

Roman LEWANDOWSKI<sup>1</sup>

## CAŁKOWANIE RÓWNAŃ RUCHU KONSTRUKCJI Z UŁAMKOWYMI TŁUMIKAMI MAXWELLA

W pracy przedstawiono nową metodę numerycznego całkowania równań ruchu z lepko-sprężystymi tłumikami drgań. Tłumiki drgań są opisywane za pomocą ułamkowego modelu Maxwella. Do opisu tego modelu stosuje się pochodne ułamkowe (niecałkowitego rzędu). Podano podstawy teoretyczne proponowanej metody oraz omówiono wyniki przykładowych obliczeń.

**Słowa kluczowe:** dynamika, tłumiki drgań, zasada Boltzmana, drgania niestacjonarne

### 1. Wprowadzenie

Efektywną metodą zmniejszania drgań wszelkiego rodzaju konstrukcji jest instalowanie na niej różnego rodzaju tłumików. Często w tym celu stosuje się tzw. tłumiki lepko-sprężyste [1, 2]. Zasadniczym elementem tego rodzaju tłumików są warstwy wykonane z materiału o dużych możliwościach rozpraszania energii (bardzo często kopolimery). W lepko-sprężystych tłumikach cieczowych zasadniczym elementem są cieczy o dużej lepkości. Omówienie sposobów wbudowania tego rodzaju tłumików oraz ich zasad działania i konstrukcji można znaleźć w [1, 2]. Dynamiczne zachowanie tych tłumików opisuje się za pomocą różnych modeli reologicznych. Przegląd stosowanych w tym celu modeli reologicznych można znaleźć w monografii [1]. Najczęściej stosowanymi modelami to model wiskotyczny, Kelvina i model Maxwella. Jak wynika z prac [3, 4] modele te niezbyt precyzyjnie opisują zachowanie tłumików lepko-sprężystych, do poprawnego opisu wymagane jest zastosowanie np. uogólnionego modelu Maxwella o dużej liczbie parametrów. Prowadzi to do znacznego wzrostu liczby niewiadomych w równaniach ruchu konstrukcji z lepko-sprężystymi tłumikami drgań. Z tego powodu coraz częściej do opisu tych tłumików stosuje się tzw. ułamkowe modele reologiczne [1]. Modele te wierniej opisują zachowanie tłumików w szerokim zakresie częstości wymuszenia, a równocześnie zawierają

---

<sup>1</sup> Autor do korespondencji / corresponding author: Roman Lewandowski, Politechnika Poznańska, Instytut Konstrukcji Budowlanych, ul. Piotrowo 5, 60-965 Poznań; tel. 616652472; roman.lewandowski@put.poznan.pl

mniej parametrów. Równania różniczkowe opisujące ułamkowe modele reologiczne zawierają jednak pochodne ułamkowe; co komplikuje metody rozwiązania równań ruchu konstrukcji ponieważ w tych ostatnich występują także pochodne ułamkowe (porównaj [1]).

Istnieje jednak możliwość opisanie zachowania ułamkowych modeli reologicznych za pomocą równań całkowych wykorzystujących zasadę Boltzmana (porównaj [5]). W tym przypadku zachowanie konstrukcji jest opisywane macierzowym równaniem różniczkowo-całkowym. W równaniu tym nie występują pochodne ułamkowe, ale trzeba znać funkcje relaksacji modeli ułamkowych użytych do opisu tłumików. Funkcje te są znane, ale opisywane są za pomocą funkcji specjalnych (porównaj [6]). W przypadku ogólnym do rozwiązania omawianego równania stosuje się metody numerycznego całkowania. Zostały one opisane np. w pracach [7-10]. We wszystkich wspomnianych prace zastosowano pochodnych ułamkowe podane przez Grunwalda i użyto ich do sformułowania metody numerycznego całkowania. Metody te charakteryzują się tym, że we wszystkich przypadkach ruch konstrukcji z elementami lepko-sprężystymi (tłumikami lub warstwami) opisywano równaniami różniczkowymi.

W pracy rozpatruje się problem nieustalonych drgań wymuszonych konstrukcji sprężystych z wbudowanymi lepko-sprężystymi tłumikami drgań. W odróżnieniu od wyżej wymienionych prac do opisu rozpatrywanego układu używa się równania różniczkowo-całkowego. Rozwiązanie wyznacza się nową metodą numerycznego całkowania.

## 2. Równania ruchu

### 2.1. Równania ruchu tłumika drgań

Do opisu tłumików drgań stosuje się tzw. ułamkowy model Maxwella. Składa się on z połączonych szeregowo elementu sprężystego i tzw. elementu sprężysto-lepkiego (the spring-pot element) [1, 3]. Zachowanie elementu sprężysto-lepkiego opisuje zależność:

$$u(t) = c_d D_t^\alpha x(t) \quad (1)$$

gdzie  $u(t)$  jest siłą w tym elemencie,  $x(t)$  względnym przemieszczeniem końców omawianego elementu,  $c_d$  stałą elementu, a symbol  $D_t^\alpha x(t)$  oznacza pochodną ułamkową rzędu  $\alpha$  funkcji  $x(t)$  względem czasu  $t$ . W pracy używa się pochodnych ułamkowych Caputo [1, 3].

Zachowanie ułamkowego tłumika Maxwella opisuje równanie:

$$u(t) + \theta^\alpha D_t^\alpha u(t) = k_d \theta^\alpha D_t^\alpha x(t) \quad (2)$$

gdzie  $\theta$  jest czasem relaksacji,  $\theta^\alpha = c_d / k_d$ , a  $k_d$  jest współczynnikiem sztywności elementu sprężystego.

Po wykonaniu na równaniu (2) transformacji Laplace'a mamy:

$$\bar{u}(s) = k_d \frac{(s\theta)^\alpha}{1 + (s\theta)^\alpha} \bar{x}(s) \quad (3)$$

gdzie symbole  $\bar{u}(s)$  i  $\bar{x}(s)$  oznaczają odpowiednio transformaty Laplace'a  $u(t)$  i  $x(t)$ ,  $s$  jest zmienną Laplace'a.

Jeżeli  $x(t) = x_0 = const$  to

$$\bar{u}(s) = k_d \frac{1}{s} \frac{(s\theta)^\alpha}{1 + (s\theta)^\alpha} x_0, \quad (4)$$

a po wykonaniu odwrotnej transformacji Laplace'a otrzymuje się [6]:

$$u(t) = k_d E_\alpha \left( -(t/\theta)^\alpha \right) x_0 = G(t) x_0 \quad (5)$$

gdzie  $G(t)$  jest funkcją relaksacji ułamkowego modelu Maxwella. Symbol  $E_\alpha(-(t/\theta)^\alpha)$  oznacza jednoparametrową funkcję specjalną Mittag-Lefflera, która dla  $\alpha > 0$  jest zdefiniowana w następujący sposób (porównaj [3]):

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\alpha n + 1) \quad (6)$$

gdzie  $\Gamma(x)$  jest funkcją gamma.

Jeżeli przemieszczenia względne ułamkowego tłumika Maxwella zmieniają się w sposób dowolny to korzystając z zasady superpozycji Boltzmana (porównaj [4]) można napisać:

$$u(t) = \int_0^t G(t-\tau) \dot{x}(\tau) d\tau \quad (7)$$

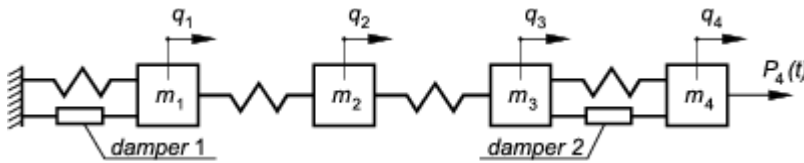
## 2.2. Równania ruchu konstrukcji z tłumikami drgań

Równanie ruchu konstrukcji sprężystej z ułamkowymi tłumikami Maxwella można zapisać w postaci poniższego równania różniczkowo-całkowego [5]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{P}(t) \quad (8)$$

gdzie symbole  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ , oznaczają odpowiednio macierze bezwładności, tłumienia i sztywności konstrukcji,  $\mathbf{G}(t-\tau)$  jest macierzą funkcji relaksacji tłumików,  $\mathbf{q}(t)$  wektorem przemieszczeń konstrukcji, a  $\mathbf{P}(t)$  wektorem sił wymuszających. Macierz tłumienia  $\mathbf{C}$  jest macierzą tłumienia proporcjonalnego uwzględniającą właściwości tłumiące konstrukcji.

Schemat przykładowego układu z tłumikami drgań pokazano na rys. 1.



Rys. 2. Schemat rozpatrywanego układu

Fig. 2. Scheme of the considered system

Siły wywołane działaniem  $m$  tłumików można zapisać w postaci:

$$\int_0^t \mathbf{G}(t-\tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = \int_0^t \sum_{r=1}^m G_r(t-\tau) \mathbf{L}_r \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau \quad (9)$$

i wobec tego

$$\mathbf{G}(t-\tau) = \sum_{r=1}^m G_r(t-\tau) \mathbf{L}_r \quad (10)$$

gdzie  $G_r(t-\tau)$  jest funkcją relaksacji tłumika o numerze  $r$ , a  $\mathbf{L}_r$  macierzą alokacji wspomnianego tłumika.

### 3. Rozwiązanie równania ruchu

Rozwiązanie równania ruchu wyznacza się za pomocą metody średniego przyspieszenia Newmarka. Na osi czasu  $t$  obiera się szereg chwil  $t_n$  przy czym  $t_{n+1} = t_n + h$  gdzie  $h$  jest krokiem numerycznego całkowania. Wzory metody średniego przyspieszenia mają dobrze znaną postać (porównaj [1]):

$$\mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \frac{h}{2} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (11)$$

$$\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_n + h\mathbf{v}_n + \frac{h^2}{4} (\mathbf{a}_n + \mathbf{a}_{n+1}) \quad (12)$$

gdzie  $\mathbf{d}_n = \mathbf{q}(t_n)$ ,  $\mathbf{v}_n = \dot{\mathbf{q}}(t_n)$ , a  $\mathbf{a}_n = \ddot{\mathbf{q}}(t_n)$ .

Do powyższych relacji należy dołączyć równanie ruchu (8) rozumiane jako warunek równowagi dynamicznej układu w chwili  $t_{n+1}$ , tzn.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \int_0^{t_{n+1}} \mathbf{G}(t_{n+1} - \tau)\dot{\mathbf{q}}(\tau)d\tau + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} \quad (13)$$

Całki występujące w (13) oblicza się numerycznie korzystając z wartości funkcji podcałkowych w uprzednio obranych chwilach  $t_n$ . Zakłada się, że funkcje prędkości przemieszczeń  $v_j(\tau) = \dot{q}_j(\tau)$  można w typowym przedziale czasu  $(\tau_j, \tau_{j+1})$ ; przy czym  $\tau_{j+1} = \tau_j + h$ ; aproksymować prostymi. Jest to zgodne z aproksymacją wynikającą z metody średniego przyspieszenia Newmarka. Zmiany wartości funkcji  $G_r(t - \tau)$  dla małych wartości argumentu  $(t - \tau)$  są bardzo duże i dlatego w typowym przedziale czasu  $(\tau_j, \tau_{j+1})$  są one aproksymowane funkcjami wykładniczymi o tej samej postaci co funkcje relaksacji tłumika opisywanego klasycznym modelem Maxwella, tzn.

$$\tilde{G}_r(t_{n+1} - (\tau_j + \tilde{\tau})) = G_r(t_{n+1} - \tau_j)e^{-\tilde{\tau}/\tilde{\theta}_r} \quad (14)$$

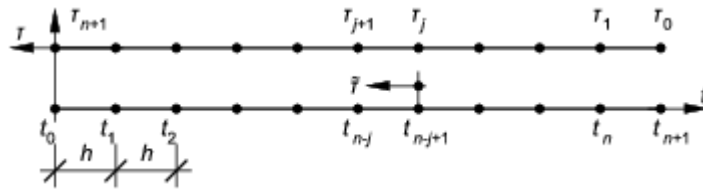
gdzie  $0 \leq \tilde{\tau} \leq h$  jest „lokalnym” czasem zaczynającym się w chwili  $\tau_j$ . „Lokalny” czas relaksacji  $\tilde{\theta}_r$  określony z warunku

$$\tilde{G}_r(t_{n+1} - \tau_j - h) = G_r(t_{n+1} - \tau_j)e^{-h/\tilde{\theta}_{r,j}} = G_r(t_{n+1} - \tau_{j+1}) \quad (15)$$

wyznacza się ze wzoru:

$$\tilde{\theta}_{r,j} = -h / \ln(G_{r,n-j} / G_{r,n-j+1}) \quad (16)$$

We wzorze (16) oznaczono  $G_{r,n-j} = G_r(t_{n+1} - \tau_{j+1})$ ,  $G_{r,n-j+1} = G_r(t_{n+1} - \tau_j)$ . Na rys. 2 pokazano oś czasu  $t$  oraz wspomniane powyżej osie  $\tau$  i  $\tilde{\tau}$ .



Rys. 2. Osie czasu używane w opisie teoretycznym

Fig. 2. The axis of time used in theoretical description

Rozpatrzmy typową całkę występującą w równaniu (13). Ma ona postać pokazaną poniżej i jest aproksymowana w następujący sposób:

$$\int_0^{t_{n+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) \dot{q}(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^n \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau \quad (17)$$

a sumowanie dotyczy podprzedziałów na które podzielono przedział czasu  $(0, t_{n+1})$ .

Całkę występującą w (17) przekształca się w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau &= \int_0^h G_r(t_{n+1} - (\tau_j + \tilde{\tau})) \frac{1}{h} [(h - \tilde{\tau})v_j + \tilde{\tau}v_{j+1}] d\tilde{\tau} = \\ &= \int_0^h G_{r,n-j+1} e^{-\tilde{\tau}/\tilde{\theta}_{r,j}} \frac{1}{h} [(h - \tilde{\tau})v_j + \tilde{\tau}v_{j+1}] d\tilde{\tau} = \\ &= \frac{1}{h} G_{r,n-j+1} \int_0^h e^{-\tilde{\tau}/\tilde{\theta}_{r,j}} [(h - \tilde{\tau})v_j + \tilde{\tau}v_{j+1}] d\tilde{\tau} \end{aligned} \quad (18)$$

Po obliczeniu powyższych całek można napisać:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau = \\ \frac{1}{h} [(G_{r,n-j}'' + hG_{r,n-j+1}' - G_{r,n-j+1}'')v_j + (hG_{r,n-j}' + G_{r,n-j}'' + G_{r,n-j+1}'')v_{j+1}] \end{aligned} \quad (19)$$

gdzie oznaczono

$$\begin{aligned} G_{r,n-j}' &= G_{r,n-j} \tilde{\theta}_{r,j}, & G_{r,n-j}'' &= G_{r,n-j} \tilde{\theta}_{r,j}^2, \\ G_{r,n-j+1}' &= G_{r,n-j+1} \tilde{\theta}_{r,j}, & G_{r,n-j+1}'' &= G_{r,n-j+1} \tilde{\theta}_{r,j}^2 \end{aligned} \quad (20)$$

Jeżeli  $j = n$  to z (19) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau = \frac{1}{h} [(G_{r,0}'' + hG_{r,1}' - G_{r,1}'')v_n + \\ (hG_{r,0}' + G_{r,0}'' + G_{r,1}'')v_{n+1}] \end{aligned} \quad (21)$$

Po podstawieniu (19) do (17) i wydzieleniu składników zawierających  $v_{j+1}$  można zależność (17) przepisać w postaci:

$$\sum_{j=0}^n \int_{t_j}^{t_{j+1}} G_r(t_{n+1} - \tau) v(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h} \left[ (G_{r,n-j}'' + hG_{r,n-j+1}' - G_{r,n-j+1}'') v_j + \right. \\ \left. (hG_{r,n-j}' + G_{r,n-j}'' + G_{r,n-j+1}'') v_{j+1} \right] + \\ \frac{1}{h} \left[ (G_{r,0}'' + hG_{r,1}' - G_{r,1}'') v_n + (hG_{r,0}' + G_{r,0}'' + G_{r,1}'') v_{n+1} \right] \quad (22)$$

Biorąc pod uwagę powyższy wynik można całkę występującą w (13) zapisać w następujący sposób:

$$\int_0^{t_{n+1}} \mathbf{G}(t_{n+1} - \tau) \dot{\mathbf{q}}(\tau) d\tau = \mathbf{F}_{n+1} + \frac{1}{h} (h\mathbf{G}'_0 + \mathbf{G}''_0 + \mathbf{G}''_1) \mathbf{v}_{n+1} \quad (23)$$

gdzie

$$\mathbf{G}'_0 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n} G_{r,0} \mathbf{L}_r, \quad \mathbf{G}''_0 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n}^2 G_{r,0} \mathbf{L}_r \\ \mathbf{G}'_1 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n} G_{r,1} \mathbf{L}_r, \quad \tilde{\mathbf{G}}_1 = \sum_{r=1}^m \tilde{\theta}_{r,n}^2 G_{r,1} \mathbf{L}_r \\ \mathbf{F}_{n+1} = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{h} \left[ (\mathbf{G}_{r,n-j}'' + h\mathbf{G}_{r,n-j+1}' - \mathbf{G}_{r,n-j+1}'') \mathbf{v}_j + \right. \\ \left. (h\mathbf{G}_{r,n-j}' + \mathbf{G}_{r,n-j}'' + \mathbf{G}_{r,n-j+1}'') \mathbf{v}_{j+1} \right] + \\ \frac{1}{h} (\mathbf{G}_{r,0}'' + h\mathbf{G}_{r,1}' - \mathbf{G}_{r,1}'') \mathbf{v}_n \quad (24)$$

Ostatecznie równanie (13) zapisuje się w postaci:

$$\mathbf{M} \mathbf{a}_{n+1} + \left[ \mathbf{C} + \frac{1}{h} (h\mathbf{G}'_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,1}) \right] \mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{F}_{n+1} \quad (25)$$

Po podstawieniu zależności (11) i (12) do (25) można temu równanie nadać postać:

$$\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{d}_{n+1} = \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} \quad (26)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \frac{2}{h} \left( \frac{2}{h} \mathbf{M} + \mathbf{C} \right) + \frac{2}{h^2} (h\mathbf{G}'_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,0} + \mathbf{G}''_{r,1}) \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}_{n+1} = & \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{F}_{n+1} + \mathbf{M} \left( \frac{4}{h^2} \mathbf{d}_n + \frac{4}{h} \mathbf{v}_n + \mathbf{a}_n \right) + \mathbf{C} \left( \frac{2}{h} \mathbf{d}_n + \mathbf{v}_n \right) - \\ & \frac{1}{h} \left( \mathbf{G}_0'' + h\mathbf{G}_1' - \mathbf{G}_1'' \right) \mathbf{v}_n + \frac{1}{h} \left( h\mathbf{G}_0' + \mathbf{G}_0'' + \mathbf{G}_1'' \right) \left( \frac{2}{h} \mathbf{d}_n + \mathbf{v}_n \right) \end{aligned} \quad (28)$$

Z równania (26) można wyznaczyć wektor  $\mathbf{d}_{n+1}$  (przemieszczenia układu w chwili  $t_{n+1}$ ), a ze wzorów (11) i (12) prędkości i przyspieszenia w tej samej chwili.

Jeżeli w chwili początkowej  $t_0 = 0^+$  nie ma skoku sił wymuszających to równanie (13) rozumiane jako warunek równowagi w chwili  $t_0 = 0^+$  przyjmuje postać:

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 + \mathbf{C}\mathbf{v}_0 + \mathbf{K}\mathbf{d}_0 = \mathbf{P}_0 \quad (29)$$

Z równania (29) można obliczyć wektor przyspieszeń w chwili początkowej  $\mathbf{a}_0$  wymagany w trakcie obliczania wektora  $\tilde{\mathbf{P}}_1$ .

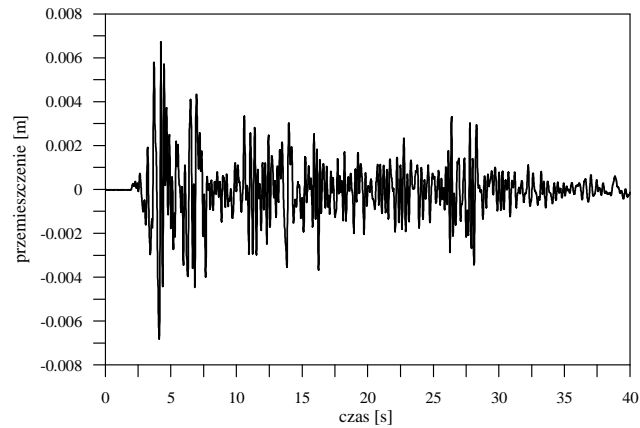
Funkcje relaksacji  $\mathbf{G}(t - \tau)$  szybko i monotonicznie maleją zmierzając asymptotycznie do zera wraz ze wzrostem argumentu  $(t - \tau)$ . Można wobec tego bez większego błędu obliczać całkę występującą w równaniu (13) nie od  $\tau = 0$ , a od  $\tau = Jh$ , gdzie  $J$  jest liczbą kroków która można nie uwzględniać podczas obliczania wspomnianej całki.

#### 4. Wyniki przykładowych obliczeń

Wykonano przykładowe obliczenia dla układu składającego się z 3 mas i 2 tłumików. Tłumiki są umieszczone między pierwszą masą a podłożem (1 tłumik) oraz między drugą i trzecią masą. Przyjęto następujące dane do obliczeń:  $m_1 = m_2 = m_3 = 30000,0 \text{ kg}$ ,  $k_1 = k_2 = k_3 = 90,0 \text{ MN/m}$ . Macierz tłumienia proporcjonalnego wyznaczono zakładając, że bezwymiarowe współczynniki tłumienia pierwszej i drugiej postaci drgań wynoszą 0,01. Przyjęto następujące wartości parametrów tłumików:  $c_d = 0,4 \text{ MNs}^\alpha/\text{m}$ ,  $k_d = 40,0 \text{ MN/m}$ ,  $\alpha = 1,0$ . Układ poddano działaniu sił wywołanych trzęsieniem ziemi zarejestrowanym w El Centro. Krok całkowania równań ruchu  $h = 0,004$ . W historii procesu pamiętano ostatnich 400 kroków.

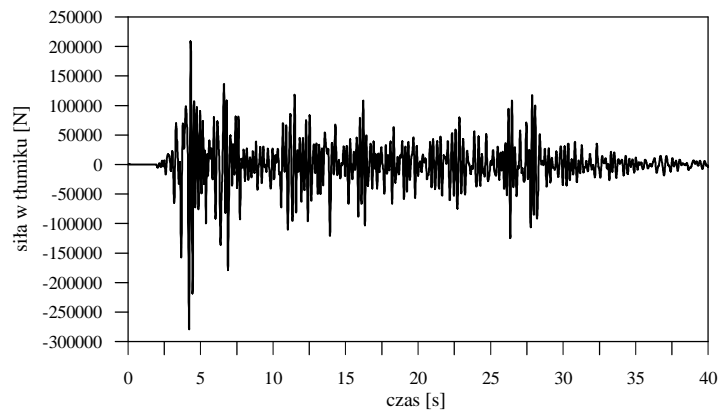
Na rys. 3 pokazano przemieszczenia trzeciej masy wywołane wspomnianym trzęsieniem ziemi. Z kolei na rys. 4 pokazano w jaki sposób zmienia się w czasie siła w drugim tłumiku. W trakcie obliczeń sprawdzano bilans energii układu. Przeciętny błąd w spełnieniu równania bilansu energii wynosił około 2%. Oznacza to, że opracowana metoda jest wystarczająco dokładna.





Rys. 3. Zmiany przemieszczenia trzeciej masy w zależności od czasu

Fig. 3. Changes of the third mass versus time axis



Rys. 4. Zmiany w czasie siły w drugim tłumiku

Fig. 4. Changes of the force in the second damper versus time

## 5. Uwagi końcowe

W pracy omawia się nową metodę numerycznego całkowania równań ruchu opisywanych za pomocą równania różniczkowo-całkowego. Równanie to opisuje drgania konstrukcji sprężystej z zainstalowanymi tłumikami drgań opisywanymi za pomocą tzw. uławkowego modelu Maxwella. Zaproponowana metoda nie wymaga wprowadzenia tzw. zmiennych wewnętrznych co znacznie zmniejsza wymiar analizowanego problemu. Przykładowe obliczenia dowodzą, że jest to metoda efektywna.

### **Podziękowania**

*Praca została wykonana w ramach projektu Nr DEC/2013/09/B/ST8/01733 wykonywanego w latach 2014-2016 i wspieranego finansowo przez NCN.*

### **Literatura**

- [1] Lewandowski R., Redukcja drgań konstrukcji budowlanych, PWN, Warszawa 2014.
- [2] Soong T.T., Dargush G.F., Passive energy dissipation systems in structural engineering, Chichester, Wiley, Chichester 1999.
- [3] Park S.W., Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control, International Journal of Solids and Structures, vol. 38, pp.8065-8092, 2001.
- [4] Lewandowski, R., Bartkowiak, A., Maciejewski, H.: Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers: a comparison of damper models. Structural Engineering and Mechanics vol. 41, pp.113-137, 2012.
- [5] Adhikari, S., Structural Dynamics with Generalized Damping Models: Analysis, Wiley-ISTE, 2013.
- [6] Mainardi F., Spada G., creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology, The European Physical Journal, Special Topics, vol. 193, 2011, pp. 133-160.
- [7] Cortés, F., Elejabarrieta, M.J., Finite element formulations for transient dynamic analysis in structural systems with viscoelastic treatments containing fractional derivative models. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 69, pp.2173-2195, 2007.
- [8] Singh M.P., Chang T.S., Nandan H., Algorithms for seismic analysis of MDOF systems with fractional derivatives, Engineering Structures, vol.33, pp.2371-2381, 2011.
- [9] Galucio A.C., Deu J.F., Ohayon R., Finite element formulation of viscoelastic sandwich beams using fractional derivative operators. Computational Mechanics, vol. 33, pp. 282-291, 2004.
- [10] Schmidt A., Gaul L. Finite element formulation of viscoelastic constitutive equations using fractional time derivatives. Nonlinear Dynamics; vol. 29 pp. 37-55, 2002.

## **NUMERICAL INTEGRATION OF EQUATION OF MOTION OF STRUCTURES WITH FRACTIONAL MAXWELL DAMPERS**

### **S u m m a r y**

The new numerical method of integration of equation of motion of structural systems with viscoelastic dampers is presented in the paper. Viscoelastic dampers are described with a help of the fractional rheological model of Maxwell type. The fractional derivatives are use in description of dampers. The theoretical basis of the proposed method are presented. Moreover, results of exemplary calculation are described and briefly discussed.

**Keywords:** dynamics, dampers, Boltzman's principle, transient vibration

*Przesłano do redakcji: 10.03.2017 r.*

*Przyjęto do druku: 28.04.2017 r.*