

Stanisław ADAMCZAK, Dariusz JANECKI, Krzysztof STĘPIEŃ
POLITECHNIKA ŚWIĘTOKRZYSKA W KIELCACH, WYDZIAŁ MECHATRONIKI I BUDOWY MASZYN

Obliczanie położenia osi walca skojarzonego dla elementów walcowych mierzonych strategią „klatki”

Prof. dr hab. inż. Stanisław ADAMCZAK, dr h.c.

Prof. dr hab. inż. Stanisław Adamczak, dr h.c., jest Dziekanem Wydziału Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej. Jego zainteresowania naukowe obejmują podstawy metrologii i metrologię wielkości geometrycznych. Jest członkiem wielu organizacji i stowarzyszeń naukowych w kraju i za granicą. Opracowane przez jego zespół systemy pomiarowe zostały wdrożone w wielu krajowych i zagranicznych zakładach przemysłowych.



e-mail: adamczak@tu.kielce.pl

dr hab. inż. Dariusz JANECKI, prof. PŚk,

Dr hab. inż. Dariusz Janekci: pracuje na stanowisku profesora w Politechnice Świętokrzyskiej i jest kierownikiem Zakładu Automatyki i Informatyki. Zainteresowania naukowe obejmują teorię sterowania ze szczególnym uwzględnieniem metod identyfikacji i sterowania adaptacyjnego, matematyczne podstawy metrologii powierzchni oraz problemy związane z modernizacją przyrządów pomiarowych.



e-mail: djanecki@tu.kielce.pl

Streszczenie

Ze względu na powszechne występowanie elementów walcowych, dokładny pomiar zarysów walcowości części maszyn stanowi ważny obszar zastosowania metrologii wielkości geometrycznych w przemyśle. Najnowsze normy Specyfikacji Geometrii Wyrobów opisują cztery główne strategie pomiaru walcowości: metodę przekrojów poprzecznych, przekrojów wzdłużnych, metodę punktową oraz tzw. metodę „klatki”. Metody pomiaru za pomocą trzech pierwszych strategii są dość dobrze rozpoznane oraz opisane matematycznie. Jednak najdokładniejsza strategia pomiarowa spośród wymienionych, strategia „klatki”, ze względu swoją złożoność nie została jeszcze we właściwy sposób opisana matematycznie. Artykuł przedstawia matematyczny model obliczenia położenia osi walca skojarzonego dla zarysu uzyskanego metodą „klatki”.

Słowa kluczowe: walec skojarzony, położenie osi, strategia „klatki”.

Calculation of the associated cylinder axis for elements measured by the “bird-cage” strategy

Dr inż. Krzysztof STĘPIEŃ

Dr inż. Krzysztof Stępień pracuje na stanowisku adiunkta w Katedrze Technologii Mechanicznej i Metrologii Politechniki Świętokrzyskiej w Kielcach. W 2006 roku obronił na Wydziale Mechatroniki i Budowy Maszyn Politechniki Świętokrzyskiej pracę doktorską w dziedzinie Mechanika i Budowa Maszyn. W swoich pracach zajmuje się zagadnieniami podstaw metrologii i pomiarów wielkości geometrycznych, a w szczególności pomiarami zarysów kształtu.



e-mail: kstepien@tu.kielce.pl

Abstract

Cylindrical elements are very large group of machine parts. Therefore problem of accurate cylindricity measurements is an important area of application of metrology of geometrical quantities in industry. New GPS standards describe four measuring strategies: a cross-section method, a generatrix method, a point method and so-called “bird-cage” method. First three methods are relatively well recognized. However, the last one, the most accurate method, due to its complexity has not been well described mathematically yet. The paper presents mathematical model of calculation of the cylinder axis orientation for the “bird-cage” strategy.

Keywords: associated cylinder, axis orientation, “bird-cage” strategy

1. Wprowadzenie

W dotychczasowej praktyce dokładność powierzchni walcowych była oceniana zazwyczaj na podstawie odchyłek zarysów okrągłości w kilku wybranych przekrojach poprzecznych badanego przedmiotu. Ponieważ na współpracę elementów ma wpływ cała powierzchnia, w nowoczesnych procesach technologicznych coraz częściej wymagana jest ciągła kontrola zarysów walcowych [1]. Zarysy te powinny być oceniane za pomocą parametrów, które odnoszą się do całej powierzchni elementu.

Parametry i zalecenia co do pomiaru walcowości opisuje norma ISO/TS 12180 [2]. Ten dokument normatywny stanowi ogniwo łańcucha norm Specyfikacji Geometrii Wyrobów i jest z nim powiązany. Norma ISO/TS 12180 definiuje cztery strategie pomiaru walcowości: pomiar metodą przekrojów poprzecznych, metodą przekrojów wzdłużnych, metodą „klatki”, będącą złożeniem dwóch poprzednich metod oraz metodą punktową.

Metodą, która zgodnie z normą daje najbardziej miarodajne wyniki jest metoda „klatki”. Jest to jednak metoda dość złożona i z tego względu nie została w dotychczasowych pracach odpowiednio opisana matematycznie. Z tego względu w Politechnice Świętokrzyskiej podjęto próbę matematycznego modelowania pomiaru walcowości tą metodą.

Zgodnie z wymaganiami normy ISO/TS 12180 odchyłki walcowości powinny być obliczane względem tzw. walca skojarzonego, tzn. idealnego walca związanego ze zmierzonym zarysem za pomocą określonej konwencji (np. metodą najmniejszych kwadratów czy metodą minimalnej strefy). Dokładne położenie osi walca skojarzonego względem przedmiotu jest umowne. Jak pokazują to przeprowadzone badania (np. w pracach [3, 4]), dokładne wyznaczenie położenia osi walca skojarzonego znacząco poprawia dokładność pomiaru walcowości.

2. Matematyczny model zarysu walcowości

Zarys walcowy najwygodniej jest opisać we współrzędnych cylindrycznych (φ, z, C) , gdzie φ jest kątem obrotu walca z współrzędną określającą wysokość, natomiast C wartością zarysu [5]. W związku z tym, dowolny zarys walcowości można oznaczyć następująco:

$$C(\varphi, z), \quad (1)$$

przy czym

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ i } 0 \leq z \leq H, \quad (2)-(3)$$

gdzie H jest wysokością walca.

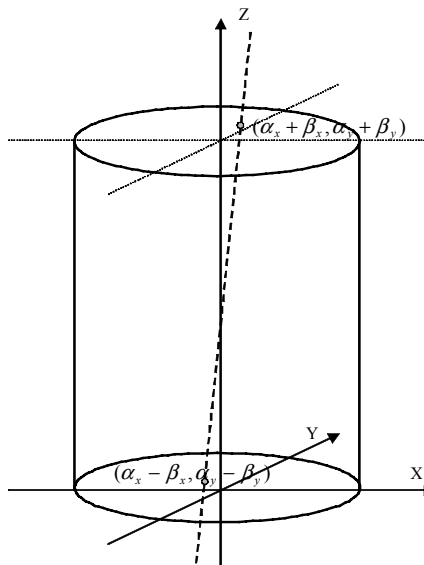
Dowolną oś walca można zdefiniować podając równanie określające współrzędne przecięcia osi z płaszczyzną poziomą o współrzędnej z . Można to zrobić na wiele sposobów. Można tego dokonać na wiele sposobów. W niniejszej pracy przyjmuje się sposób następujący:

$$e_x(z) = \alpha_x + \left(\frac{2z}{H} - 1\right)\beta_x, \quad (4)$$

$$e_y(z) = \alpha_y + \left(\frac{2z}{H} - 1\right)\beta_y. \quad (5)$$

Można zauważyć, że przykładowo punkty przecięcia osi z płaszczyznami $z=0$ i $z=H$ (patrz rys. 1) będą równe odpowiednio:

$$(\alpha_x - \beta_x, \alpha_y - \beta_y) \text{ i } (\alpha_x + \beta_x, \alpha_y + \beta_y). \quad (6)$$



Rys. 1. Położenie i parametry osi rzeczywistej przedmiotu względem walca nominalnego

Fig. 1. Orientation and parameters of the real workpiece axis in relation to the nominal cylinder

Jeśli odstępstwa osi przedmiotu od osi obrotu czujnika (stołu) są niewielkie, to można przyjąć, że

$$C_s(\varphi, z) = C_o + e_x(z) \cos \varphi + e_y(z) \sin \varphi = \theta^T \psi(\varphi, z), \quad (7)$$

gdzie

$$\theta = [\alpha_x \quad \beta_x \quad \alpha_y \quad \beta_y \quad C_0]^T \quad (8)$$

$$\psi(\varphi, z) = \begin{bmatrix} \cos \varphi \\ \left(\frac{2z}{H} - 1\right) \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ \left(\frac{2z}{H} - 1\right) \sin \varphi \\ 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

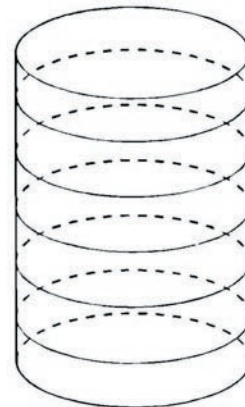
Warto zwrócić uwagę, że w przyjętym sposobie parametryzacji walca wszystkie elementy wektora $\psi(\varphi, z)$ są ortogonalne w obszarze $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0, H]$. Pozwoli to na uproszczenie wyprowadzeń.

3. Obliczanie położenie osi walca skojarzonego

Pomiar walcowości metodą klatki stanowi złożenie pomiaru metodą kolejnych przekrojów poprzecznych oraz przekrojów wzdłużnych. Z tego względu, najpierw zostaną wyznaczone zależności umożliwiające określenie położenie osi walca skojarzonego dla metody przekrojów poprzecznych oraz metod przekrojów wzdłużnych.

3.1. Obliczenie położenia osi walca skojarzonego w metodzie przekrojów poprzecznych

Trajektorię skanowania przedmiotu przez czujnik pomiarowy w metodzie przekrojów poprzecznych przedstawia rys. 1.



Rys. 2. Pomiar walcowości metodą przekrojów poprzecznych [2]
Fig. 2. Cylindricity measurement by the cross-sections method [2]

W pomiarze metoda przekrojów poprzecznych uzyskujemy ciąg próbek

$$C(\varphi_i^c, z_j^c), \quad i = 0, 1, \dots, N_c - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M_c - 1, \quad (10)$$

gdzie N_c jest liczbą punktów pomiarowych w każdym przekroju poprzecznym, natomiast M_c jest liczbą przekrojów poprzecznych [6].

Zakładamy, że w przekrojach poprzecznych próbki są zbierane równomiernie ze stałym odstępem próbkowania, tzn.

$$\varphi_i^c = \frac{2\pi i}{N_c}, \quad i = 0, 1, \dots, N_c - 1. \quad (11)$$

Natomiast odległości między przekrojami poprzecznymi nie muszą być równe.

Biorąc pod uwagę zależności (4)-(10) możemy zdefiniować wskaźnik jakości postaci:

$$J_c(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M_c-1} \sum_{i=0}^{N_c-1} (C(\varphi_i^c, z_j^c) - \theta^T \psi(\varphi_i^c, z_j^c))^2. \quad (12)$$

Wyznaczając pochodne cząstkowe $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$ i przyrównując je do zera otrzymujemy:

$$A_c \theta = b_c, \quad (13)$$

gdzie

$$A_c = \begin{pmatrix} \frac{N_c}{2} D^c & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N_c}{2} D^c & 0 \\ 0 & 0 & N_c M_c \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$D^c = \begin{pmatrix} M_c & \sum_{j=0}^{M_c-1} \left(\frac{2z_j^c}{H} - 1 \right) \\ \sum_{j=0}^{M_c-1} \left(\frac{2z_j^c}{H} - 1 \right) & \sum_{j=0}^{M_c-1} \left(\frac{2z_j^c}{H} - 1 \right)^2 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$b_c = \begin{pmatrix} \frac{N_c}{2} \sum_{j=0}^{M_c-1} e_x(z_j^c) \\ \frac{N_c}{2} \sum_{j=0}^{M_c-1} \left(\frac{2z_j^c}{H} - 1 \right) e_x(z_j^c) \\ \frac{N_c}{2} \sum_{j=0}^{M_c-1} e_y(z_j^c) \\ \frac{N_c}{2} \sum_{j=0}^{M_c-1} \left(\frac{2z_j^c}{H} - 1 \right) e_y(z_j^c) \\ \sum_{i=0}^{N_c-1} \sum_{j=0}^{M_c-1} C(\varphi_i^c, z_j^c) \end{pmatrix} \quad (16)$$

gdzie $(e_x(z_j^c), e_y(z_j^c))$ są ocenami osi rzeczywistej walca, tzn.

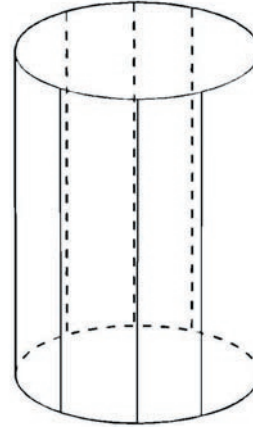
$$e_x = \frac{2}{N_c} \sum_{i=0}^{N_c-1} \cos \varphi_i^c C(\varphi_i^c, z_j^c), \quad (17)$$

$$e_y = \frac{2}{N_c} \sum_{i=0}^{N_c-1} \sin \varphi_i^c C(\varphi_i^c, z_j^c). \quad (18)$$

Dzięki zależnościom (13)-(18) możemy obliczyć położenie osi walca skojarzonego w pomiarze metodą przekrojów poprzecznych [7].

3.2. Obliczenie położenia osi walca skojarzonego w metodzie przekrojów wzdłużnych

Trajektorię skanowania przedmiotu przez czujnik pomiarowy w metodzie przekrojów poprzecznych przedstawia rys. 3.



Rys. 3. Pomiar walcowości metodą przekrojów wzdłużnych [2]
Fig. 3. Cylindricity measurement by the generatrix method [2]

W pomiarze metoda przekrojów wzdłużnych uzyskujemy ciąg próbek

$$C(\varphi_i^l, z_j^l) \quad i = 0, 1, \dots, N_l - 1, \quad j = 0, 1, \dots, M_l - 1, \quad (19)$$

gdzie: N_l jest liczbą przekrojów wzdłużnych, natomiast M_l jest liczbą próbek w jednym przekroju wzdłużnym. Zakładamy, że próbki w przekrojach wzdłużnych zbierane są równomiernie w przedziale $z^l \in [0, H]$, tak, że

$$z_j^l = \frac{Hj}{M_l - 1}, \quad j = 0, 1, \dots, M_l - 1 \quad (20)$$

W celu obliczenia współrzędnych położenia osi walca skojarzonego zdefiniowano wskaźnik jakości postaci:

$$J_l(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{M_l-1} \sum_{i=0}^{N_l-1} (C(\varphi_i^l, z_j^l) - \theta^T \psi(\varphi_i^l, z_j^l))^2 \quad (21)$$

Z warunków koniecznych optymalności $\frac{\partial J_l}{\partial \theta_i} = 0$ otrzymujemy

$$A_l \theta = b_l, \quad (22)$$

gdzie

$$A_l = \begin{pmatrix} M_l s_3 & 0 & M_l s_5 & 0 & s_1 \\ 0 & \gamma_l s_3 & 0 & \gamma_l s_5 & 0 \\ M_l s_5 & 0 & M_l s_4 & 0 & s_2 \\ 0 & \gamma_l s_5 & 0 & \gamma_l s_4 & 0 \\ s_1 & 0 & s_2 & 0 & M_l N_l \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$b_l = \begin{pmatrix} M_l s_1 a(\varphi_i^l) \\ \gamma_l s_1 b(\varphi_i^l) \\ M_l s_2 a(\varphi_i^l) \\ \gamma_l s_2 b(\varphi_i^l) \\ \sum_{i=0}^{N_l-1} \sum_{j=0}^{M_l-1} C(\varphi_i^l, z_j^l) \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Przy formułowaniu zależności (23)-(24) wykorzystano własność:

$$\sum_{j=0}^{M_l-1} \left(\frac{2z_j^l}{H} - 1 \right) = 0 \quad (25)$$

oraz oznaczenie

$$\sum_{j=0}^{M_l-1} \left(\frac{2z_j^l}{H} - 1 \right)^2 = \frac{M_l^2 + M_l}{3M_l - 2} = \gamma_l. \quad (26)$$

Odpowiednie wartości s_{1-6} występujące w zależnościach (23) i (24) można zapisać jako:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sum_{i=0}^{N_l-1} \cos \varphi_i^l, \quad s_2 = \sum_{i=0}^{N_l-1} \sin \varphi_i^l, \quad s_3 = \sum_{i=0}^{N_l-1} \cos^2 \varphi_i^l, \\ s_4 &= \sum_{i=0}^{N_l-1} \sin^2 \varphi_i^l, \quad s_5 = \sum_{i=0}^{N_l-1} \sin \varphi_i^l \cos \varphi_i^l. \end{aligned} \quad (27)$$

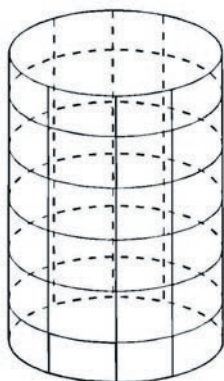
Wartości $a(\varphi_i^l)$ oraz $b(\varphi_i^l)$ występujące w zależności (24) są parametrami prostej regresji $a + b \left(\frac{2z}{H} - 1 \right)$ dla i -tego przekroju wzdłużnego, a więc

$$a(\varphi_i^l) = \frac{1}{M_l} \sum_{j=0}^{M_l-1} C(\varphi_i^l, z_j^l), \quad (28)$$

$$b(\varphi_i^l) = \frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=0}^{M_l-1} C(\varphi_i^l, z_j^l) \left(\frac{2z_j^l}{H} - 1 \right). \quad (29)$$

3.3. Obliczenie położenia osi walca skojarzonego w metodzie klatki

W pomiarze metodą klatki (p. rys. 4), uzyskiwany zarys walcowości stanowi złożenie zarysów uzyskanych metodą przekrojów poprzecznych oraz metoda przekrojów wzdłużnych.



Rys. 4. Pomiar walcowości metodą klatki [2]
Fig. 4. Cylindricity measurement by the "bird-cage" method [2]

Wskaźnik jakości użyty do obliczenia parametrów walca skojarzonego dla metody klatki można zdefiniować jako sumę wskaźnika jakości dla metody przekrojów poprzecznych (opisanego zależnością (12)) i wskaźnika jakości dla metody przekrojów wzdłużnych (opisanego zależnością (21)). Wobec tego, można go opisać zależnością:

$$\begin{aligned} J(\theta) &= \frac{1}{2} \left(\sum_{j=0}^{M_c} \sum_{i=0}^{N_c-1} (C(\varphi_i^c, z_j^c) - C_0 - \theta^T \psi(\varphi_i^c, z_j^c))^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^{M_l} \sum_{i=0}^{N_l-1} (C(\varphi_i^l, z_j^l) - C_0 - \theta^T \psi(\varphi_i^l, z_j^l))^2 \right). \end{aligned} \quad (30)$$

Wyznaczając pochodne cząstkowe $\frac{\partial J}{\partial \theta_i}$ i przyrównując je do zera otrzymujemy:

$$(A_c + A_l)\theta = b_c + b_l, \quad (31)$$

gdzie A_c, b_c, A_l, b_l opisano zależnościami odpowiednio: (14), (16), (23) i (24).

Pełny model matematyczny umożliwiający obliczenie parametrów walca skojarzonego dla pomiaru walcowości metodą klatki tworzą zależności (8), (14), (16), (23), (24) i (31).

4. Wnioski

Zgodnie z wytycznymi zawartymi w normie PN-EN ISO 12180, strategia klatki jest najbardziej zalecaną strategią pomiaru walcowości. Umożliwia ona uzyskanie dokładnej informacji o badanym zarysie walcowym. Niestety, pomiar metodą klatki jest najbardziej skomplikowany, nie tylko ze względu na swoją czasową i pracochłonność, ale także ze względu na złożoność opisu matematycznego. Jest to dobrze widoczne na podstawie analizy zależności wprowadzonych w punkcie 3. Z zależności tych wynika, że macierze umożliwiające określenie położenia osi walca skojarzonego metodą klatki są sumą odpowiednich macierzy dla metody przekrojów poprzecznych i metody przekrojów wzdłużnych.

Warto zauważyć, że w szczególnym przypadku, jeśli w pomiarze metodą klatki, zarówno współrzędne przekrojów poprzecznych, jak i wzdłużnych są rozmieszczone równomiernie, to macierze A_c i A_l stają się diagonalne i przyjmują postać:

$$A_c = \text{diag} \left[\frac{N_c M_c}{2}, \frac{N_c \gamma_c}{2}, \frac{N_c M_c}{2}, \frac{N_c \gamma_c}{2}, N_c M_c \right], \quad (32)$$

$$A_l = \text{diag} \left[\frac{N_l M_l}{2}, \frac{N_l \gamma_l}{2}, \frac{N_l M_l}{2}, \frac{N_l \gamma_l}{2}, N_l M_l \right]. \quad (33)$$

Opracowane w pracy zależności wykorzystane zostaną w dalszej części badań nad obliczaniem parametrów walcowości przy pomiarze metodą klatki. W pierwszym etapie planowanych działań przewiduje się przeprowadzenie komputerowych badań symulacyjnych.

Po pozytywnym zakończeniu symulacji komputerowych planuje się przeprowadzenie weryfikacji eksperymentalnej na podstawie danych pomiarowych.

5. Literatura

- [1] Osanna P. H. I in.: Cylindricity – a well known problem and solution. International Journal of machine Tools and Manufacture, t. 32, Nr ½, Elsevier 1992, s. 91-97.
- [2] ISO 12180-1,2. Geometrical Product Specifications (GPS) - Cylindricity – Part 1: Vocabulary, Part 2 – Specification Operators.
- [3] Lao Y. -Z., Leong H. -W., Separata F. P., Singh G., Accurate cylindricity evaluation with axis-estimation preprocessing, Precision Engineering, Vol. 27 (4), 2003, s. 429-437.
- [4] Murthy T. S. R., A comparison of different algorithms for cylindricity evaluation, Int. J. of Machine Tool Des., 1982, s. 283-292.
- [5] Żebrowska-Lucyk S., Cyfrowe metody pomiaru odchyłki walcowości. Model matematyczny, oprogramowanie, wyniki badań. Konferencja „Metrologia Wspomagana Komputerowo”, Zegrze k. Warszawy, 1993, t.2/B, s. 269.
- [6] Adamczak S., Janecki D., Stępień K.: Nowe możliwości pomiarów walcowości dużych części maszyn. IV Wrocławskie Sympozjum „Automatyzacja produkcji. Prace Naukowe Instytutu Technologii Maszyn i Automatyzacji Politechniki Wrocławskiej, Nr 48, t. I, Wrocław 2003, s. 523 – 531.
- [7] Adamczak S., Janecki D., Stępień K.: Komputerowe symulacyjne badania odniesieniowych pomiarów zarysów walcowości. I Międzynarodowa Konferencja „Metrologia w Technikach Wytwarzania”, t. 1, Kraków 2003, s. 23 – 30