Mykhaylo DELYAVSKYY, Maria OLEJNICZAK, Aleksandra NIESPODZIANA, Adam GRABOWSKI, Tomasz JANIAK

ZASTOSOWANIE METODY MAKROELEMENTÓW DO ROZWIĄZYWANIA CIENKICH PŁYT ORTOTROPOWYCH

Streszczenie

Opracowano nowe podejście do rozwiązania płytowych konstrukcji inżynierskich nazwane metodą makroelementów. Rozwiązanie konstrukcji sprowadza się do rozwiązania układu liniowych równań algebraicznych. Metoda daje lepszą dokładność rozwiązania w porównaniu z metodą elementów skończonych przy mniejszej liczbie równań. Rozwiązano dwa typy konstrukcji: płyta prostokątna swobodnie podparta oraz utwierdzona na obwodzie poddana działaniu obciążenia stałego.

WSTĘP

W chwili obecnej ogólnie przydatną i najbardziej rozpowszechnioną metodą rozwiązywania konstrukcji inżynierskich jest metoda elementów skończonych (MES) [5], która należy do grupy metod numerycznych. Wadą tej metody jest brak możliwości spełnienia statycznych warunków ciągłości na styku elementów skończonych (dotyczy przemieszczeniowej wersji MES). W referacie proponuje się inne podejście do rozwiązania konstrukcji nazwane metodą makroelementów (MME) [1,4]. Podejście to jest alternatywne w stosunku do MES a niejednokrotnie pozwala otrzymać rozwiązania dokładniejsze.

Różnice w podejściach MME i MES:

1. **Sposób dyskretyzacji konstrukcji**. Zgodnie z MES konstrukcję dzielimy na wiele drobnych części zwanych elementami skończonymi, natomiast w opracowanym podejściu na makroelementy, przy czym taki podział nie zmniejsza dokładności.
2. **Podejście do rozwiązania**. MES opiera się na globalnym podejściu, a MME na podejściu lokalnym mechaniki ciała stałego.
3. **Sposób rozwiązania konstrukcji**. W MES kinematyczne warunki brzegowe spełnione są *„a priori”*, natomiast równania równowagi i statyczne warunki brzegowe spełnione są w każdym węźle obszaru konstrukcji w procesie rozwiązania zagadnienia. W MME równania równowagi spełnione są tożsamościowo poprzez uwzględnienie warunków brzegowych (statycznych i kinematycznych).
4. **Dokładność rozwiązania**. W MES zwiększenie dokładności rozwiązania osiąga się w wyniku zagęszczenia siatki podziału całego obszaru oraz zastosowania bardziej złożonych elementów skończonych (z większą liczbą stopni swobody), a w metodzie makroelementów – poprzez zwiększenie liczby węzłów na krawędziach makroelementu, a także przez optymalizację ich rozmieszczenia.

1. SFORMUŁOWANIE PROBLEMU

Rozważa się cienką, prostokątną płytę ortotropową, której geometrię opisuje się w kartezjańskim układzie współrzędnych $Ox_1x_2x_3$ z początkiem w geometrycznym środku płyty. Oś Ox_3 skierowana jest w dół, a osie Ox_1 i Ox_2 umieszczone są na płaszczyźnie środkowej płyty tak, aby układ współrzędnych był prawoskrętny. Na górnej powierzchni płyta obciążona jest siłą dowolnie rozłożoną $q(x_1,x_2)$, natomiast powierzchnia dolna pozostaje wolna od obciążeń.

Równowaga sprężysta takiej płyty opisana jest równaniem różniczkowym o pochodnych cząstkowych ze stałymi współczynnikami

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\,D_{33}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = q\ , \tag{1}$$

gdzie: w jest funkcją ugięcia płyty, D_{11} i D_{22} opisują sztywność płyty na zginanie w dwóch wzajemnie prostopadłych kierunkach, D_{33} wyraża się wzorem $D_{33} = D_{12} + 2D_{66}$, w którym D_{66} jest sztywnością płyty na skręcanie materiału ortotropowego, a $D_{12} = \nu\, D_{11}$, (ν – współczynnik Poissona).

2. MACIERZOWE UJĘCIE PROBLEMU

Rozwiązanie równania podstawowego (1) wybieramy w postaci sumy dwóch rozwiązań

$$w = w_0 + w_*, \tag{2}$$

to jest całki ogólnej w_0 równania jednorodnego

$$D_{11}\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2(D_{12} + 2\,D_{66})\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + D_{22}\frac{\partial^4 w}{\partial x_2^4} = 0 \tag{3}$$

oraz całki szczególnej w_* niejednorodnego równania (1). W celu określenia całki szczególnej obciążenie zewnętrzne rozwijamy w cztery podwójne szeregi Fouriera

$$q(x_1,x_2) = Q_{pqmn}T_{pm}^{[1]}(x_1)\cdot T_{qn}^{[2]}(x_2), \tag{4}$$

gdzie współczynniki Q_{pqmn} otrzymujemy z rozwinięcia funkcji $q(x_1,x_2)$ w szeregi trygonometryczne, $p,q = 1 \div 4,\ m,n = 1 \div \infty$:

$$\begin{gathered} T_{1m}^{[j]}(x_j) = \sin\left(\gamma_m^{[j]}x_j\right),\quad T_{2m}^{[j]}(x_j) = \cos\left(\delta_m^{[j]}x_j\right), \\ T_{4m}^{[j]}(x_j) = \cos\left(\gamma_m^{[j]}x_j\right),\quad T_{3m}^{[j]}(x_j) = \sin\left(\delta_m^{[j]}x_j\right), \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \delta_m^{[1]} = \frac{(2m-1)\pi}{2a_1},\qquad \delta_n^{[2]} = \frac{(2n-1)\pi}{2\,a_2}, \\ \gamma_m^{[1]} = \frac{m\pi}{a_1};\ \ \gamma_n^{[2]} = \frac{n\,\pi}{a_2}. \end{gathered} \tag{6}$$

W podobnej postaci przyjmujemy całkę szczególną równania (1)

$$w_*(x_1,x_2) = C_{pqmn}W_{pqmn}^*(x_1,x_2). \tag{7}$$

Niewiadome współczynniki C_{pqmn} określamy z rozwiązania równania (7). Funkcje:

$$W^{*}_{pqmn}(x_1,x_2) = T^{[1]}_{pm}(x_1)\cdot T^{[2]}_{qn}(x_2) \tag{8}$$

nazywamy funkcjami obciążeniowymi ugięcia płyty. W dalszych rozważaniach wykorzystuje się zasadę sumacyjną Einsteina zgodnie z którą wykonuje się sumowanie względem wskaźnika, który powtarza się dwa razy: $p,q = 1 \div 4; m,n = 1 \div \infty$.

Całkę ogólną $w_0(x_1,x_2)$ jednorodnego równania (3) zapisujemy w postaci:

$$w(x_1,x_2) = f^{[j]}_{pk}(x_j)\cdot T^{[3-j]}_{pk}(x_{3-j}), \tag{9}$$

gdzie $f^{[j]}_{pk}(x_j)$ są to niewiadome funkcje, które określa się w procesie rozwiązania zagadnienia.

Podstawiając rozwiązanie (9) do równania (3) przechodzimy do dwóch niezwiązanych układów równań różniczkowych zwyczajnych jednorodnych względem niewiadomych funkcji $f^{[j]}_{pk}(x_j)$:

$$\begin{aligned} &D_{11}f^{[1]^{(IV)}}_{pk}(x_1) - 2D_{33}\kappa^{[2]^2}_{pk} f^{[1]''}_{pk}(x_1) + \\ &\qquad +D_{22}\kappa^{[2]^4}_{pk} f^{[1]}_{pk}(x_1) = 0, \\ &D_{22}f^{[2]^{(IV)}}_{pk}(x_2) - 2D_{33}\kappa^{[1]^2}_{pk} f^{[2]''}_{pk}(x_1) + \\ &\qquad +D_{11}\kappa^{[1]^4}_{pk} f^{[2]}_{pk}(x_1) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

gdzie

$$\kappa^{[j]}_{pk} = \begin{cases} \gamma^{[j]}_{k}, & p = 1,4, \\ \delta^{[j]}_{k}, & p = 2,3. \end{cases} \tag{11}$$

Rozwiązanie tego układu równań ma postać:

$$f^{[j]}_{pk}(x_j) = R^{[j]}_{vpk}E^{[j]}_{vpk}(x_j), \qquad v = 1 \div 4. \tag{12}$$

Funkcje [2]:

$$\begin{aligned} E^{[j]}_{1pk}(x_j) &= \frac{\cosh\left(\alpha^{[j]}_{pk}x_j\right)\cos\left(\beta^{[j]}_{pk}x_j\right)}{\exp\left(\alpha^{[j]}_{pk}a_j\right)}, \\ E^{[j]}_{2pk}(x_j) &= \frac{\cosh\left(\alpha^{[j]}_{pk}x_j\right)\sin\left(\beta^{[j]}_{pk}x_j\right)}{\exp\left(\alpha^{[j]}_{pk}a_j\right)}, \\ E^{[j]}_{3pk}(x_j) &= \frac{\sinh\left(\alpha^{[j]}_{pk}x_j\right)\cos\left(\beta^{[j]}_{pk}x_j\right)}{\exp\left(\alpha^{[j]}_{pk}a_j\right)}, \\ E^{[j]}_{4pk}(x_j) &= \frac{\sinh\left(\alpha^{[j]}_{pk}x_j\right)\sin\left(\beta^{[j]}_{pk}x_j\right)}{\exp\left(\alpha^{[j]}_{pk}a_j\right)} \end{aligned} \tag{13}$$

nazywamy funkcjami bazowymi rozwiązania (12). Uwzględniając poprzednie wzory zapisujemy wyrażenie na ugięcie płyty w postaci:

$$w(x_1,x_2) = R^{[j]}_{vpk}W^{[j]}_{vpk}(x_1,x_2) + W_{*}(x_1,x_2). \tag{14}$$

Sumowania dokonuje się względem wskaźników v,p,k.
Funkcje:

$$W^{[j]}_{vpk}(x_1,x_2) = E^{[j]}_{vpk}(x_j)T^{[3-j]}_{pk}(x_{3-j}), \tag{15}$$

nazywamy funkcjami kształtu, natomiast $W_{*}(x_1,x_2)$ są funkcjami obciążeniowymi ugięcia płyty. Mając wyrażenie na ugięcie płyty określamy przemieszczenia poziome, momenty i siły tnące przez odpowiednie funkcje kształtu i funkcje obciążeniowe.

W celu efektywnego modelowania numerycznego przedstawiamy je w postaci macierzowej [1]:

$$\begin{aligned} w_{vpk}(x_1,x_2) &= [[W]]\{\{R\}\} + W_{*}\ , \\ u_1 &= [[U]]\{\{R\}\} + U_{*}\ , \\ u_2 &= [[V]]\{\{R\}\} + V_{*}\ , \\ M_{11} &= [[X]]\{\{R\}\} + X_{*}\ , \\ M_{22} &= [[Y]]\{\{R\}\} + Y_{*}\ , \\ M_{12} &= [[Z]]\{\{R\}\} + Z_{*}\ , \\ Q_1 &= [[G]]\{\{R\}\} + G_{*}\ , \\ Q_2 &= [[H]]\{\{R\}\} + H_{*}\ . \end{aligned} \tag{16}$$

Wprowadzone tu macierze $[[W]]$, $[[U]]$, $[[V]]$, $[[X]]$, $[[Y]]$, $[[Z]]$, $[[G]]$, $[[H]]$ nazwano macierzami kształtu ugięcia przemieszczeń, momentów i sił tnących. Otrzymane wyrażenia tworzą makroelement płytowy. Korzystając z podanych wyrażeń buduje się model matematyczny konstrukcji płytowej. W przyjętym modelu pracy konstrukcji w każdym wybranym punkcie zapisuje się po dwa warunki brzegowe. Stosuje się ciągłą numerację punktów o zadanych współrzędnych. Najlepszą dokładność zazwyczaj osiąga się dla równomiernego rozmieszczenia punktów na krawędzi płyty dla jednorodnych warunków brzegowych. Jeżeli mamy niejednorodne warunki brzegowe krawędź płyty dzielimy na części o warunkach jednorodnych i punkty rozmieszczamy równomiernie na każdej części. Zwiększenie dokładności rozwiązania osiąga się poprzez zwiększenie liczby punktów przy optymalnym ich rozmieszczeniu.

3. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

Opracowaną metodę zastosowano do rozwiązania żelbetowej płyty cienkiej poddanej działaniu obciążenia równomiernie rozłożonego o intensywności $q = 20\,kN/m^2$. Rozpatrywano dwa przypadki: płyta cienka żelbetowa swobodnie podparta na krawędziach oraz płyta zamocowana na obwodzie. Zastępcze sztywności na zginanie płyty żelbetowej obliczono na podstawie wzorów T. M. Hubera [3]. Przyjęto następujące charakterystyki materiału płyty: beton ciężki marki B15, $E_b = 2{,}3\cdot 10^4\,MN/m^2$, zbrojenie klasy A-III, $E_s = 2{,}0\cdot 10^5\,MN/m^2$, procent zbrojenia płyty w kierunku osi *Ox* $\mu_x = 0{,}2\%$, w kierunku osi *Oy* $\mu_y = 0{,}4\%$. Odległość od dolnej powierzchni płyty do geometrycznego środka pręta wynosi 3cm. W efekcie otrzymano następujące wartości sztywności zastępczych:

$$D_{11} = 16,\,37\,MN/m^2\ ,\quad D_{22} = 16,75\,MN/m^2\ ,$$
$$D_{12} = 3,31\,MN/m^2\ ,\quad D_{66} = 6,62\,MN/m^2\ .$$

Obciążenie aproksymowano podwójnym szeregiem Fouriera, w którym uwzględniono 10 wyrazów rozwinięcia. Warunki brzegowe spełniono metodą kolokacji w wybranych punktach na brzegu płyty, nazwanych punktami węzłowymi. Wykorzystując symetrię, zadanie zredukowano do ¼ jego części. Przyjęto następujące wymiary płyty: $2a_1 = 6m$, $2a_2 = 4m$, grubość $h = 0{,}2m$. Obliczenia przeprowadzono dla dwóch przypadków przyjmując 2 lub 6 warunków brzegowych.

W celu weryfikacji otrzymanych wyników zadanie rozwiązano również metodą elementów skończonych w systemie LIRA. W obliczeniach MES płytę rozwiązano dwukrotnie dzieląc ją na 400 oraz 1600 elementów skończonych.

3.1. Płyta swobodnie podparta na obwodzie

W tym przypadku należy spełnić następujące warunki brzegowe:

$$w(\pm a_1, x_2) = 0, w(x_1, \pm a_2) = 0,$$
$$M_{11}(\pm a_1, x_2) = 0, M_{22}(x_1, \pm a_2) = 0. \qquad (17)$$

W tabelach 1 i 2 podano wartości ugięć i momentów zginających M_{11} w przekroju środkowym $(x_2 = 0)$ płyty.

Tab. 1. *Wartości ugięć płyty [m] w przekroju* $(x_2 = 0)$

x_1	Liczba punktów węzłowych			
	MME		MES	
	2	6	400	1600
0.0	2.38E-03	2.38E-03	2.42E-03	2.42E-03
0.3	2.35E-03	2.35E-03	2.40E-03	2.39E-03
0.6	2.28E-03	2.28E-03	2.32E-03	2.32E-03
0.9	2.16E-03	2.16E-03	2.20E-03	2.20E-03
1.2	1.99E-03	1.99E-03	2.02E-03	2.02E-03
1.5	1.77E-03	1.77E-03	1.80E-03	1.80E-03
1.8	1.49E-03	1.49E-03	1.52E-03	1.52E-03
2.1	1.18E-03	1.18E-03	1.20E-03	1.20E-03
2.4	8.14E-04	8.14E-04	8.29E-04	8.28E-04
2.7	4.18E-04	4.18E-04	4.25E-04	4.24E-04
3.0	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00	0.00E+00

Tab. 2. *Wartości momentu zginającego* M_{11} *[Nm/mb] w przekroju* $(x_2 = 0)$

x_1	Liczba punktów węzłowych			
	MME		MES	
	2	6	400	1600
0.00	1.34E+04	1.34E+04	1.35E+04	1.35E+04
0.16	1.34E+04	1.34E+04	1.35E+04	1.35E+04
0.47	1.34E+04	1.34E+04	1.34E+04	1.35E+04
0.79	1.33E+04	1.33E+04	1.33E+04	1.34E+04
1.11	1.30E+04	1.30E+04	1.31E+04	1.32E+04
1.42	1.26E+04	1.26E+04	1.28E+04	1.29E+04
1.74	1.18E+04	1.18E+04	1.21E+04	1.23E+04
2.05	1.04E+04	1.04E+04	1.10E+04	1.13E+04
2.37	8.22E+03	8.22E+03	9.18E+03	9.74E+03
2.68	4.92E+03	4.92E+03	6.46E+03	7.29E+03
3.00	0.00E+00	0.00E+00	2.49E+03	3.67E+03

3.2. Płyta zamocowana na obwodzie

W tym przypadku należy spełnić następujące warunki brzegowe:

$$w(\pm a_1, x_2) = 0, w(x_1, \pm a_2) = 0,$$
$$u_1(\pm a_1, x_2) = 0, u_2(x_1, \pm a_2) = 0. \qquad (18)$$

W tabelach 3 i 4 podano wartości ugięć i przemieszczeń poziomych u_1 w przekroju środkowym $(x_2 = 0)$ płyty.

Tab. 3. *Wartości ugięć [m] płyty w przekroju* $(x_2 = 0)$

x_1	Liczba punktów węzłowych			
	MME		MES	
	2	6	400	1600
0.0	6.90E-04	6.81E-04	6.84E-04	6.81E-04
0.3	6.82E-04	6.72E-04	6.75E-04	6.73E-04
0.6	6.55E-04	6.45E-04	6.48E-04	6.46E-04
0.9	6.10E-04	6.00E-04	6.03E-04	6.01E-04
1.2	5.46E-04	5.36E-04	5.38E-04	5.37E-04
1.5	4.64E-04	4.54E-04	4.55E-04	4.54E-04
1.8	3.66E-04	3.54E-04	3.56E-04	3.54E-04
2.1	2.56E-04	2.44E-04	2.45E-04	2.44E-04
2.4	1.45E-04	1.33E-04	1.33E-04	1.33E-04
2.7	5.01E-05	4.10E-05	4.08E-05	4.06E-05
3.0	0.00E+00	-1.60E-13	0.00E+00	0.00E+00

Tab. 4. *Wartości przemieszczeń poziomych* u_1 *[m] w przekroju* $(x_2 = 0)$

x_1	Liczba punktów węzłowych			
	MME		MES	
	2	6	400	1600
0.0	-9.13E-21	5.62E-21	-9.84E-18	9.37E-17
0.3	5.88E-06	5.91E-06	5.92E-06	5.90E-06
0.6	1.19E-05	1.19E-05	1.20E-05	1.19E-05
0.9	1.81E-05	1.82E-05	1.82E-05	1.82E-05
1.2	2.43E-05	2.45E-05	2.46E-05	2.45E-05
1.5	3.03E-05	3.05E-05	3.06E-05	3.05E-05
1.8	3.51E-05	3.54E-05	3.56E-05	3.54E-05
2.1	3.76E-05	3.77E-05	3.79E-05	3.78E-05
2.4	3.56E-05	3.52E-05	3.54E-05	3.52E-05
2.7	2.61E-05	2.43E-05	2.44E-05	2.43E-05
3.0	4.91E-06	3.31E-07	0.00E+00	0.00E+00

4. ANALIZA REZULTATÓW

Z porównania wyników uzyskanych metodami: analityczną (MME) i numeryczną (MES) wynika wysoka zgodność ugięć, przemieszczeń poziomych u_1 i momentów zginających M_{11}.

Algorytm MME daje zadawalającą dokładność wyników już dla dwóch punktów węzłowych dla ¼ obwodu płyty. Maksymalne rozbieżności między wynikami zastosowanych metod MME i MES wynoszą:

– w przypadku płyty swobodnie podpartej na obwodzie wartości momentu zginającego M_{11} obliczone tymi metodami różnią się o 1,1% dla dwóch punków węzłowych i 0,3% dla 6 punktów węzłowych,
– dla płyty utwierdzonej na obwodzie wartości ugięcia różnią się o 1,4% dla dwóch punków węzłowych i 0,4% dla 6 punktów węzłowych.

Metoda makroelementów pozwala dokładnie spełnić statyczne i kinematyczne warunki brzegowe, natomiast MES tylko warunki kinematyczne.

BIBLIOGRAFIA

1. Делявський М.В., Здолбіцька Н.В., Здолбіцький А.П. Метод конструкційних елементів у розрахунку плит складної конфігурації на пружній основі. Монографія. – Луцьк: ЛНТУ, 2012
2. Делявський М., Здолбіцька Н., Онишко Л., Здолбіцький А. Визначення напружено-деформованого стану в тонких плитах ортотропних плитах на пружній основі Вінклера, Фізико-хімічна Механіка Матеріалів, 2014, № 6, с. 15-22
3. Huber M. T. Teoria płyt prostokątnie różnokierunkowych wraz z technicznymi zastosowaniami do płyt betonowych, krat belkowych itp., Lwów, Wydawnictwo Towarzystwa Naukowego, 1921
4. Здолбіцька Н. В., Делявський М. В. Матричний метод розрахунку плит на пружній основі Вінклера, Сільськогосподарські машини, Збірник наукових статей, Луцьк, Ред.-вид. відділ ЛНТУ, 2009, Вип. 19, с. 63–71
5. Zienkiewicz O. C., Metoda elementów skończonych, Warszawa, Arkady, 1972

THE METHOD FOR SOLVING THIN ORTHOTROPIC PLATES

Abstract

The new approach to solving of engineering constructions called as macroelement method has been worked. The solution of construction is reduced to solving of system of algebraic equations. The method gives a better accuracy in comparing of finite element method for less number of equations. There are considered two types of constructions: rectangular plate free supported or clamped at the counter and loaded uniformly.

Keywords: orthotropic plate, , macroelement method, finite element method

Autorzy:
prof. dr hab. **Mykhaylo Delyavskyy** – Uniwersytet Technologiczno--Przyrodniczy w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, delyavmv@utp.edu.pl .
dr inż. **Maria Olejniczak** – Uniwersytet Technologiczno - Przyrodniczy w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska.
dr inż. **Aleksandra Niespodziana** – Uniwersytet Technologiczno--Przyrodniczy w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska.
dr inż. **Adam Grabowski** – Uniwersytet Technologiczno--Przyrodniczy w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska, adamgrab@utp.edu.pl.
dr inż. **Tomasz Janiak**– Uniwersytet Technologiczno-Przyrodniczy w Bydgoszczy, Wydział Budownictwa, Architektury i Inżynierii Środowiska.