacji pracowników do stanowisk pracy, a następnie przedstawiono przyjęty model matematyczny w SPD-EKS przydziału funkcjonariuszy do stanowisk, który bierze pod uwagę losowość alokacji i rotację stanowisk, przy równoczesnej maksymalizacji liczby obsadzonych stanowisk. Dla tego modelu zaproponowany jest sposób znajdowania alokacji pracowników do stanowisk, w którym można zastosować klasyczny algorytm węgierski³.

2. Opis problemu i przegląd wybranych badań

Przydział pracowników do stanowisk pracy to ważne zagadnienie optymalizacyjne, podejmowane w wielu pracach badawczych. Analizowany jest najczęściej przydział maszyn (pracowników) do poszczególnych stanowisk (miejsc) pracy, przy przyjętych kryteriach optymalizacyjnych, takich jak minimalizacja kosztów lub czasu wykonania zadań, maksymalizacja efektów – ilości lub wartości wyprodukowanych dóbr itp. Przy przydziale pracowników do stanowisk powinny być brane pod uwagę ich kwalifikacje, uprawnienia umiejętności, doświadczenie, wydajność pracy itp.

Problem przydziału personelu (ang. *Personnel Assignment Problem*) jest jednym z zagadnień ogólnego problemu przydziału (ang. *General Assignment Problem*) polegającego na przypisywaniu obiektów z jednej grupy (np. pracowników) do obiektów z innej grupy (np. zadań, stanowisk)⁴. Rozwiązaniem zagadnienia jest przydział m pracowników do n stanowisk tak, aby każdy pracownik był przydzielony do co najwyżej jednego stanowiska, a każde stanowisko było obsadzone przez co najwyżej jednego pracownika oraz aby funkcja efektywności (lub kosztów) osiągnęła swoje maksimum albo minimum (w zależności od „interpretacji” tej funkcji). Parametrami modelu są współczynniki w_{ij} lub c_{ij} określające efektywność (wydajność) lub koszt dla i -tego pracownika na j -tym stanowisku, np. liczba wyprodukowanych wyrobów, czas wykonania zadania itp. Zmiennymi decyzyjnymi są zmienne zerojedynkowe x_{ij} , które określają czy i -ty pracownik jest przydzielony do j -tego stanowiska (wartość 1 oznacza „jest przydzielony”, wartość 0 oznacza „nie jest przydzielony”). Liczba zmiennych decyzyjnych wynosi $m \cdot n$.

³ Kuhn H.W.: The Hungarian method for the assignment problem. „Naval Research Logistics Quarterly”, Vol. 2, 1955, p. 83-97.

⁴ Cattrysse D., Van Wassenhove L.N.: A Survey of algorithms for the generalized assignment problem. „European Journal of Operational Research”, No. 60(3), 1992, p. 260-272.

Model matematyczny problemu alokacji można przedstawić jako problem minimalizacji funkcji kosztu F_c lub maksymalizacji funkcji efektywności F_w :

$$\min F_c = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (1)$$

$$\max F_w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n w_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (2)$$

przy następujących ograniczeniach:

- każdy pracownik może być przypisany do co najwyżej jednego stanowiska pracy:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \langle 1, m \rangle, \quad (3)$$

- każde stanowisko pracy może być obsadzone przez co najwyżej jednego pracownika:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \langle 1, n \rangle, \quad (4)$$

gdzie:

i – indeks (numer) pracownika,

j – indeks (numer) stanowiska pracy,

m – liczba pracowników,

n – liczba stanowisk pracy,

x_{ij} – zero-jedynkowa zmienna decyzyjna,

c_{ij} – koszt pracy i -tego pracownika na j -tym stanowisku,

w_{ij} – efektywność pracy i -tego pracownika na j -tym stanowisku.

Zmiennymi decyzyjnymi są zero-jedynkowe zmienne x_{ij} :

- $x_{ij} = 1$, jeżeli i -ty pracownik jest alokowany do pracy na j -tym stanowisku,
- $x_{ij} = 0$, jeżeli i -ty pracownik nie jest alokowany do pracy na j -tym stanowisku.

Przy alokacji mogą wystąpić następujące sytuacje:

- $m = n$ – liczba pracowników jest równa liczbie stanowisk, każdy pracownik może mieć przydzielone dokładnie jedno stanowisko, a każde stanowisko może być obsadzone przez dokładnie jednego pracownika.
- $m > n$ – liczba pracowników jest większa od liczby stanowisk, każdy pracownik może mieć przydzielone co najwyżej jedno stanowisko (co najmniej $m-n$ pracowników nie ma przydzielonych stanowisk), a każde stanowisko może być obsadzone przez dokładnie jednego pracownika,

- $m < n$ – liczba pracowników jest mniejsza od liczby stanowisk, każdy pracownik może mieć przydzielone dokładnie jedno stanowisko, a każde stanowisko może być obsadzone przez co najwyżej jednego pracownika (co najmniej $n-m$ stanowisk pozostanie nieobsadzona).

W klasycznym zagadnieniu przydziału każdy z pracowników może pracować (ma uprawnienia, kwalifikacje do pracy) na każdym stanowisku, a liczba pracowników jest równa liczbie obsadzanych stanowisk ($m = n$), a w wyniku alokacji każde stanowisko ma przydzielonego dokładnie jednego pracownika. Kryterium oceny alokacji może być np. osiągnięcie maksymalnej wydajności pracowników lub obsadzenie wszystkich stanowisk pracy przy, uwzględnieniu uprawnień, umiejętności pracowników itp.

Zagadnienie alokacji pracowników do stanowisk przedstawiane jest jako graf dwudzielny, w którym jego rozłączne części to zbiór węzłów reprezentujących pracowników i zbiór węzłów reprezentujących stanowiska. Między pracownikami a stanowiskami występują ważone połączenia (krawędzie w grafie). Wagi połączeń pracowników ze stanowiskami określają efektywność w_{ij} lub koszt pracownika c_{ij} przy wykonywaniu zadań na określonym stanowisku. W klasycznym problemie alokacji każdy z pracowników może pracować na każdym stanowisku (jest połączony krawędzią z każdym ze stanowisk). Jako rozwiązanie szukany jest taki zbiór krawędzi łączących pracowników ze stanowiskami, aby zmaksymalizować efektywność lub zminimalizować koszt pracy wyznaczony jako suma wag wybranych krawędzi.

W literaturze rozważanych jest wiele różnych wersji problemu przydziału pracowników do stanowisk pracy. Liczne badania można znaleźć w pracach przeglądowych⁵.

Jednym z ważnych modeli jest model biorący pod uwagę uprawnienia (kwalifikacje) poszczególnych pracowników do poszczególnych stanowisk⁶. Zagadnienie to jest definiowane jako problem minimalizacji funkcji kosztów F_c (wzór 1) lub maksymalizacji funkcji wydajności F_w (wzór 2) przy uwzględnieniu ograniczeń związanych z uprawnieniami pracowników:

- każdy z pracowników może być przydzielony maksymalnie do jednego ze stanowisk, do których ma uprawnienia:

$$\sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \langle 1, m \rangle, \quad (5)$$

- każde stanowisko pracy może być obsadzone przez jednego pracownika, który ma do niego uprawnienia:

⁵ Burkard R.E.: Selected topics on assignment problem. „Discrete Applied Mathematics”, No. 123, 2006, p. 257-302; Geetha S., Nair K.P.K.: A variation of the assignment problem. „European Journal of Operational Research”, No. 68(3), 1993, p. 422-426; Pentico D.: Assignment Problems: A Golden Anniversary Survey. „European Journal Of Operational Research”, No. 176, 2007, p. 774-796.

⁶ Caron G., Hansen P., Jaumard B.: The assignment problem with seniority and job priority constraints. „Operations Research”, No. 47(3), 1999, p. 449-454; Volgenant A.: A note on the assignment problem with seniority and job priority constraints. „European Journal of Operational Research”, No. 154 (1), 2004, p. 330-335.

$$\sum_{i=1}^m q_{ij} \cdot x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \langle 1, n \rangle, \quad (6)$$

gdzie:

$q_{ij} = 1$, gdy i -ty pracownik ma uprawnienia (kwalifikacje) do wykonywania pracy na j -tym stanowisku,

$q_{ij} = 0$, gdy i -ty pracownik nie ma uprawnień do wykonywania pracy na j -tym stanowisku.

Przy zagadnieniach przydziału personelu uwzględniane są również⁷:

- hierarchia stanowisk i pracowników (ang. *hierarchy constraint*), np. problem przydziału stanowisk w wojsku,
- miejsce wykonywania pracy zespołu na stanowiskach (ang. *team constraint*) – cały zespół pracowników powinien być przydzielany w tej samej lokalizacji.

W badaniach analizowany jest również problem najmniej kosztownej (minimalizacja funkcji kosztu F_c) obsady k stanowisk ($k < m$ i $k < n$)⁸, co sprowadza się do dodania następującego ograniczenia:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_{ij} = k. \quad (7)$$

Problemy przydziału należą do zagadnień liniowych, zero-jedynkowych, dla których możliwe jest zastosowanie znanych metod programowania całkowitoliczbowego. Czas działania metod programowania całkowitoliczbowego może być jednak zbyt długi. Znane są także inne algorytmy, które rozwiązują dokładnie klasyczny problem alokacji zasobów w czasie wielomianowym, tj. algorytm węgierski⁹.

3. Sformułowanie problemu

Rozważane zagadnienie różni się od klasycznego, a także innych analizowanych w literaturze. W systemie odpraw celnych zalecane są zastosowanie rotacji oraz losowe przydzielanie pracowników do stanowisk pracy, co może zmniejszyć potencjalne ryzyko zachowań korupcyjnych. Liczba przydzielanych pracowników jest równa liczbie stanowisk obsadzanych w drodze losowania (tylko przy takiej konfiguracji alokacji system SPD umożliwi

⁷ Cimen Z.: A Multi-Objective Decision Support Model for the Turkish Armed Forces Personnel Assignment System. Master's Thesis. Turkey 2001; Toroslu I.: Personnel assignment problem with hierarchical ordering constraints. „Computers & Industrial Engineering”, No. 45, 2003, p. 493-510.

⁸ Dell'Amico M., Martello S.: The k -cardinality assignment problem. „Discrete Applied Mathematics”, No. 76(1-3), 1997, p. 103-121.

⁹ Kuhn H.W.: The Hungarian method for the assignment problem. „Naval Research Logistics Quarterly”, Vol. 2, 1955, p. 83-97.

jej przeprowadzenie). Pracownicy mają uprawnienia (kwalifikacje) do pracy na określonych typach stanowisk.

Model matematyczny problemu zbudowany jest przy uwzględnieniu wymagań określonych przez oddziały celne dla przydziału funkcjonariuszy do stanowisk odpraw celnych. Przy formułowaniu zagadnienia korzystano ze znanych modeli przydziału personelu. Rozważany problem przydziału można sformułować jako zagadnienie obsady maksymalnej liczby uprawnionych pracowników do stanowisk pracy (funkcja celu F – wzór 8) przy ograniczeniach (9-12):

$$\max F = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad \forall i \in \langle 1, n \rangle, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} \leq 1 \quad \forall j \in \langle 1, n \rangle, \quad (10)$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} \cdot x_{ij} \leq n_k, \quad \forall k \in \langle 1, s \rangle, j \in \left\langle \sum_{k=1}^s n_{k-1} + 1, \sum_{k=1}^s n_k \right\rangle \quad (11)$$

$$n = \sum_{k=1}^s n_k, \quad (12)$$

gdzie:

n – liczba różnych stanowisk pracy równa liczbie alokowanych pracowników,

s – liczba różnych typów obsadzanych stanowisk pracy,

n_k – liczba stanowisk pracy do obsadzenia typu k (pomocniczo $n_0 = 0$),

q_{ij} – uprawnienia i -tego pracownika do pracy na j -tym stanowisku, gdy pracownik ma uprawnienie $q_{ij} = 1$, w przeciwnym przypadku $q_{ij} = 0$.

Każde stanowisko j ($j = 1, \dots, n$) może być obsadzone przez maksymalnie jednego pracownika (wzór 9). Każdy pracownik i ($i = 1, \dots, n$) może być przydzielony na maksymalnie jedno stanowisko (wzór 10). Każdy typ stanowiska k ($k = 1, \dots, s$) może być obsadzony przez maksymalnie n_k pracowników, którzy mają do niego uprawnienia (wzór 11). Wszystkie miejsca pracy numerowane są od 1 do n dla kolejnych typów stanowisk od 1 do s (wzór 12). Dla wszystkich stanowisk danego typu uprawnienia pracowników są identyczne (wzór 13):

$$\forall j_1, j_2 \in \left\langle \sum_{k=1}^s n_{k-1} + 1, \sum_{k=1}^s n_k \right\rangle, \forall i \in \langle 1, n \rangle : q_{ij_1} = q_{ij_2}. \quad (13)$$

Problem alokacji pracowników do stanowisk pracy sprowadza się do maksymalizacji liczby obsadzonych stanowisk (wzór 8) przez uprawnionych pracowników, przy równoczesnym zapewnieniu losowości tej alokacji. Wartość funkcji celu $F \leq n$.

W rzeczywistym systemie odpraw celnych w zdecydowanej większości przeprowadzonych alokacji znajdowana jest pełna obsada stanowisk $F = n$, którą można znaleźć na wiele różnych sposobów (pracownicy mają uprawnienia do wielu typów stanowisk, co daje dość dużą „swobodę” przy generowaniu pełnej obsady). Przeprowadzona analiza funkcjonowania systemu informatycznego do tworzenia losowego przydziału funkcjonariuszy do stanowisk odpraw celnych¹⁰ wskazała na potrzebę wprowadzenia rotacji, tzn. ograniczenia przydziału tych typów stanowisk pracownikom, na których pracowali oni zbyt często (w przyjętym horyzoncie czasowym).

W celu zapewnienia rotacyjności obsady stanowisk dla każdego z pracowników określa się ile razy pracował na danym stanowisku w określonym horyzoncie czasowym (np. w ciągu ostatnich 30 zmian/służb). Wyznaczane są współczynniki przydziału poszczególnych pracowników do typów stanowisk pracy (wzór 14):

$$r_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{dla } \sum_{t=1}^T z_i(t) = 0 \\ \frac{\sum_{t=1}^T w(t) \cdot y_{ik}(t) \cdot n_k(t)}{\sum_{t=1}^T w(t) \cdot z_i(t) \cdot n_k(t)}, & \text{dla } \sum_{t=1}^T z_i(t) > 0 \end{cases}, \quad (14)$$

gdzie:

$w(t)$ – waga przypisana przydziałowi w okresie t ,

T – przyjęty horyzont czasowy,

$y_{ik}(t)$ – przydział i -tego pracownika do stanowiska typu k na zmianie w okresie t , $y_{ik}(t) = 1$, gdy i -ty pracownik był przydzielony do stanowiska typu k w czasie t , w przeciwnym przypadku $y_{ik}(t) = 0$,

$n_k(t)$ – liczba stanowisk typu k obsadzanych w czasie t ,

$z_i(t)$ – przydział i -tego pracownika do dowolnego ze stanowisk w czasie t .

Jeśli na danej zmianie t (na służbie w okresie t) określony pracownik i był przydzielony do dowolnego z typów stanowisk ($k = 1, \dots, s$), to $z_i(t) = 1$. Dla dowolnego $t = 1, \dots, T$:

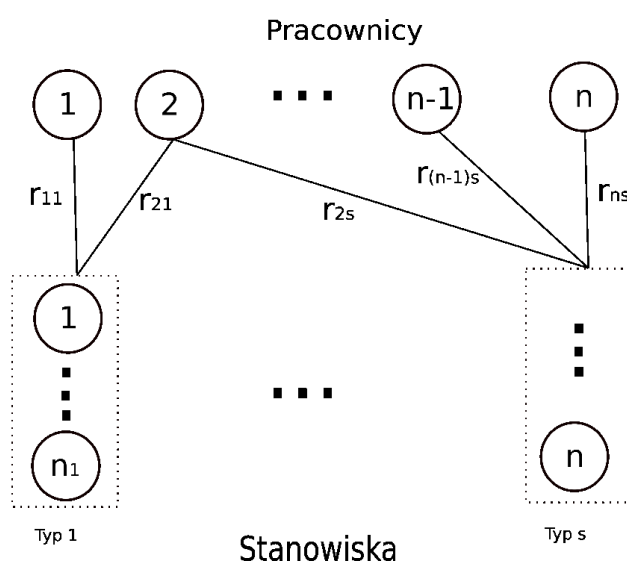
$$z_i(t) = \sum_{k=1}^s y_{ik}(t), \quad z_i(t) \in \{0,1\}. \quad (15)$$

¹⁰ Klimek M., Łebkowski P.: Problem przydziału pracowników do stanowisk pracy zagrożonych ryzykiem korupcji. „Logistyka”, nr 2, 2012, s. 737-746.

Przy obliczaniu współczynnika r_{ik} uwzględnia się, że wcześniej wykonane przydziały powinny mieć mniejszy wpływ na przeprowadzaną alokację niż te ostatnio zrealizowane. Zatem dla następujących po sobie przydziałów wskazane jest, aby wagi spełniały nierówność $w_{t-1} \leq w_t$ dla każdego $t = 2, \dots, T$. Aby zastosować krótkoterminową rotację można przyjmować znacznie wyższe wagi dla ostatnich służb.

Przed losowaniem dla danego zestawu stanowisk i pracowników dla każdego stanowiska pracy ustalani są pracownicy, których przydział do tego stanowiska nie jest wskazany ze względu na wysoki współczynnik r_{ik} (częstą alokację pracownika do tego stanowiska w analizowanym horyzoncie czasowym).

Problem można przedstawić, podobnie jak klasyczne zagadnienie przydziału, jako graf dwudzielny (ang. *bipartite graph*) złożony z n pracowników i n stanowisk pracy, zaprezentowany na rysunku 1.



Rys. 1. Graf dwudzielny dla analizowanego problemu przydziału
Źródło: Opracowanie własne.

Pracownik jest połączony łukiem z danym typem stanowiska, jeśli ma uprawnienia do pracy na nim. Przykładowo na rysunku 1 widać, że pracownik 1 ma uprawnienia do wszystkich stanowisk typu 1 (ponumerowanych od 1 do n_1), a nie ma ich do stanowisk typu s. Na łukach podawane są współczynniki przydziału r_{ik} określone na podstawie poprzednich przydziałów, które są wykorzystane w celu zapewnienia rotacji stanowisk.

Rozwiązaniem rozpatrywanego problemu alokacji jest obsadzenie uprawnionymi pracownikami możliwie największej liczby stanowisk, przy uwzględnieniu losowości tej alokacji i rotacji stanowisk. Zapewnienie rotacyjności obsady jest kryterium dodatkowym przydziału personelu – przy identycznej liczbie przydzielonych pracowników preferowany jest ten przydział, w którym występuje jak najmniejsza liczba obsad stanowisk pracownikami o wysokim współczynniku przydziału r_{ik} . Pomocnicza funkcja celu F_r , uwzględniająca poziom

zapewnienia rotacji stanowisk, która jest decydującym kryterium oceny alokacji jedynie przy identycznych wartościach F (wzór 8), jest określona następująco (wzór 16):

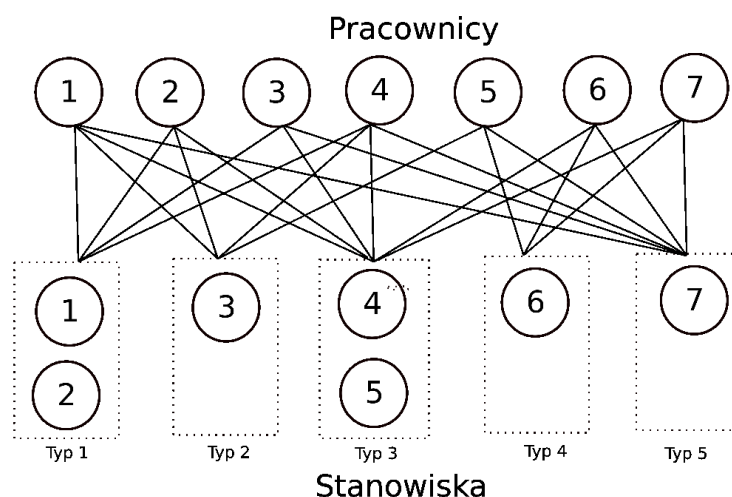
$$\min F_r = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}, \quad (16)$$

gdzie:

c_{ij} – współczynnik przydziału i -tego pracownika na j -tym stanowisku, $c_{ij} = r_{ik}$, jeśli stanowisko typu k (k – typ j -tego stanowiska) jest wyznaczone do rotacji na podstawie historii przydziałów dla i -tego pracownika lub 0 w przeciwnym przypadku. Wartości współczynników c_{ij} wpływają na losowość przeprowadzonej alokacji. Im większa ich liczba ma przypisane wartości niezerowe, tym mniejsza losowość przydziału. W rzeczywistym problemie przydziału stanowisk do odpraw celnych przeprowadzana jest analiza tego, które stanowiska mogą być „rotowane”, aby losowość alokacji była zachowana. Sposób ustalania współczynników c_{ij} przedstawiony jest dla przykładu ilustrującego zagadnienie.

4. Przykład ilustracyjny

W celu ilustracji analizowanego problemu przydziału i proponowanego algorytmu generującego losową alokację pracowników do stanowisk pracy posłużono się przykładem. W przykładowym zagadnieniu, przedstawionym na rysunku 2, alokowanych jest 7 pracowników do 5 typów stanowisk ($n_1 = 2$, $n_2 = 1$, $n_3 = 2$, $n_4 = 1$, $n_5 = 1$).



Rys. 2. Przykładowy problem przydziału
Źródło: Opracowanie własne.

Poszczególni pracownicy mają uprawnienia do pracy na następujących typach stanowisk:

- pracownik 1 do stanowisk typu: 1, 2, 3, 5 ($q_{11} = 1, q_{12} = 1, q_{13} = 1, q_{14} = 0, q_{15} = 1$),
- pracownik 2 do stanowisk typu: 1, 2, 3 ($q_{21} = 1, q_{22} = 1, q_{23} = 1, q_{24} = 0, q_{25} = 0$),
- pracownik 3 do stanowisk typu: 1, 3, 5 ($q_{31} = 1, q_{32} = 0, q_{33} = 1, q_{34} = 0, q_{35} = 1$),
- pracownik 4 do stanowisk typu: 1, 2, 3, 5 ($q_{41} = 1, q_{42} = 1, q_{43} = 1, q_{44} = 0, q_{45} = 1$),
- pracownik 5 do stanowisk typu: 2, 4, 5 ($q_{51} = 0, q_{52} = 1, q_{53} = 0, q_{54} = 1, q_{55} = 1$),
- pracownik 6 do stanowisk typu: 3, 4, 5 ($q_{61} = 0, q_{62} = 0, q_{63} = 1, q_{64} = 1, q_{65} = 1$),
- pracownik 7 do stanowisk typu: 3, 4, 5 ($q_{71} = 0, q_{72} = 0, q_{73} = 1, q_{74} = 1, q_{75} = 1$).

Dla typów stanowisk, do których pracownicy mają uprawnienia wyznaczane są, w przyjętym horyzoncie czasowym, współczynniki przydziału r_{ik} na podstawie historii poprzednich alokacji. Przyjęte do analiz współczynniki przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1

Współczynniki przydziału r_{ik} dla poszczególnych pracowników i typów stanowisk pracy

	Typ stanowiska 1	Typ stanowiska 2	Typ stanowiska 3	Typ stanowiska 4	Typ stanowiska 5
Pracownik 1	0,2	0,2	0,3	x	0,1
Pracownik 2	0,1	0,3	0,3	x	x
Pracownik 3	0,4	x	0,3	x	0,2
Pracownik 4	0,3	0,4	0,2	x	0,1
Pracownik 5	x	0,2	x	0,35	0,4
Pracownik 6	x	x	0,1	0,3	0,3
Pracownik 7	x	x	0,4	0,2	0,2

x – oznacza brak uprawnień pracownika do pracy na danym typie stanowisk

Źródło: Opracowanie własne.

Na podstawie współczynników przydziału r_{ik} ustalane są współczynniki c_{ij} , uwzględniane przy alokacji pracowników do stanowisk. Wyznaczanie stanowisk do rotacji przebiega krokowo.

Krok 1: Obliczenie średnich wartości r_{ik} oddzielnie dla wszystkich typów stanowisk i dla wszystkich pracowników.

Krok 2: Ustalenie wszystkich stanowisk z współczynnikami r_{ik} o wartości większej od średniej dla i -tego pracownika i dla k -tego typu stanowiska (zapisane pogrubioną czcionką w tabeli 1), tylko te stanowiska są uwzględniane przy rotacji.

Krok 3: Obliczenie dla wszystkich typów stanowisk różnicy u_k między liczbą pracowników uprawnionych do pracy na tym typie stanowisk a liczbą obsadzanych stanowisk tego typu.

Krok 4: Utworzenie listy L stanowisk do rotacji ustalonych w kroku 2 posortowanych w porządku malejących współczynników r_{ik} (przy równej wartości r_{ik} o kolejności decyduje wyższa wartość u_k , następnie większa liczba typów stanowisk, do których ma uprawnienia i -ty pracownik, na koniec niższy numer przypisany pracownikowi).

Dla analizowanego przykładu lista L kolejnych par w postaci pracownik, typ stanowiska jest następująca:

$$L = \{(5, 5), (7, 3), (3, 1), (4, 2), (5, 4), (1, 3), (6, 5), (2, 3), (2, 2), (4, 1), (6, 4)\}.$$

Krok 5: Definiowanie stanowisk do rotacji na podstawie listy L . Pobierane są kolejne elementy listy L ; do rotacji są wyznaczane jedynie te pary (i, k) , dla których różnica między liczbą pracowników uprawnionych do pracy na stanowisku typu k a liczbą obsadzanych stanowisk typu k jest większa lub równa 1 oraz liczba typów stanowisk pozostałych do obsadzenia, do których ma uprawnienia i -ty pracownik (przy „wykluczeniu” stanowisk, które są już wcześniej przeznaczone do rotacji) jest większa lub równa 2.

Lista kolejnych stanowisk i pracowników wyznaczonych do rotacji na podstawie listy L jest następująca (przekreślone pary są wykluczone z rotacji):

$$R = \{(5, 5), (7, 3), (3, 1), (4, 2), (\underline{5}, 4), (1, 3), (\underline{6}, 5), (2, 3), (\underline{2}, 2), (\underline{4}, 1), (6, 4)\}.$$

Tabela 2

Współczynniki przydziału r_{ik} dla poszczególnych pracowników i typów stanowisk pracy

	Typ stanowiska 1	Typ stanowiska 2	Typ stanowiska 3	Typ stanowiska 4	Typ stanowiska 5
Pracownik 1	0	0	0,3	x	0
Pracownik 2	0	0	0,3	x	x
Pracownik 3	0,4	x	0	x	0
Pracownik 4	0	0,4	0	x	0
Pracownik 5	x	0	x	0	0,4
Pracownik 6	x	x	0	0,3	0
Pracownik 7	x	x	0,4	0	0

Na podstawie danych dla typów stanowisk budowany jest model uwzględniający poszczególne stanowiska. Macierz kosztów (przyjęte współczynniki przydziału c_{ij} dla poszczególnych pracowników i stanowisk pracy) zaprezentowana jest w tabeli 3.

Tabela 3

Przyjęte współczynniki przydziału c_{ij} dla poszczególnych pracowników i stanowisk pracy

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	0	0	0	0,3	0,3	x	0
Pracownik 2	0	0	0	0,3	0,3	x	x
Pracownik 3	0,4	0,4	x	0	0	x	0
Pracownik 4	0	0	0,4	0	0	x	0
Pracownik 5	x	x	0	x	x	0	0,4
Pracownik 6	x	x	x	0	0	0,3	0
Pracownik 7	x	x	x	0,4	0,4	0	0

Źródło: Opracowanie własne.

Dla analizowanego zagadnienia szukane jest rozwiązanie, w którym obsadzona będzie maksymalna liczba uprawnionych pracowników do stanowisk pracy (maksymalizacja F – wzór 8). Przy równych wartościach F preferowana jest alokacja uwzględniająca rotację stanowisk (maksymalizacja F_r – wzór 16).

5. Proponowana metoda rozwiązania problemu

Dedykowany algorytm alokacji pracowników do stanowisk musi działać w akceptowalnie krótkim czasie, ponieważ jest uruchamiany codziennie przed rozpoczęciem pracy, a pracownicy rozpoczynają służbę dopiero po przydzieleniu im stanowisk. Jeśli istnieje wiele alokacji o identycznej wartości funkcji celu F_r , szukana procedura powinna znajdować je z porównywalnym prawdopodobieństwem. Rozmiar zagadnienia w praktyce odpraw celnych wynosi od 3 do 45 pracowników (stanowisk), w zależności od wielkości oddziału celnego. Aktualnie ze względu na wymagany szybki czas działania stosowany jest prosty algorytm konstrukcyjny wykorzystujący reguły priorytetowe: generowana jest losowa permutacja alokowanych pracowników (uwzględniająca priorytety wyznaczone na podstawie liczby uprawnień poszczególnych pracowników do stanowisk), którzy są kolejno przydzielani do stanowisk uporządkowanych rosnąco na podstawie liczby uprawnień do nich pracowników (porządek stanowisk jest dynamicznie wyznaczany po każdym przydziale pracownika).

Analiza funkcjonowania algorytmu przydziału i odpraw celnych wskazała na potrzebę rotacji funkcjonariuszy na poszczególnych stanowiskach. Próby poprawy działającej procedury przydziału w celu uwzględnienia rotacji okazały się niewystarczające¹¹. W tym artykule proponowana jest metoda rozwiązania analizowanego zagadnienia losowej alokacji z uwzględnieniem rotacji stanowisk, która może być wdrożona w systemie odpraw celnych.

W celu uwzględnienia losowości alokacji na podstawie macierzy kosztów ustalane są przedziały, z których będą generowane liczby losowe. Sposób ustalania tych przedziałów jest następujący:

- współczynniki c_{ij} sortowane są w porządku rosnącym,
- współczynniki c_{ij} o identycznych wartościach mają przypisane wspólne przedziały,
- dla niższych współczynników c_{ij} przypisywane są mniejsze liczby losowe,
- poszczególne liczby losowe generowane są bez powtórzeń, z przedziału $\langle 0, n^2-1 \rangle$.

Dla analizowanej macierzy kosztów (tabela 3) kolejno:

- 22 współczynniki c_{ij} mają wartość 0 – liczby losowe generowane są z przedziału $\langle 0, 21 \rangle$,
- 5 współczynników c_{ij} ma wartość 0,3 – liczby losowe generowane są z przedziału $\langle 22, 26 \rangle$,
- 6 współczynników c_{ij} ma wartość 0,4 – liczby losowe generowane są z przedziału $\langle 27, 32 \rangle$,
- brak uprawnień pracowników do stanowisk występuje w 16 przypadkach – liczby losowe generowane są z przedziału $\langle 33, 48 \rangle$,

¹¹ Klimek M., Łebkowski P.: Problem przydziału pracowników do stanowisk pracy zagrożonych ryzykiem korupcji. „Logistyka”, nr 2, 2012, s. 737-746.

Szczegółowe dane o przedziałach, z których generowane są losowe liczby przedstawione są w tabeli 4.

Tabela 4

Przedziały, z których generowane są losowe liczby dla analizowanego problemu przydziału

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	<0, 21>	<0, 21>	<0, 21>	<22, 26>	<22, 26>	<33, 48>	<0, 21>
Pracownik 2	<0, 21>	<0, 21>	<0, 21>	<22, 26>	<22, 26>	<33, 48>	<33, 48>
Pracownik 3	<27,32>	<27,32>	<33, 48>	<0, 21>	<0, 21>	<33, 48>	<0, 21>
Pracownik 4	<0, 21>	<0, 21>	<27,32>	<0, 21>	<0, 21>	<33, 48>	<0, 21>
Pracownik 5	<33, 48>	<33, 48>	<0, 21>	<33, 48>	<33, 48>	<0, 21>	<27,32>
Pracownik 6	<33, 48>	<33, 48>	<33, 48>	<0, 21>	<0, 21>	<22, 26>	<0, 21>
Pracownik 7	<33, 48>	<33, 48>	<33, 48>	<27,32>	<27,32>	<0, 21>	<0, 21>

Źródło: Opracowanie własne.

Generowane są losowe permutacje, a następnie wypełniana jest macierz wykorzystywana przy obliczeniach przy użyciu klasycznych algorytmów przydziału:

- permutacja zbioru $\langle 0, 21 \rangle = \{1, 18, 21, 0, 15, 16, 4, 3, 9, 11, 6, 7, 20, 2, 5, 8, 13, 19, 12, 10, 14, 17\}$,
- permutacja zbioru $\langle 22, 26 \rangle = \{26, 23, 25, 24, 22\}$,
- permutacja zbioru $\langle 27,32 \rangle = \{31, 27, 29, 28, 30, 32\}$,
- permutacja zbioru $\langle 33, 48 \rangle = \{38, 41, 34, 48, 35, 45, 42, 47, 36, 37, 46, 40, 39, 43, 33, 44\}$.

Dla tak określonych permutacji dane do rozwiązania klasycznego zagadnienia przydziału zaprezentowane są w tabeli 5.

Tabela 5

Macierz losowych kosztów do rozwiązania klasycznego zagadnienia przydziału

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	1	18	21	26	23	38	0
Pracownik 2	15	16	4	25	24	41	34
Pracownik 3	31	27	48	3	9	35	11
Pracownik 4	6	7	29	20	2	45	5
Pracownik 5	42	47	8	36	37	13	28
Pracownik 6	46	40	39	19	12	22	10
Pracownik 7	43	33	44	30	32	14	17

Źródło: Opracowanie własne.

Dzięki zastosowaniu opisanych mechanizmów analizowany problem został sprowadzony do klasycznego zagadnienia, które można dokładnie rozwiązać, np. szybkim algorytmem węgierskim (wielomianowy czas obliczeń).

Przebieg algorytmu węgierskiego

1) Od każdego elementu wiersza odjąć najmniejszy element w tym wierszu.

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	1	18	21	26	23	38	0
Pracownik 2	11	12	0	21	20	37	30
Pracownik 3	28	24	45	0	6	32	8
Pracownik 4	4	5	27	18	0	43	3
Pracownik 5	34	39	0	28	29	5	20
Pracownik 6	36	30	29	9	2	12	0
Pracownik 7	29	19	30	16	18	0	3

2) Od każdego elementu kolumny tabeli odjąć najmniejszy element w tej kolumnie.

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	0	13	21	26	23	38	0
Pracownik 2	10	7	0	21	20	37	30
Pracownik 3	27	19	45	0	6	32	8
Pracownik 4	3	0	27	18	0	43	3
Pracownik 5	33	34	0	28	29	5	20
Pracownik 6	35	25	29	9	2	12	0
Pracownik 7	28	14	30	16	18	0	3

3) Wykreślić zera za pomocą minimalnej liczby poprowadzonych linii skreśleń (zaznaczeń).

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	0	13	21	26	23	38	0
Pracownik 2	10	7	0	21	20	37	30
Pracownik 3	27	19	45	0	6	32	8
Pracownik 4	3	0	27	18	0	43	3
Pracownik 5	33	34	0	28	29	5	20
Pracownik 6	35	25	29	9	2	12	0
Pracownik 7	28	14	30	16	18	0	3

Liczba zaznaczonych wierszy i kolumn jest równa 6 i różna od $n = 7$, więc algorytm musi być kontynuowany.

4) Wybór minimalnego, niezaznaczonego elementu $x = 5$. Dodać x do elementów na przecięciu zaznaczonych wierszy i kolumn. Odjąć x od niezaznaczonych elementów.

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	0	13	26	26	23	38	0
Pracownik 2	5	2	0	16	15	32	25
Pracownik 3	27	19	50	0	6	32	8
Pracownik 4	3	0	32	18	0	43	3
Pracownik 5	28	29	0	23	24	0	15
Pracownik 6	35	25	34	9	2	12	0
Pracownik 7	28	14	35	16	18	0	3

Liczba zaznaczonych wierszy i kolumn jest równa 6 i różna od $n = 7$, więc algorytm musi być kontynuowany.

5) Wybór minimalnego, niezaznaczonego elementu $x = 2$. Dodać x do elementów na przecięciu zaznaczonych wierszami i kolumnami. Odjąć x od niezaznaczonych elementów.

	Stanowisko 1 typ 1	Stanowisko 2 typ 1	Stanowisko 3 typ 2	Stanowisko 4 typ 3	Stanowisko 5 typ 3	Stanowisko 6 typ 4	Stanowisko 7 typ 5
Pracownik 1	0	13	28	26	23	40	0
Pracownik 2	3	0	0	14	13	30	23
Pracownik 3	27	19	52	0	6	34	8
Pracownik 4	3	0	34	18	0	43	3
Pracownik 5	26	27	0	21	22	0	13
Pracownik 6	35	25	36	9	2	14	0
Pracownik 7	26	12	35	14	16	0	1

Liczba zaznaczonych wierszy i kolumn jest równa 7 i równa $n = 7$, więc możliwe jest już znalezienie rozwiązania – odpowiednie przydziały wyznaczają zera wyróżnione pogrubioną czcionką.

Uzyskana alokacja wygląda następująco:

Pracownik 1 – Stanowisko 1, pracownik 2 – Stanowisko 2, pracownik 3 – Stanowisko 4, pracownik 4 – Stanowisko 5, pracownik 5 – Stanowisko 3, pracownik 6 – Stanowisko 7, pracownik 7 – Stanowisko 6.

Minimalna wartość funkcji dla tego zagadnienia przydziału z macierzą losowych kosztów (tabela 5) wynosi $1 + 16 + 3 + 2 + 8 + 10 + 14 = 54$, przy maksymalnej wartości funkcji celu F równej 7 (wzór 8) i pomocniczej, minimalnej wartości funkcji celu F_r (wzór 16) równej 0 (przydzielono wszystkie stanowiska z uwzględnieniem rotacji).

Proponowana metoda rozwiązania zapewnia losowość: dla innej macierzy losowych kosztów mogą być generowane inne przydziały pracowników, uwzględniające rotację wybranych stanowisk.

W artykule przedstawione jest zastosowanie do rozwiązania problemu klasycznego algorytmu węgierskiego o złożoności wielomianowej rzędu $O(n^3)$. Możliwe jest również zastosowanie innych szybszych algorytmów¹², proponowanych dla zagadnień przydziału, np. metod rekurencyjnej¹³, heurystycznej¹⁴. Użycie innych algorytmów będzie przedmiotem dalszych prac autora.

Podsumowanie

W artykule analizowane jest zagadnienie przydziału pracowników do stanowisk pracy w systemie odpraw celnych. Dla tego zagadnienia obsada stanowisk pracy powinna być generowana w sposób losowy z uwzględnieniem rotacji części stanowisk. Aktualnie przydział

¹² Akpan N.P., Abraham U.P.: A Critique of the Hungarian Method of Solving Assignment Problem to the Alternate Method of Assignment Problem by Mansi. „International Journal of Sciences: Basic and Applied Research”, No. 29(1), 2016, p. 43-56; Dutta J., Pal S.C.: A note on Hungarian method for solving assignment problem. „Journal of Information and Optimization Sciences”, No. 36(5), 2015, p. 451-459.

¹³ Matsiy O.B., Morozov A.V., Panishev A.V.: The Recurrent Method to Solve the Assignment Problem. „Cybernetics and Systems Analysis”, No. 51(6), 2015, p. 939-946.

¹⁴ Amponsah S., Otoo D., Salhi S., Quayson E.: Proposed Heuristic Method for Solving Assignment Problems. „American Journal of Operations Research”, No. 6, 2016, p. 436-441.

pracowników do odpraw celnych jest wykonywany przy użyciu prostego algorytmu priorytetowego. Analiza jego działania wskazała jednak na potrzebę usprawnień. Proponowane podejście będzie rozważane do wdrożenia w najbliższym czasie.

W artykule opisany jest sposób budowy modelu matematycznego dla tego specyficznego problemu, który jest zaprezentowany dla przykładowego problemu alokacji. Do rozwiązania zagadnienia może być wykorzystany algorytm węgierski dla odpowiednio losowo wygenerowanej macierzy kosztów, której zasady budowy są przedstawione w artykule.

W dalszych pracach autor skoncentruje się na implementacji algorytmu węgierskiego i innych wydajnych algorytmów przydziału oraz sprawdzeniu ich wydajności dla przygotowanych problemów testowych. Poza czasem działania algorytmów zostanie przebadana losowość generowanych przydziałów i możliwość ich wykorzystania dla praktycznego zagadnienia przydziału pracowników do stanowisk odpraw celnych.

Bibliografia

1. Akpan N.P., Abraham U.P.: A Critique of the Hungarian Method of Solving Assignment Problem to the Alternate Method of Assignment Problem by Mansi. „International Journal of Sciences: Basic and Applied Research”, No. 29(1), 2016.
2. Amponsah S., Otoo D., Salhi S., Quayson E.: Proposed Heuristic Method for Solving Assignment Problems. „American Journal of Operations Research”, No. 6, 2016.
3. Burkard R.E.: Selected topics on assignment problem. „Discrete Applied Mathematics”, No. 123, 2006.
4. Caron G., Hansen P., Jaumard B.: The assignment problem with seniority and job priority constraints. „Operations Research”, No. 47(3), 1999.
5. Cimen Z.: A Multi-Objective Decision Support Model for the Turkish Armed Forces Personnel Assignment System. Master's Thesis. Turkey 2001.
6. Cattrysse D., Van Wassenhove L.N.: A Survey of algorithms for the generalized assignment problem. „European Journal of Operational Research”, No. 60(3), 1992.
7. Dell'Amico M., Martello S.: The k-cardinality assignment problem. „Discrete Applied Mathematics”. No. 76(1-3), 1997.
8. Dutta J., Pal S.C.: A note on Hungarian method for solving assignment problem. „Journal of Information and Optimization Sciences”, No. 36(5), 2015.
9. Geetha S., Nair K.P.K.: A variation of the assignment problem. „European Journal of Operational Research”, No. 68(3), 1993.
10. Klimek M., Łebkowski P.: Algorytm dla problemu losowego przydziału personelu. „Logistyka”, nr 2, 2011, dod.: Logistyka – nauka, s. 10 (dokument elektroniczny).

11. Klimek M., Łebkowski P.: Problem przydziału pracowników do stanowisk pracy zagrożonych ryzykiem korupcji. „Logistyka”, nr 2, 2012.
12. Klimek M.: System informatyczny do prowadzenia elektronicznej książki służby w oddziałach celnych. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Społeczno-Ekonomicznej, nr 4, Ostrołęka 2016.
13. Kuhn H.W.: The Hungarian method for the assignment problem. „Naval Research Logistics Quarterly”, Vol. 2, 1955.
14. Matsiy O.B., Morozov A.V., Panishev A.V.: The Recurrent Method to Solve the Assignment Problem. „Cybernetics and Systems Analysis”, No. 51(6), 2015.
15. Pentico D.: Assignment Problems: A Golden Anniversary Survey. „European Journal Of Operational Research”, No. 176, 2007.
16. Toroslu I.: Personnel assignment problem with hierarchical ordering constraints. „Computers & Industrial Engineering”, No. 45, 2003.
17. Volgenant A.: A note on the assignment problem with seniority and job priority constraints. „European Journal of Operational Research”, No. 154(1), 2004.