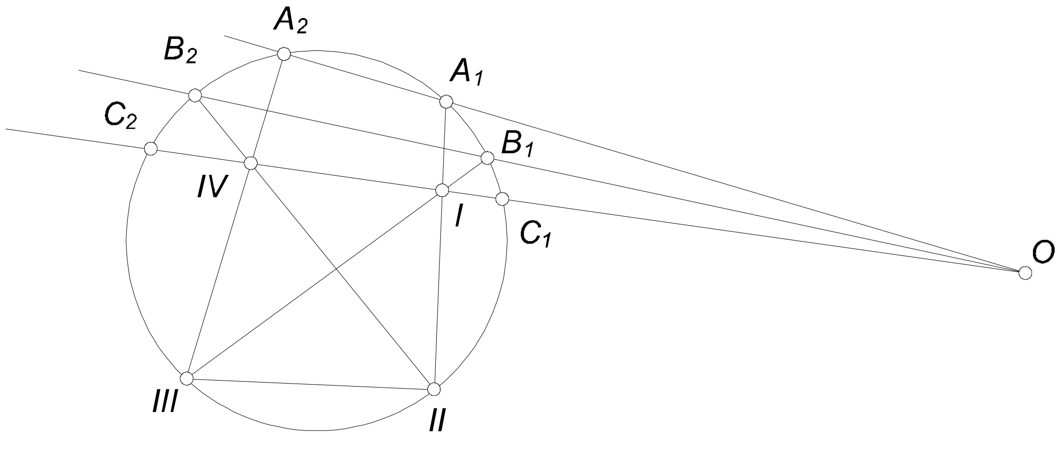
Barbara WOJTOWICZ
Samodzielna Pracownia Geometrii Wykreślnej i Grafiki Inżynierskiej
Politechnika Krakowska

TWIERDZENIE WEYER'A I JEGO ZASTOSOWANIE W ROZWIĄZYWANIU ZADAŃ

TWIERDZENIE WEYER'A

Jeżeli pęk stożkowych o czterech punktach podstawowych $\boldsymbol{p^2}_{I,\ II,\ II,\ IV}$ $\boldsymbol{(a^2,\ b^2,\ c^2...)}$ *przetniemy stożkową* k^2 *nie należącą do tego pęku, ale przechodząca przez dwa z tych czterech punktów, to stożkowe pęku* $\boldsymbol{p^2}$ $\boldsymbol{(a^2,\ b^2,\ c^2...)}$ *wytną na niej inwolucyjny szereg punktów rzędu II po* $\boldsymbol{k^2}$ $\boldsymbol{(A_1A_2,\ B_1B_2,\ C_1C_2...)}$

Zauważmy, że gdy stożkowa $\boldsymbol{k^2}$ przechodzi przez dwa punkty podstawowe, to środek inwolucji $\boldsymbol{O}$ (punkt przecięcia się prostych $\boldsymbol{a = A_1A_2},\ \boldsymbol{b = B_1B_2}\ , ...$) leży na przeciwległym boku czworokąta zupełnego $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{II}$, $\boldsymbol{III}$, $\boldsymbol{IV}$. (rys. 1)



Rys.1

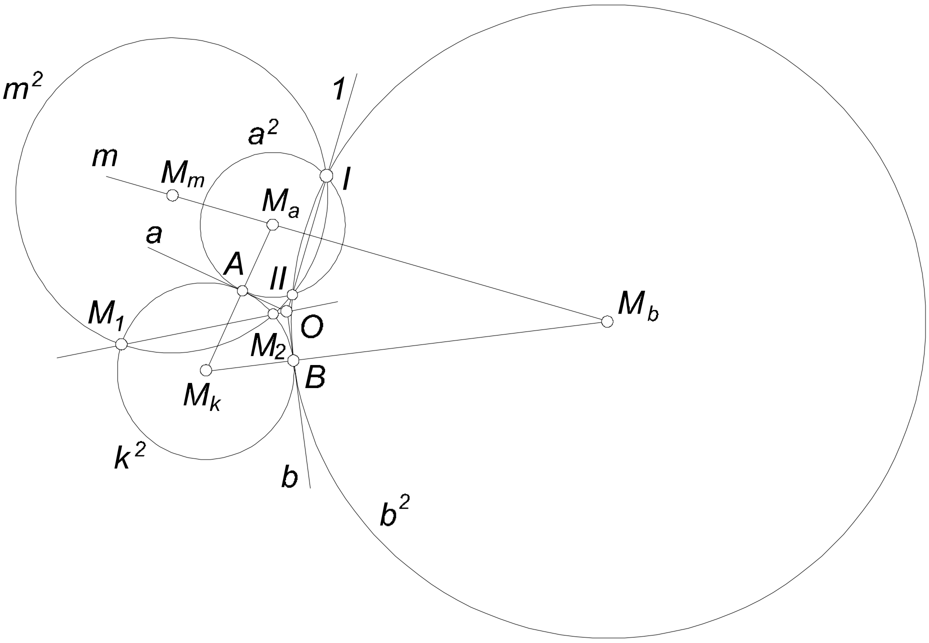
To spostrzeżenie możemy wykorzystać do rozwiązywania pewnych zadań w których występują okręgi lub pęki okręgów.

Zadanie pierwsze.

Dany jest okrąg k^2 oraz dwa dowolne punkty $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{II}$. Należy narysować okrąg przechodzący przez punkty $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{II}$ i styczny do okręgu $\boldsymbol{k^2}$.

Rozwiązanie.

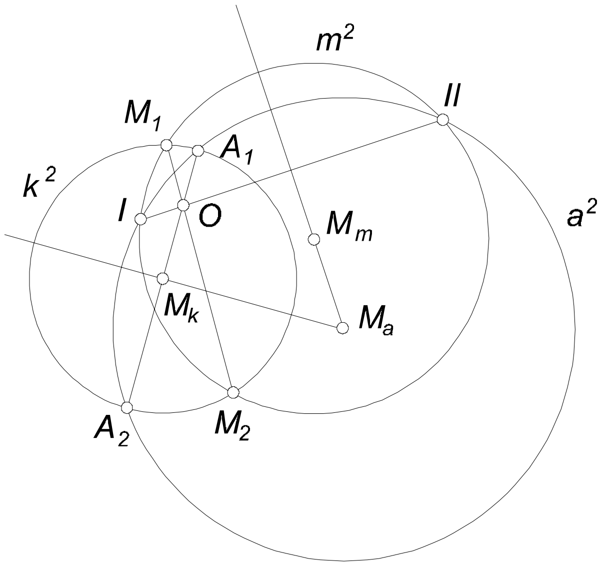
Wszystkie okręgi przechodzące przez punkty $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{II}$ tworzą pęk $\boldsymbol{(p^2)}$ okręgów, których punktami podstawowymi są punkty $\boldsymbol{I}$ i $\boldsymbol{II}$ oraz punkty kołowe $\boldsymbol{Q_i}$ i $\boldsymbol{R_i}$ (urojone parami sprzężone). Pęk ten na $\boldsymbol{k^2}$ wycina inwolucję, której środek $\boldsymbol{O}$ musi leżeć na prostej $\boldsymbol{1= I\ II}$. Dowolny okrąg $\boldsymbol{m^2}$ pęku $\boldsymbol{(p^2)}$ przecina dany okrąg $\boldsymbol{k^2}$ w punktach $\boldsymbol{M_l}$ i $\boldsymbol{M_2}$ prosta łącząca punkty M_l i M_2 przecina prostą $\mathbf{1}$ w punkcie O, który jest środkiem inwolucji. Styczne a i b z punktu O poprowadzone do okręgu k^2 wyznaczają na niej punkty A i B. Łącząc punkt A z M_k otrzymamy na prostej m. (symetralnej odcinka $I\ II$) punkt M_a, który jest środkiem szukanego okręgu (podobnie postępujemy z punktem B). Istnieją dwa rozwiązania tego zadania (a^2 i b^2). (Rys. 2)



Rys. 2

Zadanie drugie

Dany jest okrąg k^2 i punkty I i II. Przez punkty I i II należy poprowadzić okrąg a^2, który przecina dany okrąg k^2 w średnicy.



Rys. 3

Rozwiązanie.

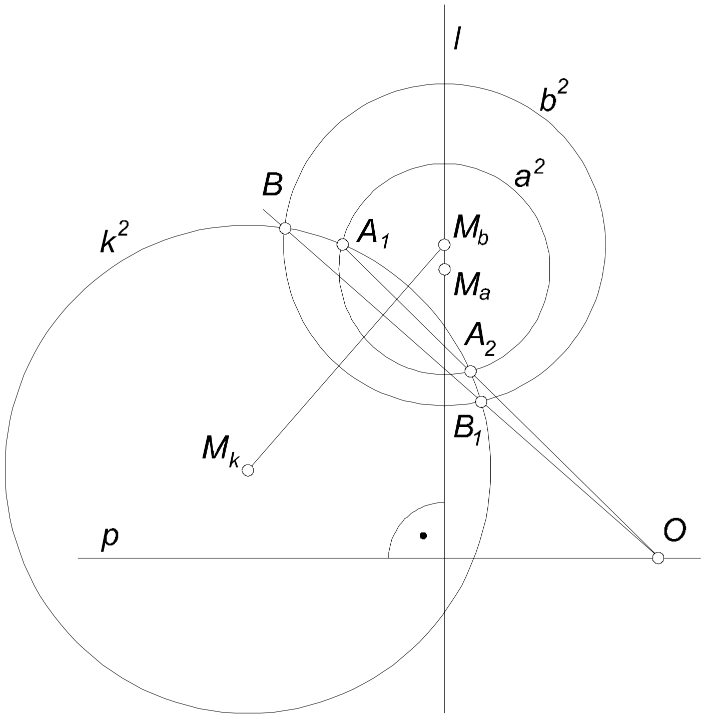
W podobny jak poprzednio sposób wyznaczamy środek inwolucji O. Łącząc punkt O z punktem M_k (środek okręgu k^2) otrzymujemy na nim punkty A_1, A_2, które z punktami I i II wyznaczają szukany okrąg. (Rys. 3)

Zadanie trzecie

Dany jest okrąg $\boldsymbol{a^2}$ i prosta $\boldsymbol{p}$. Prosta $\boldsymbol{p}$. przecina $\boldsymbol{a^2}$ w punktach $\boldsymbol{I_i}$ i $\boldsymbol{II_i}$ (urojone właściwe). Dany jest punkt $\boldsymbol{B}$. Należy narysować okrąg $\boldsymbol{b^2}$, który przechodzi przez punkt $\boldsymbol{B}$ oraz punkty $\boldsymbol{I_i}$ i $\boldsymbol{II_i}$.

Rozwiązanie.

Środek tego okręgu $\boldsymbol{M_b}$ będzie leżał na prostej ***1*** prostopadłej do prostej $\boldsymbol{p}$. i przechodzącej przez punkt $\boldsymbol{M_a}$ (środek $\boldsymbol{a^2}$). Okrąg $\boldsymbol{a^2}$ i szukany okrąg $\boldsymbol{b^2}$ wyznaczają pęk okręgów $\boldsymbol{(p^2)}$ o punktach podstawowych $\boldsymbol{I_i}$ $\boldsymbol{Ii_i}$ $\boldsymbol{Q_i}$ i $\boldsymbol{R_i}$. Przetnijmy ten pęk dowolnym okręgiem $\boldsymbol{k^2}$ przechodzącym przez punkt $\boldsymbol{B}$. Pęk $\boldsymbol{(p^2)}$ wytnie na okręgu $\boldsymbol{k^2}$ inwolucję, której środek leży na prostej $\boldsymbol{p}$. Okrąg $\boldsymbol{k^2}$ przecina okrąg $\boldsymbol{a^2}$ w punktach $\boldsymbol{A_1}$ i $\boldsymbol{A_2}$. Prosta łącząca te dwa punkty przecina prostą $\boldsymbol{p}$**.** w środku inwolucji $\boldsymbol{O}$. Prosta łącząca punkt $\boldsymbol{O}$ z punktem $\boldsymbol{B}$ przecina okrąg $\boldsymbol{k^2}$ w punkcie $\boldsymbol{B_1}$. Symetralna tego odcinka przecina prostą $\boldsymbol{l}$ w punkcie $\boldsymbol{M_b}$, który jest środkiem szukanego okręgu (Rys. 4).



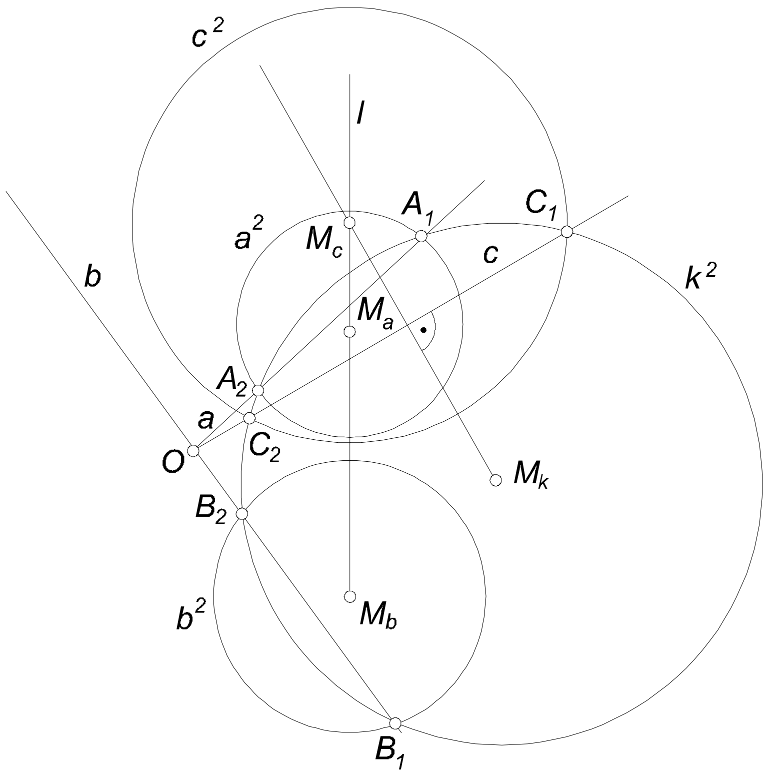
Rys. 4

Zadanie czwarte

Dane dwa okręgi $\boldsymbol{a^2}$ i $\boldsymbol{b^2}$ wyznaczają pęk okręgów $\boldsymbol{(p^2)}$ o punktach podstawowych $\boldsymbol{I_i}$, $\boldsymbol{II_i}$, $\boldsymbol{Q_i}$, $\boldsymbol{R_i}$. Na prostej $\boldsymbol{1= M_a\ M_b}$ przyjmujemy dowolny punkt $\boldsymbol{M_c}$, który jest środkiem okręgu należącego do tego pęku. Należy narysować ten okrąg.

Rozwiązanie.

Dowolny okrąg $\boldsymbol{k^2}$ przecina $\boldsymbol{a^2}$ w punktach $\boldsymbol{A_1\,A_2}$, zaś $\boldsymbol{b^2}$ w punktach $\boldsymbol{B_1B_2}$. Proste $\boldsymbol{a}$ i $\boldsymbol{b}$ łączące te punkty przecinają się w punkcie $\boldsymbol{O}$, który jest środkiem inwolucji jaką pęk $\boldsymbol{(p^2)}$ wyznacza na okręgu $\boldsymbol{k^2}$. Z punktu $\boldsymbol{O}$ rysujemy prostą $\boldsymbol{c}$ prostopadłą do prostej łączącej punkt $\boldsymbol{M_c}$ z punktem $\boldsymbol{M_k}$ (środek $\boldsymbol{k^2}$). Prosta $\boldsymbol{c}$ przecina okrąg $\boldsymbol{k^2}$ w punktach $\boldsymbol{C_1}$ i $\boldsymbol{C_2}$. Rysujemy okrąg $\boldsymbol{c^2}$ o promieniu równym $\boldsymbol{M_cC_1}$ (Rys. 5)



Rys. 5

LITERATURA

[1]. M. Palej, E.Kalinowska: „Spatial Analogue of Weyer's Theorem”*,* Proc. 7th ICECGDG, Cracow, 18-22 July 1996, pp.132-135.

WEYER'S THEOREM AND ITS APPLICATION TO SOLVE CERTAIN PROBLEMS

One of the important theorems concerning a bundle of conics is the one recognized as Weyer's theorem, or a generalized second Desargues' theorem [1]. The theorem may be expressed as follows.

Weyer's Theorem.

If a bundle of conics ***p2~,~, N*** ***(***$\boldsymbol{a^2}$***,*** $\boldsymbol{b^2}$***,*** $\boldsymbol{c^2}$***, ...)*** *with four base points* ***I, II, III*** *and* ***IV*** *will be intersected with a conic* $\boldsymbol{k^2}$ *which does not belong to the given bundle, but which passes through the two out of four of the given base points, then the conics of a bundle* $\boldsymbol{p^2}$ ***(***$\boldsymbol{a^2}$***,*** $\boldsymbol{b^2}$***,*** $\boldsymbol{c^2}$***, ...)*** *intersect with the conic* $\boldsymbol{k^2}$ *at points of an involutory chain of points of the second order* ***k2 (***$\boldsymbol{A_1\ A_2, B_1B_2, C_1C_2}$***, ...).***

Let us notice that if a conic $\boldsymbol{k^2}$ passes through the two out of four of the given base points of a bundle of conics then the center of involution ***O*** (point of intersection of lines

a** = A_1A_2, **b**= B_1B_2, ...)* lies in the opposite side of the quadrangle ***I, II, III, IV. The last property can be utilized to solve certain tasks on circles or bundles of circles. Let, for example, be assumed that such a circle is to be constructed that passes through a given real point and two imaginary points belonging to an optional line. Certain problems related to Weyer's theorem are discussed in the paper.

Recenzent: dr inż. Marcin JONAK