

Andrzej WILKOCKI<sup>1</sup>, Anatoli VOLK<sup>2</sup>

e-mail: andrzejwilkocki@gmail.com

<sup>1</sup> Katedra Procesów i Aparatów Przemysłu Chemicznego, Białoruski Państwowy Uniwersytet Technologiczny, Mińsk, Republika Białoruś

<sup>2</sup> Katedra Matematyki, Białoruski Państwowy Uniwersytet Technologiczny, Mińsk, Republika Białoruś

## Model matematyczny hydrodynamiki wirnikowo-błonowego aparatu absorpcyjnego do oczyszczania gazów

### Wstęp

Jednym z perspektywicznych kierunków intensyfikacji procesów przenoszenia masy jest opracowanie konstrukcji i wykorzystanie aparatów zapewniających wysokie rozwinięcie powierzchni kontaktu międzyfazowego i jej ciągłą odnowę przy kontakcie faz płynów.

Analiza problemu wskazuje, że ważną rolę wśród aparatów używanych np. do absorpcji (oprócz natryskowych i barbożawowych) odgrywają urządzenia dyspersyjno-błonowe, w których oddziaływanie faz realizuje się w strefie intensywnego dyspergowania cieczy przez urządzenie rozpylające z dalszym kontaktem gazu z filmowym przepływem cieczy [Gelperin, 1981; Sokolov, 1976; Shlikhting, 1969]. Zastosowanie w takich aparatach przepływu spiralnego pozwala zintensyfikować prowadzone procesy i istotnie poprawić warunki wzajemnego oddziaływania faz przy stosunkowo niewysokim oporze hydraulicznym.

Wyniki badań hydrodynamiki przepływu błonowego mają duże znaczenie, m.in. w analizie przebiegu procesów fizykochemicznych i przy obliczaniu optymalnych reżimów pracy aparatów (również w ochronie środowiska) [Lyutarevich i in., 2007; 2010].

Badania teoretyczne i eksperymentalne hydrodynamiki przepływów dwufazowych pozwalają rozszerzyć zakres stosowania filmów ciekłych oraz intensyfikować biegnące w nich procesy przenoszenia ciepła i masy.

Reżim hydrodynamiczny określa liczba *Reynoldsa* dla filmu:

$$Re_{\delta} = \frac{4\bar{U}\delta\rho_c}{\mu_c} = \frac{4q}{\nu_c} \quad (1)$$

W przypadku obecności przepływu błonowego na wewnętrznej powierzchni rury, pofalowana powierzchnia cieczy rozpatrywana jest jak nieregularna chropowatość ścianek kanału. Jako uogólnienie danych eksperymentalnych dla współczynnika tarcia na granicy rozdziału faz w takim przypadku otrzymano zależność [Shlikhting, 1969; Sokolov, 1976]:

$$\tau_z = \frac{0,0791}{Re^{0,25}} \frac{\rho_r \bar{W}_z^2}{2} \left(1 + \frac{300\delta}{D}\right) \quad (2)$$

Przedmiotem niniejszej pracy są badania teoretyczne stacjonarnego laminarnego osiowo-symetrycznego ruchu warstwy lepkiej cieczy po wewnętrznej ściance pionowego cylindra pod wpływem wirującego strumienia gazu. Otrzymano analityczne rozwiązanie równań *Naviera-Stokesa* dla osiowej i stycznej prędkości cieczy.

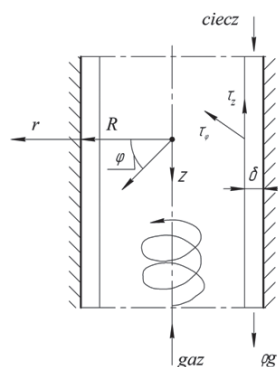
### Model matematyczny procesu

#### Charakterystyka rozpatrywanego przepływu

Rozpatrzono stacjonarny osiowo-symetryczny przepływ laminarny filmu lepkiej cieczy wzdłuż ścianki wewnętrznej pionowego cylindra pod wpływem wirującego strumienia gazu. Oś cylindrycznego układu współrzędnych skierowana jest w dół wzdłuż osi cylindra (Rys. 1).

Równanie ciągłości ma postać [Loytyansky, 1987]:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rU_r) + \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (3)$$



Rys. 1. Przepływ błonowy na powierzchni cylindrycznej

Ze względu na symetrię osiową  $\frac{\partial U_{\varphi}}{\partial \varphi} = 0$ . Przyjmując  $U_r = 0$  z równ. (3) otrzymuje się  $\frac{\partial U_z}{\partial z} = 0$ .

W tych warunkach rozwiązanie równań *Naviera-Stokesa* jest jednowymiarowe [Loytyansky 1987], tzn. prędkość błony będzie tylko funkcją promienia  $U = U(r)$ . Równanie *Naviera-Stokesa* dla składowej osiowej prędkości przyjmuje postać:

$$\mu \left[ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dU_z}{dr} \right) \right] + \rho g - \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

#### Warunki brzegowe

Przy założeniu braku poślizgu na ścianie cylindra oraz znajomości naprężeń stycznych na granicy rozdziału fazy ciekłej i gazowej warunkami granicznymi będą:

$$U_z|_{r=R} = 0 \quad \mu \frac{dU_z}{dr} \Big|_{r=R-\delta} = -\tau_z \quad (5)$$

Spadek ciśnienia na długości elementu przyjęto jako stały. Po wstawieniu  $\psi = \frac{\partial P}{\partial z} = \text{const}$  i scałkowaniu równania (4) otrzymuje się jako:

$$U_z = c_1 \ln r - \frac{\rho g - \psi}{4\mu} r^2 + c_2 \quad (6)$$

#### Średnia grubość filmu cieczy

Wykorzystując warunki graniczne (5) oraz warunki równowagi sił w postaci  $\pi(R - \delta)^2 \Delta P = 2\pi(R - \delta)l\tau_z$  po wprowadzeniu zmiennych bezwymiarowych:  $\tilde{r} = r/R$ ,  $\tilde{\delta} = \delta/R$  otrzymuje się:

$$U_z = \frac{\tau_z R}{2\mu(1 - \tilde{\delta})} (1 - \tilde{r}^2) + \frac{\rho g R^2}{4\mu} [2(1 - \tilde{\delta})^2 \ln \tilde{r} + 1 - \tilde{r}^2] \quad (7)$$

Wydatek objętościowy fazy ciekłej na powierzchni przekroju poprzecznego błony na jednostkę obwodu cylindra wynosi:

$$q = \frac{\int \int U_z r dr d\varphi}{2\pi R} = \frac{1}{R} \int_{R-\delta}^R U_z r dr = R \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_z \tilde{r} d\tilde{r} \quad (8)$$

Po scałkowaniu otrzymuje się

$$q = \frac{\tau_z R^2}{8\mu} \left[ \frac{1}{1 - \tilde{\delta}} + (1 - \tilde{\delta})^3 + 2(1 - \tilde{\delta}) \right] + \frac{\rho g R^3}{4\mu} \left[ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(1 - \tilde{\delta})^4 - (1 - \tilde{\delta})^2 - (1 - \tilde{\delta})^4 \ln(1 - \tilde{\delta}) \right] \quad (9)$$

Rozwinięcie funkcji w szereg potęgowy prowadzi do:

$$q = \frac{\tau_z \delta^2 (1 - \tilde{\delta} + \tilde{\delta}/4)}{2\mu(1 - \tilde{\delta})} + \frac{\rho g \delta^3}{3\mu} \left[ 1 - \tilde{\delta} + \frac{3}{20} \tilde{\delta}^2 + \frac{\tilde{\delta}^3}{5} + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{24(k-2)!}{(k+2)!} \tilde{\delta}^k \right] \quad (10)$$

Przyjęcie  $\tilde{\delta} = 0$  prowadzi do szczególnego przypadku – ruchu błonowego w płaszczyźnie pionowej.

Równanie (9) jednoznacznie określa średnią grubość filmu  $\delta$  przy zadanym wydatku fazy ciekłej  $q$  i znanych naprężeń stycznych na granicy rozdziału faz. Przepływ grawitacyjny występuje przy  $\tau_z = 0$ .

**Analiza prądu błonowego**

Analiza prądu błonowego prowadzi do zależności na prędkość filmu na granicy rozdziału faz i gradientu tej prędkości:

$$U_z|_{r=1-\delta} = \frac{\tau_z R}{2\mu} \left( \frac{1}{1-\delta} - 1 + \delta \right) + \frac{\rho g R^2}{4\mu} [2(1-\delta)^2 \ln(1-\delta) + 1 - (1-\delta)^2] \quad (11a)$$

$$\frac{dU_z}{dr} = \frac{dU_z}{Rd\tilde{r}} = -\frac{\tau_z \tilde{r}}{\mu(1-\delta)} + \frac{\rho g R}{2\mu} \left[ \frac{(1-\delta)^2}{\tilde{r}} - \tilde{r} \right] \quad (11b)$$

Osiowa składowa tensora naprężeń stycznych na ścianie ma postać:

$$\tau|_{r=R} = \mu \frac{dU_z}{Rd\tilde{r}}|_{r=1} = -\frac{\tau_z}{1-\delta} + \rho g \delta \left( 1 - \frac{\delta^2}{2} \right) \quad (12)$$

Analogicznie otrzymuje się rozwiązanie dla zakrzywionego prądu błonowego. Przyjęto, że styczna składowa prędkości zależy tylko od promienia  $U_\varphi = U_\varphi(r)$  i wówczas:

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\varphi) \right] = 0 \quad (13)$$

Otrzymane rozwiązanie ma postać:

$$U_\varphi = c_3 \tilde{r} + \frac{c_4}{\tilde{r}} \quad (14)$$

Wykorzystując warunki graniczne:

$$U_\varphi|_{r=1} = 0 \quad \tilde{r} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left( \frac{U_\varphi}{\tilde{r}} \right) \Big|_{r=1-\delta} = -\frac{R\tau_\varphi}{\mu} \quad (15)$$

można wyznaczyć stałe całkowania i składową styczną prędkości:

$$U_\varphi = \frac{R\tau_\varphi(1-\delta)}{2\mu} \left( \frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r} \right) \quad (16)$$

Wartość średniej składowej stycznej prędkości wynosi:

$$\begin{aligned} \bar{U}_\varphi &= \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 U_\varphi d\tilde{r} = \\ &= \frac{1}{\delta} \frac{R\tau_\varphi}{2\mu} \left[ \frac{(1-\delta)^4}{2} - \frac{(1-\delta)^2}{2} - (1-\delta) \ln(1-\delta) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

Związek między składowymi średniej prędkości  $\bar{U}_z$  filmu cieczy i składową styczną tensora naprężeń oraz strumienia gazu, w zależności od wielkości kąta  $\beta$  określono jako:

$$\bar{U}_\varphi = \bar{U}_z \operatorname{tg}(k\beta) \quad \tau_\varphi = \tau_z \operatorname{tg}(k\beta) \quad (18)$$

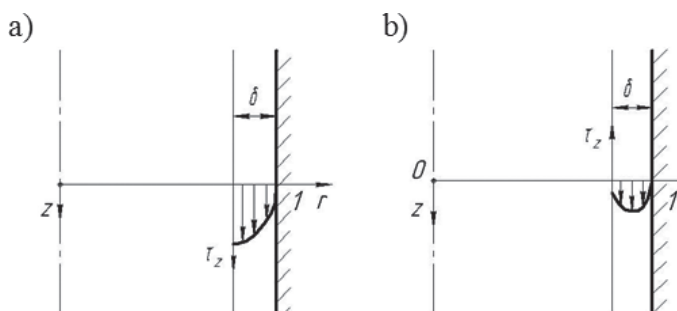
**Profile składowej prędkości osiowej**

Odpowiednie profile przedstawiono na rys. 2–5.

**Reżim prądu zstępującego** wykazuje dwa typy profilu prędkości, które otrzymywano przy różnych kierunkach składowej osiowej  $\tau_z$  tensora naprężeń stycznych na granicy rozdziału (Rys. 2).

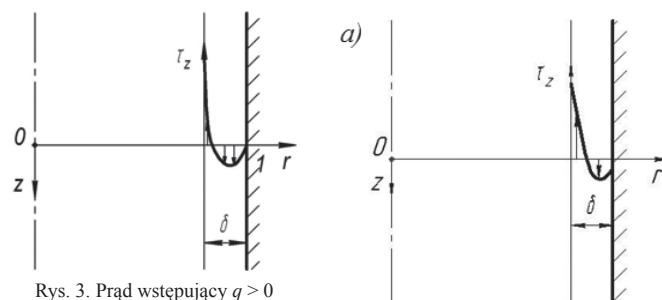
**Reżim prądu wstępującego** charakteryzuje się tym, że zwrot prędkości cieczy na granicy rozdziału faz jest przeciwny do kierunku strumienia głównego (Rys. 3). Przy prądzie wstępującym przepływ wewnątrz filmu może mieć kierunek przeciwny (Rys. 4a) bądź zgodny (Rys. 4b) z kierunkiem ruchu powierzchni.

**Reżim zachłystywania** ma zerowy wydatek fazy ciekłej ( $q=0$ ). W takim przypadku następuje drastyczne zwiększenie grubości filmu, co od-



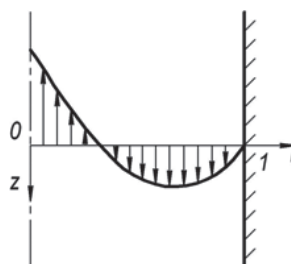
Rys. 2. Profile prądu zstępującego:

a)  $q > 0, \tau_z \geq 0$ ; b)  $q > 0, \tau_z < 0, U|_{r=1-\delta} \geq 0$

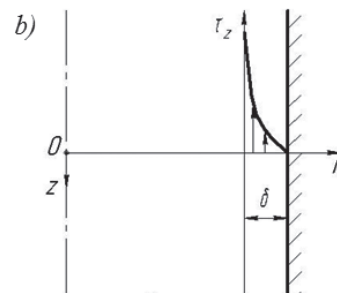


Rys. 3. Prąd wstępujący  $q > 0$

$U|_{r=1-\delta} < 0$



Rys. 5. Zachłystywanie się:  $q = 0$



Rys. 4. Prąd wstępujący  $q < 0$ :

a),  $\frac{dU}{dr}|_{r=1} \geq 0$ ; b)  $\frac{dU}{dr}|_{r=1} < 0$

powiada realnemu fizycznemu zjawisku – gromadzeniu się fazy ciekłej (Rys. 5).

**Podsumowanie**

Zaprezentowano nowy model matematyczny służący do określenia charakterystyk hydrodynamicznych przepływu błonowego na powierzchni cylindrycznej, wywołanego wirującym strumieniem gazu.

Przedstawiony model pozwala na charakterystykę hydrodynamiki filmu cieczy w procesach wymiany masy i ciepła oraz separacji.

**Oznaczenia**

- $l$  – długość elementu cylindrycznego, [m]
- $P$  – ciśnienie, [Pa]
- $q$  – objętościowy wydatek fazy płynnej, [m<sup>3</sup>/(m·s)]
- $r$  – odległość w kierunku promieniowym w cylindrycznym układzie współrzędnych, [m]
- $R$  – promień elementu cylindrycznego, [m]
- $U_z, U_r, U_\varphi$  – składowe prędkości cieczy, odpowiednio: osiowa, promieniowa i styczna, [m/s]
- $U_0$  – prędkość odpływu cieczy, [m/s]
- $\beta$  – kąt
- $z$  – współrzędna osiowa cylindrycznego układu współrzędnych;
- $\delta$  – grubość błony (filmu) cieczy, [m]
- $\psi$  – spadek ciśnienia, [Pa/m]
- $\nu$  – współczynnik lepkości kinematycznej, [m<sup>2</sup>/s]
- $\rho$  – gęstość, [kg/m<sup>3</sup>]
- $\tau$  – naprężenie styczne, [N/m<sup>2</sup>]
- $\varphi$  – kąt w cylindrycznym układzie współrzędnych

**LITERATURA**

Gelperin N.I., 1981. *Basic processes and devices of chemical technology* (in Russian). Chemistry, Moscow

Loytanyansky L.G., 1987. *Fluid mechanics* (in Russian). Science, Moscow

Lyutarevich I.A., Markov V.A., Wilkocki A.I., 2007. Study of the hydrodynamics of rotary dispersion-film apparatus (in Russian). *Chemical Technology*, 8, 1, 37-41

Lyutarevich I.A., Markov V.A., Wilkocki A.I., Volkov E.V., 2010. Investigation of the energy characteristics of rotary dispersion-film apparatus (in Russian). *Product quality, technology and education*, 196-197

Shlikhting G., 1969. *Theory of the boundary layer* (in Russian). Science, Moscow

Sokolov V.I., Domanski I.V., 1976. *Gas-liquid reactors*. (in Russian). Mechanical Engineering, Sankt Petersburg