

**Jan FREUNDLICH, Grzegorz HOFFMAN,  
Marek PIETRZAKOWSKI**

Politechnika Warszawska, IPBM, ul. Narbutta 84, 02-524 Warszawa  
E-mail: jfr@simr.pw.edu.pl, ghoffman@simr.pw.edu.pl, mpi@simr.pw.edu.pl

## **Analiza MES w sterowaniu drganiami belki za pomocą elementów piezoelektrycznych**

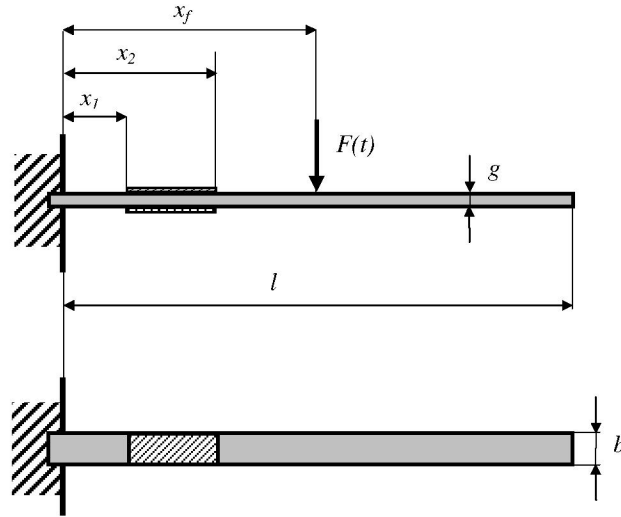
### **1 Wstęp**

Przetworniki piezoelektryczne w formie rozłożonych elementów zintegrowanych z układem podstawowym znalazły ważne zastosowanie w aktywnej redukcji drgań konstrukcji cienkościennych. W układach tych elementy piezoelektryczne stosowane są jako elementy pomiarowe (czujniki) oraz elementy wykonawcze (aktuatory). Działanie czujników związane jest z prostym efektem piezoelektrycznym, który polega na wytworzeniu ładunku elektrycznego pod wpływem odkształceń elementu. W aktuatorach wykorzystywany jest efekt odwrotny, w którym zewnętrzne pole elektryczne powoduje odkształcenie elementu i oddziaływanie siłowe. Dobierając odpowiednie sprzężenie zwrotne między czujnikiem a aktuatorem, można wpływać na zachowanie układu głównego zgodnie z przyjętym celem. Przeważnie dobór elementów sterowania w takich układach dokonywany jest przez odpowiednie obliczenia analityczne lub/ oraz numeryczne. Założone modele rzeczywistych konstrukcji cienkościennych sterowanych elementami piezoelektrycznymi wymagają zastąpienia uproszczonych obliczeń metodami analitycznymi zastosowaniem zaawansowanej symulacji komputerowej. Jedną z metod symulacji działania takich układów jest metoda elementów skończonych (MES) [1,2,3]. Stosowanie tej metody wymaga stworzenia odpowiednich modeli obliczeniowych badanych układów. W modelu takim należy uwzględnić między innymi wpływ sposobu połączenia elementów piezoelektrycznych do sterowanej konstrukcji, a także pętli sprzężenia zwrotnego między czujnikiem a aktuatorem na dynamikę badanego układu [4,5]. Opracowany model MES powinien być odpowiednio wiarygodny. W pracy przedstawiono analizę aktywnego tłumienia drgań belki dla dwóch modeli połączenia elementów piezoelektrycznych z belką. W pierwszym modelu założono połączenie doskonałe (bez warstwy pośredniczącej), natomiast w drugim modelu uwzględniono warstwę kleju w połączeniu elementów sterujących z belką. Opracowano modele MES badanego układu, przeprowadzono weryfikację odpowiedniego modelu MES z modelem analitycznym. Zbadano wpływ uwzględnienia warstwy kleju na otrzymane wyniki symulacji drgań układu.

### **2 Opis badanego układu**

Rozważana jest belka wysięgnikowa o długości  $l$ , szerokości  $b$  i grubości  $g$ . Do belki przymocowane są piezoelektryczne elementy rozmieszczone symetrycznie na jej górnej i dolnej powierzchni, między współrzędnymi  $x_1$  i  $x_2$ . Stanowią one parę czujnik-aktuator pracującą w pętli ze sprzężeniem zwrotnym, proporcjonalnym do prędkości zmiany napięcia w czujniku. Analizowano drgania swobodne belki przy początkowym

wychyleniu jej końca oraz drgania wymuszone harmoniczną zmienną siłą  $F(t)$  przyłożoną w odległości  $x_f$  od zamocowania belki. Schemat układu pokazany jest na rysunku 1. Wprowadzono dwa sposoby modelowania połączenia elementów piezoelektrycznych z belką, tzn. połączenie doskonale sztywne oraz połączenie z uwzględnieniem cienkiej warstwy kleju. Przedstawiono wpływ warstwy kleju na charakterystyki dynamiczne układu. W pierwszym etapie analizy wykonano obliczenia porównawcze metodą analityczną oraz MES, zakładając idealne połączenie elementów piezoelektrycznych z belką.



Rys. 1. Schemat analizowanej belki

Fig. 1. The schema of the analysed beam

### 3 Model analityczny badanej belki

W celu uzyskania równania ruchu układu zastosowano model belki według teorii Bernoulliego z uwzględnieniem tłumienia wewnętrznego opisanego modelem Kelvina-Voigta. W rozważanym przypadku równanie drgań poprzecznych belki ma następującą postać:

$$E_b J_b \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu_b \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} \right) + \rho_b A_b \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F \delta(x - x_f) , \quad (1)$$

gdzie:  $w(x, t)$  – funkcja ugięcia belki,

$E_b$  – moduł Younga materiału belki,

$J_b$  – moment bezwładności przekroju poprzecznego belki,

$\mu_b$  – czas opóźnienia (współczynnik tłumienia materiałowego),

$\rho_b$  – gęstość materiału belki,

$A_b$  – pole powierzchni przekroju poprzecznego belki,

$F$  – siła wymuszająca o amplitudzie  $F_0$  i częstotliwości  $\omega$ ,  $F(t) = F_0 \exp(i\omega t)$ , przy czym  $i$  oznacza jednostkę urojoną,  
 $x_f$  – współrzędna położenia siły wymuszającej,  
 $\delta(x)$  – funkcja delta Diraca.

Na podstawie równania (1) wyznaczono przepustowość widmową  $G_{wff}$  ugięcia belki w zależności od siły wymuszającej:

$$G_{wff}(x, \omega) = \frac{w(x, \omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{\rho_b A_b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{W_n(x_f) W_n(x)}{\gamma_n^2 (\omega_n^2 - \omega^2 + i\mu_b \omega_n^2 \omega)}, \quad (2)$$

gdzie  $\omega_n$  jest n-tą częstotliwością drgań własnych:

$$\omega_n = k_n^2 \sqrt{\frac{E_b J_b}{\rho_b A_b}}, \quad \gamma_n^2 = \int_0^l W_n^2(x) dx.$$

Funkcje własne belki wsięgnikowej o długości  $l$  mają postać

$$W_n(x) = (\sin k_n l + \sinh k_n l)(\cosh k_n x - \cos k_n x) + (\cos k_n l + \cosh k_n l)(\sinh k_n x - \sin k_n x) \quad (3)$$

gdzie  $k_n$  są pierwiastkami równania charakterystycznego  $\cos(k_n l) \cosh(k_n l) = -1$  o wartościach  $k_n l = 1,875, 4,694, 7,855, \dots, 0.5(2n-1)\pi$ .

W celu wyznaczenia przebiegu drgań swobodnych można posłużyć się impulsową funkcją przejścia, która jest całką Fouriera przepustowości widmowej  $G_{wff}$ :

$$h_w(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{wff}(x, \omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (4)$$

W przypadku badania drgań aktywnie tłumionych należy wyznaczyć przepustowość widmową i impulsową funkcję przejścia układu zamkniętego z pętlą sprzężenia zwrotnego, uwzględniając równania oddziaływania czujnika i aktuatora zgodnie z opisem zawartym w pracy [6].

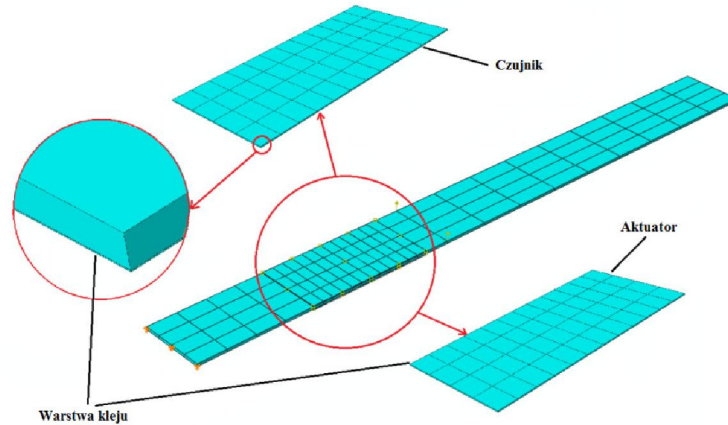
#### 4 Model MES badanej belki

Model MES belki zbudowano z bryłowych elementów dwudziestowęzłowych (3D Solid). Model ten składał się ze 104 elementów skończonych typu C3D20 [7] oraz 881 węzłów.

Czujnik i aktuator zbudowano także z bryłowych elementów dwudziestowęzłowych (3D Solid) o właściwościach piezoelektrycznych, z napięciem jako dodatkowym stopieniem swobody w węzłach. Każdy z przetworników zbudowany jest z 48 elementów skończonych typu C3D20E [7] oraz 419 węzłów.

Warstwy kleju łączące przetworniki piezoelektryczne z belką zbudowano z elementów spajających (Cohesive). Są to bryłowe elementy ośmiowęzłowe. W elementach tych zakłada się tylko jedną składową odkształcenia liniowego (wzdłuż grubości kleju) oraz dwie składowe odkształcenia postaciowego (w płaszczyznach poprzecznych do warstwy kleju). Odkształcenia liniowe oraz postaciowe w płaszczyźnie kleju są zerowe. Odkształcenia obliczane są na podstawie przemieszczeń węzłów elementu. Każdą warstwę zamodelowano przy użyciu 192 elementów COH3D8 [7] oraz 450 węzłów.

Współpracę poszczególnych elementów zapewniono przez nałożenie więzów zgodności odpowiednich przemieszczeń między łączonymi powierzchniami.



Rys. 2. Model MES badanego układu

Fig. 2. The FE model of the analysed structure

## 5 Obliczenia porównawcze drgań belki metodą analityczną oraz MES

Obliczenia porównawcze wykonano, zakładając idealne połączenie przetworników piezoelektrycznych z belką. Przyjęto długość belki  $l = 0,27$  m, szerokość  $b = 0,025$  m, grubość  $g = 0,001$  m. Moduł Younga materiału belki przyjęto równy  $E_b = 2,19 \cdot 10^5$  MPa, gęstość  $\rho_b = 7800$  kg/m<sup>3</sup>, współczynnik tłumienia materiałowego odpowiadający czasowi opóźnienia  $\mu_b = 10^{-5}$  s.

Założono, że czujnik piezoelektryczny ma kształt prostokątnej płytki o wymiarach 50x25 mm i grubości 0,254 mm, natomiast aktuator różni się grubością, która wynosi 0,381 mm. Założono następujące odległości mocowania elementów piezoelektrycznych:  $x_1 = 0,046$  m,  $x_2 = 0,096$  m (rys. 1).

Przyjęto, że czujnik i aktuator mają jednakowe następujące właściwości materiałowe: moduł Younga  $E_s = 6,3 \cdot 10^4$  MPa, gęstość  $\rho_s = 5900$  kg/m<sup>3</sup>, przenikalność elektryczną  $\epsilon_{33} = 1,416 \cdot 10^{-8}$  F/m, współczynnik piezoelektryczny  $d_{31} = 2,5 \cdot 10^{-10}$  CN<sup>-1</sup>.

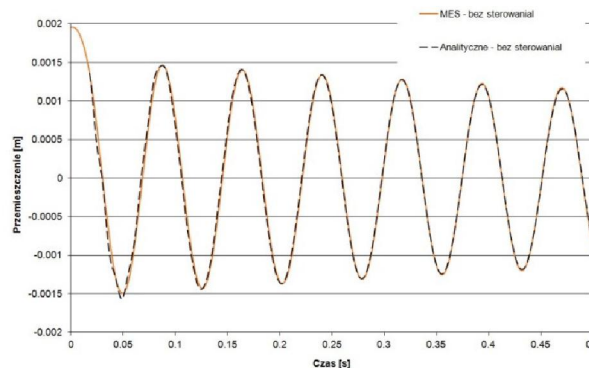
Obliczenia porównawcze wykonano dla drgań swobodnych układu bez sterowania. Zakładając początkowe, statyczne ugięcie końca belki siłą skupioną  $F = 0,152$  N ( $x_f = 0,270$  m), wyznaczono przebieg w czasie drgań końca belki.

Obliczenia metodą analityczną przeprowadzono na podstawie wzorów (2) i (4) przy pomocy pakietu obliczeń symbolicznych „MATHEMATICA”.

Obliczenia metodą MES wykonano przy użyciu sytemu Abaqus, stosując opisany wyżej model MES analizowanego układu.

Przebiegi swobodnych drgań końca belki, obliczone dwoma metodami, przedstawiono na rysunku 3. Krzywe odpowiadające drganiom wspomnianego punktu obliczone

różnymi metodami praktycznie się pokrywają. Obliczenia te potwierdzają zgodność obu modeli, a zatem poprawność zbudowanego modelu MES badanego układu. Dalsze obliczenia dotyczące wpływu warstwy kleju na dynamikę układu przeprowadzono, stosując metodę elementów skończonych.



*Rys. 3. Przesunięcie końca belki w drganiach swobodnych liczone metodą analityczną oraz MES*

*Fig. 3. Displacement of the beam tip calculated by analytical and FE methods*

## 6 Obliczenia drgań swobodnych badanego układu

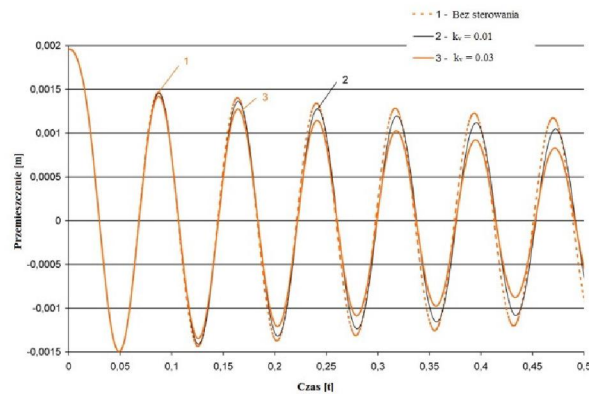
W pierwszym etapie wykonano obliczenia MES częstości drgań swobodnych badanego układu. Znajomość tych wartości konieczna jest do obliczeń drgań wymuszonych. Obliczenia wykonano dla modeli bez i z uwzględnieniem warstwy kleju, mocującej elementy piezoelektryczne do belki. Wyniki obliczeń pierwszych sześciu częstości drgań własnych układu zamieszczono w tabeli 1. Pomimo że różnica względna między częstościami własnymi obliczonymi dla układu bez i z uwzględnieniem warstwy kleju nie przekracza 2,6 % (dla pierwszej częstości własnej wynosi 1,9 %), to w obliczeniach drgań wymuszonych należy tę różnicę uwzględniać, aby porównanie skuteczności aktywnego tłumienia dla obu przypadków było poprawne.

*Tab. 1. Częstości własne drgań analizowanej belki*

*Tab. 1. Natural frequencies of the analysed beam*

Postać [nr]	Bez kleju $\omega_n$ [1/s]	Z klejem $\omega_n$ [1/s]	Różnica wzgl. [%]
1	82,13	80,59	1,875
2	460,45	458,08	0,515
3	1348,20	1325,00	1,721
4	1700,90	1657,40	2,557
5	1879,00	1868,60	0,553
6	2703,80	2659,10	1,653

W następnym etapie badano przebieg drgań swobodnych układu ze sprzężeniem zwrotnym, w którym sygnał sterujący jest proporcjonalny do prędkości zmian napięcia generowanego przez czujnik. W przypadku układu bez warstw kleju obliczenia przeprowadzono, przyjmując następujące wartości współczynnika wzmocnienia:  $k_v = 0; 0,1; 0,3$  s, natomiast gdy uwzględniono warstwy kleju –  $k_v = 0; 0,1; 0,3; 0,5$  s. Wszystkie obliczenia dotyczyły przebiegu drgań punktu znajdującego się na swobodnym końcu belki. Obliczone przebiegi drgań dla różnych współczynników wzmocnienia  $k_v$  pokazano na rysunku 4 w przypadku nieuwzględnienia warstw kleju oraz na rysunku 5 w przypadku modelu z uwzględnionymi warstwami kleju.



Rys. 4. Przemieszczenie końca belki przy różnych współczynnikach wzmocnienia – model bez warstwy kleju

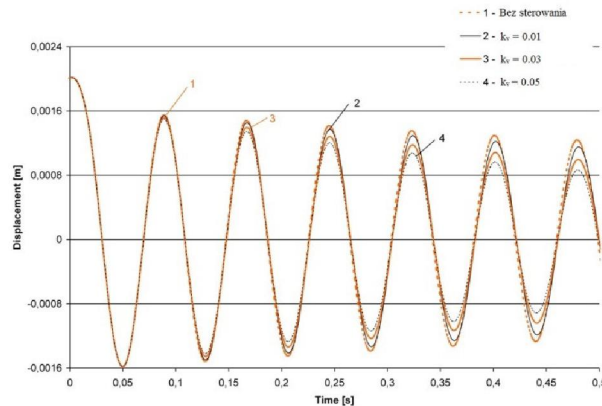
Fig. 4. Displacement of the beam tip calculated for various amplification factors – the model without a glue layer

Korzystając z wyznaczonych przebiegów drgań obserwowanego punktu belki, obliczono logarytmiczne dekrementy tłumienia według wzoru

$$\delta = \frac{1}{m} \ln \frac{A_n}{A_{n+m}}, \quad (4)$$

gdzie  $A_n$  – amplituda przemieszczenia w chwili  $t_n$ ,  
 $A_{n+m}$  – amplituda przemieszczenia odpowiadająca przesunięciu w czasie o  $m$  półokresów.

Wartości dekrementów tłumienia zamieszczono w tabeli 2. Porównując wyniki obliczeń dla obu modeli połączenia piezoelementów z belką, widać, że uwzględnienie warstwy kleju w połączeniu powoduje obniżenie skuteczności aktywnego tłumienia tym większe, im większy jest współczynnik wzmocnienia  $k_v$  w pętli sprzężenia zwrotnego. Dla współczynnika wzmocnienia  $k_v = 0,1$  s różnica względna  $\Delta\delta_v$  wynosi 11,4%, natomiast dla  $k_v = 0,3$  s różnica ta wynosi 29,0% (tab. 2). Stąd wniosek, że uwzględnienie warstwy kleju łączącej piezoelementy z konstrukcją sterowaną może znacznie wpływać na wyniki obliczeń symulacyjnych.



Rys. 5. Przesunięcie końca belki przy różnych współczynnikach wzmocnienia – model z warstwą kleju

Fig. 5. Displacement of the beam tip calculated for various amplification factors – the model with a glue layer

Tab. 2. Logarytmiczny dekrement tłumienia

Tab. 2. Logarithmic damping decrement

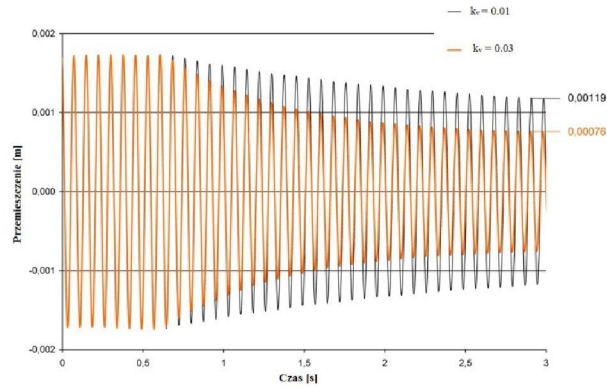
$k_v$ [s]	Bez kleju $\delta$	Z klejem $\delta$	$\Delta\delta_v$ [%]
0,0	0,022	0,022	-
0,1	0,033	0,029	11,4
0,3	0,052	0,037	29,0
0,5	-	0,056	-

## 7 Obliczenia drgań wymuszonych układu

Obliczenia MES drgań wymuszonych układu z aktywnym tłumieniem, tak jak poprzednio, wykonano dla modelu bez i z uwzględnieniem warstwy kleju mocującej elementy piezoelektryczne do belki. Zbadano odpowiedź układu na wymuszenie siłą harmoniczną o amplitudzie  $F_0 = 0,01$  N, przyłożoną w odległości  $x_f = 106$  mm (rys. 1).

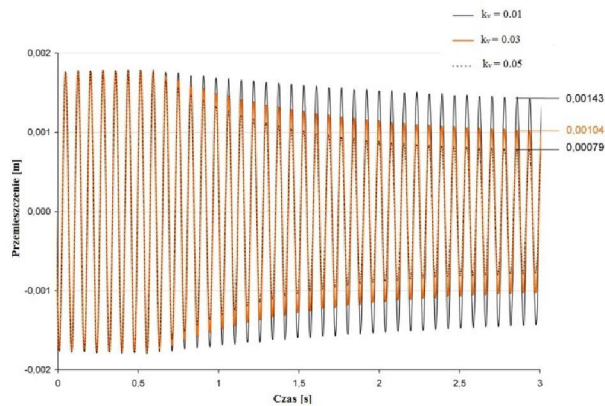
W przypadku nieuwzględnienia warstwy kleju, obliczenia wykonano, przyjmując współczynniki wzmocnienia  $k_v = 0; 0,1; 0,3$  s, natomiast w modelu z warstwami kleju przyjęto  $k_v = 0; 0,1; 0,3; 0,5$  s. Tak jak w obliczeniach drgań swobodnych, zbadano przemieszczenia punktu na swobodnym końcu belki. Drgania tego punktu w modelu bez warstw kleju przy różnych współczynnikach wzmocnienia  $k_v$  pokazano na rysunku 6, a w modelu z uwzględnionymi warstwami kleju – na rysunku 7.





Rys. 6. Przemieszczenie końca belki przy różnych współczynnikach wzmocnienia – model bez warstwy kleju

Fig. 6. Displacement of the beam tip calculated for various amplification factors – the model without a glue layer



Rys. 7. Przemieszczenie końca belki przy różnych współczynnikach wzmocnienia – model z warstwą kleju

Fig. 7. Displacement of the beam tip calculated for various amplification factors – the model with a glue layer

Na podstawie uzyskanych przebiegów drgań (rys. 6 i 7), wyznaczono amplitudy drgań ustalonych przed i po włączeniu sterowania. Ustalone wartości amplitud  $A_u^s$  przy włączonym sterowaniu zamieszczono w tabeli 3. Widać, że amplitudy drgań aktywnie tłumionych w przypadku modelu z warstwą kleju są większe niż analogiczne otrzymane bez jej uwzględnienia. Dla współczynnika  $k_v = 0,1$  s różnica względna wynosi 21%, natomiast dla  $k_v = 0,3$  s różnica ta osiąga 47%.



*Tab. 3. Amplitudy drgań końca belki z włączonym sterowaniem*

*Tab. 3. Vibration amplitudes of the beam tip with the control activated*

$k_v$ [s]	Bez kleju $A_u^s$ [mm]	Z klejem $A_u$ [mm]	Różnica wzgl. [%]
0,1	1,19	1,43	21
0,3	0,76	1,04	47
0,5	-	0,79	

Znając wartości amplitud drgań ustalonych z włączonym i wyłączonym sterowaniem, obliczono także wartości współczynnika redukcji amplitudy  $\kappa$ :

$$\kappa = \frac{A_u - A_u^s}{A_u} \cdot 100\% , \quad (5)$$

gdzie:  $A_u$  – ustalona amplituda drgań bez sterowania.

Porównując wartości współczynnika  $\kappa$  zamieszczone w tabeli 4, widać, że uwzględnienie warstwy kleju w modelu obliczeniowym powoduje zmniejszenie współczynnika  $\kappa$  o 38 % przy współczynniku wzmocnienia  $k_v = 0,1$  s oraz o 29 % przy współczynniku  $k_v = 0,3$  s.

*Tab. 4. Obliczony współczynnik  $\kappa$*

*Tab. 4. Calculated  $\kappa$  coefficient*

$k_v$ [s]	Bez kleju $\kappa$ [%]	Z klejem $\kappa$ [%]
0,1	32,3	20,1
0,3	59,8	42,5
0,5	-	56,4

## 8 Wnioski

- Zbudowano model MES belki z aktywnym tłumieniem elementami piezoelektrycznymi pracującymi w pętli zamkniętej.
- Wykazano zgodność przebiegów drgań swobodnych belki wyznaczonych w obliczeniach analitycznych oraz MES.
- Wykonano symulację MES aktywnego tłumienia drgań badanej belki, wykorzystując procedury użytkownika systemu ABAQUS.
- Zbadano wpływ warstwy kleju między belką a elementami piezoelektrycznymi na redukcję amplitud drgań belki. Wykazano obniżenie efektywności zastosowanego sterowania w przypadku obliczeń z uwzględnieniem warstwy kleju w połączeniu elementów piezoelektrycznych z belką.

## Literatura

1. Shen M. H., A new modelling technique for piezoelectrically actuated beams, *Computers and Structures*, 50(3), 1995, 361-366
2. Yi S., Ling S. F., Ying M., Hilton H. H., Vinson J. R., Finite element formulation for anisotropic coupled piezoelectro-hygro-thermo-viscoelasto-dynamic problems, *Int. Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 1531-1546, 1999

3. Balamurugan V., Narayanan S., Active vibration control of smart shells using distributed piezoelectric sensors and actuators, *Smart Materials and Structures*, 10, 173-180, 2001
4. Trindade M. A., Benjeddou A., Ohayon R., *Piezoelectric active vibration control of damped sandwich beams*, 246(4), 653-677, 2001
5. Sun D., Tong L., Effect of debonding in active constrained layer damping patches on hybrid control of smart beams, *International Journal of Solids and Structures* 40, 1633–1651, 2003
6. Pietrzakowski M., Experiment on a cantilever beam control and theoretical approximation, *J. of Theoretical and Applied Mechanics*, 40(3), pp. 667-689, 2002
7. ABAQUS Online Documentation: Version 6.11, Dassault Systèmes, 2011

### Streszczenie

W pracy przedstawiono symulacje MES swobodnych i wymuszonych drgań belki, aktywnie tłumionych układem elementów piezoelektrycznych pracujących z prędkościowym sprzężeniem zwrotnym. Zbadano dwa modele układu – model bez i z uwzględnieniem warstwy kleju mocującej elementy piezoelektryczne do konstrukcji głównej. W celu pokazania efektywności tłumienia drgań obliczenia wykonano dla kilku wartości współczynnika wzmocnienia w pętli sprzężenia zwrotnego. Symulacje wykazały widoczną różnicę amplitud otrzymanych z obliczeń przy zastosowaniu obu modeli. Wartości amplitud drgań w przypadku modelu z uwzględnieniem warstw kleju są znacznie mniejsze niż te otrzymane przy użyciu modelu z doskonałym połączeniem czujnika i aktuatora z belką.

**Słowa kluczowe:** drgania belki, aktywne tłumienie, elementy piezoelektryczne

## The finite element analysis in piezoelectric control of beam vibration

### Summary

FE simulations of the beam free and forced vibration suppressed by piezoelectric control system with velocity feedback are accomplished. Two models of examined system are considered - the model without and with taking account of a glue layer connecting piezoelectric transducers to the main structure. Several control gain values are used in calculations to show active damping effects. The calculations demonstrate noticeable difference between calculated amplitudes using both models. Amplitude values obtained using the model with glue layers are noticeable lower than that obtained for the perfectly bonded sensor/actuator patches.

**Keywords:** beam vibration, active damping, piezoelectric elements