MINUT 2019 (1), s. 63–75
ISSN 2719-3063

Janina MACURA

Wydział Matematyki Stosowanej, Politechnika Śląska w Gliwicach

Obliczanie granic ciągów o wyrazach rzeczywistych

Streszczenie. Artykuł został napisany z myślą o studentach, którzy mają problem z obliczaniem granic albo chcą obliczać granice w sposób bardziej świadomy, chcą wiedzieć, dlaczego należy wykonać takie a nie inne przekształcenie, kiedy jakie twierdzenie zastosować. W związku z tym prezentowane przykłady są bardzo typowe, zawierają dokładne wyjaśnienia, co i dlaczego robimy. Na początku znajduje się lista twierdzeń oraz podstawowych granic, z których będziemy korzystać. Po każdym przykładzie znajdują się dwa bardzo podobne zadania do samodzielnego rozwiązania, na końcu kilka dodatkowych zadań.

Słowa kluczowe: ciąg, granica, symbol nieoznaczony.

1. Podstawowe twierdzenia i granice

W artykule ograniczymy się do obliczania granic ciągów liczb rzeczywistych. Dowody podanych twierdzeń można znaleźć w [3] i [4]. Część twierdzeń można uogólnić na przypadek ciągów liczb zespolonych. Osoby zainteresowane mogą zajrzeć do [2], [4].

Twierdzenie 1. *Niech* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *będą ciągami zbieżnymi, przy czym* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Wtedy:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} c = c$, $c \in \mathbb{R}$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$,

4) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$,

5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$, *jeżeli* $b_n \neq 0$ *i* $b \neq 0$,

6) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$.

Autor korespondencyjny: J. Macura (Janina.Macura@polsl.pl).
Data wpłynięcia: 02.12.2019.

Podkreślmy, że twierdzenie to dotyczy tylko ciągów **zbieżnych**. Na przykład nie można zastosować punktu trzeciego powyższego twierdzenia, jeżeli liczymy granicę sumy dwóch ciągów rozbieżnych do $+\infty$.

Kolejne twierdzenie, tzw. twierdzenie o trzech ciągach, pozwoli nam wyznaczyć granicę ciągu bez jej obliczania.

Twierdzenie 2. *Niech* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *i* $\{c_n\}$ *będą ciągami spełniającymi warunki:*

1) $b_n \leq a_n \leq c_n$ *dla wszystkich* n *większych od pewnej liczby* N,

2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = g$.

Wówczas ciąg $\{a_n\}$ *też jest zbieżny i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$.

Wniosek 1. *Jeżeli* $\{a_n\}$ *jest ciągiem ograniczonym,* $\{b_n\}$ *ciągiem zbieżnym do zera, to*

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0.$$

Wniosek 2. *Jeżeli* $\{a_n\}$ *jest ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do* $a > 0$, $\{b_n\}$ *ciągiem zbieżnym do* b, *to*

$$\lim_{n\to\infty} (a_n)^{b_n} = a^b.$$

Zauważmy, że z wniosku tego wynika, między innymi, że jeżeli $\{a_n\}$ jest ciągiem liczb dodatnich zbieżnym do $a > 0$, to

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{a},$$

gdzie $k \geq 2$ jest ustaloną liczbą naturalną.

Twierdzenie 3. *Niech dane będą ciągi* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$. *Wówczas:*

1) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$,

2) jeżeli $a_n > 0$ *dla wszystkich* n *większych od pewnej liczby* N *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = +\infty$,

3) jeżeli $a_n < 0$ *dla wszystkich* n *większych od pewnej liczby* N *i* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = -\infty$,

4) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *i* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$ *oraz* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \begin{cases} +\infty, & gdy\ b > 0 \\ -\infty, & gdy\ b < 0, \end{cases}$

5) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = +\infty$,

6) jeżeli $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty$.

Uwaga 1. Najczęściej korzystamy z następujących granic[1]:

G1 $\lim\limits_{n\to\infty} n^k = +\infty$, $k > 0$,

G2 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0$, $k > 0$,

G3 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad |a| < 1 \\ 1 & \text{dla} \quad a = 1 \\ +\infty & \text{dla} \quad a > 1, \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} a^n$ nie istnieje dla $a \leq -1$,

G4 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,

G5 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$,

G6 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

Twierdzenie 4. *Jeżeli* $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ $(\alpha_n \neq 0$ *dla każdego* $n \in \mathbb{N})$, *to* $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$.

Uwaga 2. Licząc granice, najczęściej nie spotykamy się z sytuacjami, w których można od razu zastosować któreś z powyższych twierdzeń czy wniosków. Zazwyczaj pojawiają się tak zwane symbole nieoznaczone, czyli:

$$\left[\frac{\infty}{\infty}\right], \left[\frac{0}{0}\right], [\infty - \infty], [0 \cdot \infty], [1^\infty], [0^0] \text{ lub } [\infty^0].$$

Przyjrzyjmy się dokładniej symbolowi nieoznaczonemu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Pojawia się on przy liczeniu granicy ilorazu dwóch ciągów rozbieżnych do $+\infty$ lub $-\infty$. Nie możemy wtedy zastosować twierdzenia 1 o granicy ilorazu dwóch ciągów, ponieważ ciągi te nie są zbieżne. Symbol ten nazywamy nieoznaczonym, ponieważ wszystko może się zdarzyć, a jaka jest granica, przekonujemy się dopiero po wykonaniu przekształceń. Poniższe przykłady pokazują, że odpowiednio dobierając ciągi rozbieżne do $+\infty$, otrzymamy różne granice ilorazów tych ciągów:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n}{n} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim\limits_{n\to\infty} 5 = 5$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2} \overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
- $a_n = \begin{cases} n^2 & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ n & \text{dla } n \text{ nieparzystych,} \end{cases} \qquad b_n = n$,

[1] Wyprowadzenia można znaleźć w [3] i [4].

wtedy $\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} n & \text{dla } n \text{ parzystych} \\ 1 & \text{dla } n \text{ nieparzystych} \end{cases}$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ nie istnieje.

Widać więc, że w przypadku symbolu nieoznaczonego $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ granica może być właściwa, niewłaściwa, a może w ogóle nie istnieć. Nie możemy od razu stwierdzić, czy istnieje albo ile jest równa. Musimy najpierw wykonać odpowiednie przekształcenia algebraiczne tak, żeby móc skorzystać z któregoś z twierdzeń.

Poniżej znajdują się bardzo proste granice, proszę je dopasować do odpowiedniego symbolu nieoznaczonego, a następnie policzyć. Na końcu artykułu znajdują się odpowiedzi.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}((n+3)-n)$, **b)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n}$, **c)** $\lim\limits_{n\to\infty}(n-2n)$, **d)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$,

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}}$, **f)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^n$, **g)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot n$, **h)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}$,

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}}$, **j)** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}\cdot 2^n$, **k)** $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2^n}}$, **l)** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Przykłady obliczania granic

Ogólnie mówiąc, obliczanie granic ciągów, gdy pojawia się symbol nieoznaczony, polega na takim przekształceniu wyrazu ogólnego ciągu, żeby „pozbyć się" tego symbolu i zastosować któreś z powyższych twierdzeń oraz którąś z podstawowych granic. W poniższych przykładach pokażemy, w jaki sposób to robić. Zastosujemy sprawdzony sposób – będziemy starali się skomplikowane wyrażenia, które sprawiają nam kłopot, bo np. dążą do nieskończoności i powodują symbol nieoznaczony, przedstawiać w postaci iloczynu wyrażenia bardzo prostego, dążącego do nieskończoności i wyrażenia bardziej skomplikowanego, które już nie będzie dążyło ani do nieskończoności, ani do zera. Ten sposób, z powodzeniem, będzie mógł być stosowany również przy liczeniu granic funkcji.

Przykład 1. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = n - 2n^2 + \sqrt{n}$.

Ponieważ $n \to +\infty$, $\sqrt{n} \to +\infty$ i $n^2 \to +\infty$ (patrz uwaga 1, G1), nie możemy do policzenia granicy ciągu $\{a_n\}$ zastosować twierdzenia 1 mówiącego m.in. o granicy sumy, różnicy ciągów (zwróć uwagę, że twierdzenie to dotyczy ciągów zbieżnych), ale możemy łatwo zauważyć, że mamy tutaj do czynienia z symbolem nieoznaczonym $[\infty - \infty]$.

Aby policzyć granicę, musimy tak przekształcić wyraz a_n, żebyśmy mogli skorzystać z któregoś z podanych twierdzeń.

Zauważamy, że wyłączając jakieś wyrażenie przed nawias, możemy łatwo przedstawić a_n w postaci iloczynu (a w tezach dwóch punktów twierdzenia 3 pojawia się granica iloczynu). Wyłączmy więc przed nawias wyrażenie, które najszybciej dąży do $+\infty$, czyli n^2.

Otrzymujemy:

$$a_n = n - 2n^2 + \sqrt{n} = n^2\left(\frac{1}{n} - 2 + \frac{\sqrt{n}}{n^2}\right).$$

Ze wzoru G2 (uwaga 1) wiemy, że $\frac{1}{n} \to 0$ oraz $\frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \to 0$, Mamy zatem różnicę i sumę ciągów zbieżnych i możemy zastosować twierdzenie 1:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-2+\frac{\sqrt{n}}{n^2}\right)=0-2+0=-2.$$

Ciąg $\{a_n\}$ przedstawiliśmy więc w postaci iloczynu dwóch ciągów, z których pierwszy dąży do $+\infty$, a drugi do liczby ujemnej. Zatem na podstawie punktu 4 twierdzenia 3 wnioskujemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$.

Zadanie 1. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n=3n^3-2n^2+n-1$, **b)** $a_n=n^2-2n\sqrt[3]{n}-n^3$.

Przykład 2. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n=\dfrac{3\sqrt{n}+1}{5-n-6n^2}$.

Można zauważyć, że licznik dąży do $+\infty$, mianownik do $-\infty$ (na podstawie punktów 6 i 4 twierdzenia 3). Mamy więc symbol nieoznaczony $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ i nie możemy do policzenia tej granicy zastosować twierdzenia 1 mówiącego m.in. o granicy ilorazu (pamiętamy, że dotyczy ono ciągów zbieżnych).

Przedstawimy więc nasz ciąg w postaci iloczynu dwóch ciągów; drugi z nich powinien mieć taką postać, żebyśmy do obliczenia jego granicy mogli zastosować twierdzenie 1.

Po wyłączeniu przed nawias w liczniku $\sqrt{n}$, a w mianowniku n^2 (czyli wyrażeń, które najszybciej dążą do $+\infty$ odpowiednio w liczniku i w mianowniku, a równocześnie mają najprostszą postać), otrzymujemy

$$a_n=\frac{3\sqrt{n}+1}{5-n-6n^2}=\frac{\sqrt{n}\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n^2\left(\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}-6\right)}=\frac{\sqrt{n}}{n^2}\cdot\frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}-6}.$$

Ponieważ $\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$, $\frac{5}{n^2}\to 0$, $\frac{1}{n}\to 0$, do policzenia granicy drugiego czynnika możemy zastosować twierdzenie 1 (mamy tu sumę, różnicę i iloraz ciągów zbieżnych):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}-6}=\frac{3+0}{0-0-6}=-\frac{1}{2}.$$

Przy liczeniu granicy ciągu $\{a_n\}$ w dalszym ciągu mamy symbol nieoznaczony, ale ponieważ wyłączyliśmy przed nawias najprostsze wyrażenia, symbol ten jest spowodowany przez iloraz $\frac{\sqrt{n}}{n^2}$, który możemy zapisać w postaci $\frac{1}{n^{3/2}}$. Ponieważ $\frac{1}{n^{3/2}}\to 0$, otrzymaliśmy przedstawienie ciągu $\{a_n\}$ w postaci iloczynu dwóch ciągów zbieżnych i znowu możemy zastosować twierdzenie 1:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot\frac{\left(3+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\left(\frac{5}{n^2}-\frac{1}{n}-6\right)}=0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=0.$$

Zadanie 2. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n=\dfrac{2n^3+n-1}{5+n^2}$, **b)** $a_n=\dfrac{n^6-n}{(n+2)^5(3-2n)}$.

Przykład 3. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{2n^2+1}$.

Tym razem mamy symbol nieoznaczony $[\infty - \infty]$. Zauważmy, że sytuacja jest trochę podobna do tej z przykładu pierwszego. Wyłączymy więc znowu przed nawias wyrażenie, które najszybciej dąży do $+\infty$, czyli n. Otrzymujemy:

$$a_n = \sqrt{n^2\left(1+\frac{3}{n}\right)} - \sqrt{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)} = \sqrt{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n^2}}\right) = n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - \sqrt{2+\frac{1}{n^2}}\right).$$

W ostatnim przekształceniu, przed nawiasem powinien pojawić się $|n|$, ale n jest liczbą naturalną, więc $|n| = n$. Ponieważ $\frac{3}{n} \to 0$, $\frac{1}{n^2} \to 0$, wyrażenie w nawiasie dąży do liczby ujemnej $1 - \sqrt{2}$. Mamy więc iloczyn dwóch ciągów, pierwszy dąży do $+\infty$, drugi do liczby ujemnej, a więc na podstawie twierdzenia 3 (punkt 4), dochodzimy do wniosku, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Zadanie 3. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n+2}$, **b)** $a_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n+2}$.

Przykład 4. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}$.

Zadanie to różni się od poprzedniego tylko współczynnikiem przy n^2 pod drugim pierwiastkiem. Gdybyśmy postąpili w tym przypadku tak samo jak poprzednio, okazałoby się, że zamienilibyśmy symbol nieoznaczony $[\infty - \infty]$ na symbol nieoznaczony $[0 \cdot \infty]$. Można to łatwo sprawdzić. Trzeba więc postąpić inaczej. Zauważamy, że przeszkodą w przekształceniu wyrazu a_n są pierwiastki (pierwiastek sumy/różnicy **nie** jest równy sumie/różnicy pierwiastków, chyba że jedna z liczb jest równa zero). Mamy wyrażenie postaci $a - b$, przydałoby się mieć $a^2 - b^2$, prawda? Rozwiązałoby to problem z pierwiastkami. Jak spojrzymy na a^2-b^2, to przypomina nam się jeden ze wzorów skróconego mnożenia: $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$. Wystarczy więc wyraz a_n pomnożyć i podzielić przez sumę pierwiastków:

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{n^2+3n-(n^2+1)}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+1}} = \frac{3n-1}{\sqrt{n^2+3n} + \sqrt{n^2+1}}.$$

Zwracamy uwagę na to, że w przedostatnim ilorazie wyrażenie $n^2 + 1$ znalazło się w nawiasie. W tym miejscu często popełniane są błędy.

Pozbyliśmy się już różnicy pierwiastków, a więc symbolu nieoznaczonego $[\infty-\infty]$, ale to jeszcze nie koniec problemów, nadal mamy symbol nieoznaczony. Jednak tym razem jest to $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, a takie symbole już się pojawiały wcześniej, wiemy więc, jak sobie z nimi radzić. Będziemy w liczniku i w mianowniku wyłączać przed nawias wyrażenia, które najszybciej dążą do $+\infty$. Otrzymamy:

$$a_n = \frac{n\left(3-\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}.$$

Warto ponownie zwrócić uwagę, że w wyniku tych przekształceń nie zniknął nam automatycznie symbol nieoznaczony. Jednak teraz jest on spowodowany przez możliwie najprostsze wyrażenia $\frac{n}{n}$, możemy więc je skrócić:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{3-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}.$$

Granice ciągów z przykładu 3 i z zadania 3 a) można było policzyć, stosując takie same przekształcenia jak w powyższej granicy, ale nikt nie ma chyba wątpliwości, że sposób z wyłączeniem przed nawias n w najwyższej potędze był zdecydowanie lepszy. Warto więc przyjrzeć się ciągom z poprzedniego przykładu i zadania dokładniej i zastanowić się, dlaczego w ostatniej granicy ten „lepszy" sposób zawiódł. Zauważmy, że w przeciwieństwie do wcześniejszych ciągów, w przypadku ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{n^2+3n} - \sqrt{n^2+1}$ mamy różnicę pierwiastków tego samego stopnia, taka sama jest najwyższa potęga n i ten sam współczynnik przy najwyższej potędze n. To właśnie dlatego, po wyłączeniu n przed nawias, wyrażenie w nawiasie dążyło do zera.

Zadanie 4. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n = \sqrt{n^2-2n+2} - \sqrt{n^2+4n}$, **b)** $a_n = \dfrac{\sqrt{n^4+n^2-1}-n^2}{n}$.

Przykład 5. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \dfrac{3^{2n+1}-9^n-4^{n+1}}{2^{2n}+(-3)^n-2}$.

Tym razem ciąg jest skonstruowany z ciągów geometrycznych, należy więc pomyśleć o granicy G3 z uwagi 1. W celu policzenia granicy musimy przekształcić wyraz a_n tak, żeby pojawiły się tylko wyrażenia postaci a^n. Musimy więc przypomnieć sobie własności potęgowania dla potęg naturalnych:

$$\text{jeżeli } m,\, n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}, \text{ to } a^{m+n} = a^m \cdot a^n,\ a^{mn} = (a^m)^n.$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$a_n = \frac{3\cdot 3^{2n}-9^n-4\cdot 4^n}{2^{2n}+(-3)^n-2} = \frac{3\cdot 9^n-9^n-4\cdot 4^n}{4^n+(-3)^n-2} = \frac{2\cdot 9^n-4\cdot 4^n}{4^n+(-3)^n-2}.$$

W liczniku mamy symbol nieoznaczony $[\infty-\infty]$. W pierwszym przykładzie też mieliśmy taki symbol. Sytuacja jest podobna, mimo że teraz pojawiły się wyrażenia a^n. Zrobimy więc takie samo przekształcenie, czyli wyłączymy przed nawias to wyrażenie, które najszybciej dąży do $+\infty$, tym razem będzie to 9^n. Granicy mianownika nie możemy jeszcze określić, ponieważ co prawda $4^n \to +\infty$, ale ciąg $\{(-3)^n\}$ nie ma granicy. Możemy jednak przekształcić mianownik podobnie jak licznik:

$$a_n = \frac{9^n\cdot\left(2-4\cdot\frac{4^n}{9^n}\right)}{4^n\cdot\left(1+\frac{(-3)^n}{4^n}-\frac{2}{4^n}\right)} = \frac{9^n}{4^n}\cdot\frac{2-4\cdot\frac{4^n}{9^n}}{1+\frac{(-3)^n}{4^n}-\frac{2}{4^n}}.$$

Spójrzmy, co otrzymaliśmy. W dwóch miejscach pojawiły się symbole nieoznaczone $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, oprócz tego wyrażenie $\frac{(-3)^n}{4^n}$, którego granicy nadal nie możemy od razu określić oraz wyrażenie $\frac{2}{4^n}$, które (na podstawie G3 i twierdzenia 3) dąży do zera. Nie możemy tutaj nic skrócić (tak jak w poprzednich przykładach), ale możemy kolejny raz skorzystać z własności potęgowania: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$ dla $b \neq 0$. Mamy więc

$$a_n = \left(\frac{9}{4}\right)^n \cdot \frac{2-4\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^n-2\left(\frac{1}{4}\right)^n}.$$

Na podstawie G3 stwierdzamy, że:

* $\left(\frac{9}{4}\right)^n \to +\infty$, ponieważ $\frac{9}{4} > 1$,
* $\left(\frac{4}{9}\right)^n \to 0$, ponieważ $|\frac{4}{9}| < 1$,
* $\left(-\frac{3}{4}\right)^n \to 0$, ponieważ $|-\frac{3}{4}| < 1$,
* $\left(\frac{1}{4}\right)^n \to 0$, ponieważ $|\frac{1}{4}| < 1$.

Otrzymaliśmy więc iloczyn dwóch ciągów, pierwszy jest rozbieżny do $+\infty$, drugi zbieżny do liczby dodatniej 2. Z twierdzenia 3 (punkt 4) wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Zadanie 5. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n = \dfrac{5^n + (-2)^n}{5^n + 2}$, **b)** $a_n = \dfrac{4^n + (\sqrt{3})^{2n+4}}{2^{2n-1} + 5}$.

Przykład 6. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(\dfrac{n+2}{n+3}\right)^{-4n}$.

Łatwo zauważyć, że ciąg $\{\frac{n+2}{n+3}\}$ dąży do 1. Mamy więc symbol nieoznaczony $[1^\infty]$. Domyślamy się, że trzeba będzie zastosowac twierdzenie 4. Rozpoczynamy od przekształcenia wyrazu ogólnego naszego ciągu tak, żeby pojawiło się wyrażenie postaci $(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$, gdzie $\alpha_n \to 0$.

Najpierw musimy zadbać o to, żeby w nawiasie otrzymać sumę $1+\alpha_n$. Możemy to zrobić na kilka sposobów. Zaczniemy od najogólniejszego, czyli dodamy do wyrażenia w nawiasie liczbę 1 i równocześnie odejmiemy ją:

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{-4n} = \left(1 + \frac{n+2}{n+3} - 1\right)^{-4n} = \left(1 + \frac{n+2-(n+3)}{n+3}\right)^{-4n} = \left(1 + \frac{-1}{n+3}\right)^{-4n}.$$

Zatem nasze $\alpha_n = \frac{-1}{n+3}$ i, jak łatwo zauważyć, $\alpha_n \to 0$.

Teraz zajmujemy się wykładnikiem, w którym powinno pojawić się $\frac{1}{\alpha_n}$, czyli $\frac{n+3}{-1}$.

$$a_n = \left(1 + \frac{-1}{n+3}\right)^{-4n} = \left(1 + \frac{-1}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-1}\cdot\frac{-1}{n+3}\cdot(-4n)}.$$

Mamy już właściwie to, o co nam chodziło, tzn. $(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}$, ale w wykładniku „coś” nadbywa. Gdybyśmy przejrzeli wszystkie twierdzenia dotyczące liczenia granic, doszlibyśmy do wniosku, że trzeba będzie zastosować wniosek 2. Musimy więc wyraz ogólny a_n przedstawić w postaci $(c_n)^{d_n}$.

U nas $c_n = \left(1 + \frac{-1}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-1}} \to e$. Skorzystamy z jednej z reguł potęgowania, z której już korzystaliśmy, mianowicie: $a^{bc} = \left(a^b\right)^c$. Mamy więc

$$a_n = \left(1 + \frac{-1}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-1}\cdot\frac{-1}{n+3}\cdot(-4n)} = \left[\left(1 + \frac{-1}{n+3}\right)^{\frac{n+3}{-1}}\right]^{\frac{-1}{n+3}\cdot(-4n)} = (c_n)^{d_n}.$$

Wiemy, że $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = e$, a $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4n}{n+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{1+\frac{3}{n}} = 4$, a więc

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^4.$$

Zauważmy, że istnieją też inne sposoby otrzymania postaci $1+\alpha_n$. Można na przykład przedstawić licznik w postaci mianownik plus „coś”:

$$\frac{n+2}{n+3} = \frac{(n+3)-1}{n+3} = 1 + \frac{-1}{n+3}.$$

Można też w wyrażeniu $\frac{n+2}{n+3}$ podzielić i licznik, i mianownik przez n:

$$\left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{-4n} = \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}\right)^{-4n}$$

Po zastosowaniu odpowiedniej reguły potęgowania (czyli $\left(\frac{a}{b}\right)^c = \frac{a^c}{b^c}$) mamy do policzenia granice dwóch ciągów, a nie jednego, ale za to są to granice, w tym wypadku, prostsze:

$$a_n = \left(\frac{n+2}{n+3}\right)^{-4n} = \left(\frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^{4n} = \frac{(1+\frac{3}{n})^{4n}}{(1+\frac{2}{n})^{4n}} = \frac{[(1+\frac{3}{n})^{\frac{n}{3}}]^{12}}{[(1+\frac{2}{n})^{\frac{n}{2}}]^{8}}.$$

Zatem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{e^{12}}{e^8} = e^4$.

Zadanie 6. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{1+5n}$, **b)** $a_n = \left(\frac{n^2+5}{n^2+n}\right)^{2n}$.

Przykład 7. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \frac{\sqrt{n}\cdot\sin\sqrt{n}}{n+1}$.

Sprawdzamy, czy mamy do czynienia z symbolem nieoznaczonym. W liczniku $\sqrt{n} \to +\infty$, ale ciąg $\{\sin\sqrt{n}\}$ nie ma granicy. Spróbujmy zapisać a_n w innej postaci:

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}\cdot\sin\sqrt{n}$$

Obliczmy granicę pierwszego z ciągów:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}(1+\frac{1}{n})} = 0.$$

Teraz już widać, że mamy iloczyn dwóch ciągów, pierwszy jest zbieżny do 0, a drugi ograniczony (ponieważ $-1 \leqslant \sin\sqrt{n} \leqslant 1$ dla każdego $n\in\mathbb{N}$), a więc z wniosku 1 wynika, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zadanie 7. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n = \dfrac{\sin n}{n}$, **b)** $a_n = \dfrac{\sqrt[n]{n}}{2^n+1}\sin n^2$.

Przykład 8. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt[n]{\cos n + 3^n + 8^n}$.

Ciąg $\{\cos n\}$ nie ma granicy, ale jest ciągiem ograniczonym, a więc ponieważ $3^n + 8^n \to +\infty$, również $\cos n + 3^n + 8^n \to +\infty$. Wyraz ogólny ciągu możemy zapisać jako $a_n = (\cos n + 3^n + 8^n)^{\frac{1}{n}}$. Widać zatem, że mamy symbol nieoznaczony $[\infty^0]$ i nie bardzo wiadomo, jak przekształcić a_n. Pomyślmy więc o twierdzeniu o trzech ciągach (twierdzenie 2). Może uda się uniknąć obliczania granicy ciągu $\{a_n\}$? Będziemy za to musieli znaleźć dwa ciągi: jeden o wyrazach większych, drugi o wyrazach mniejszych od wyrazów ciągu $\{a_n\}$, oba zbieżne do tej samej granicy. Jeżeli zauważymy, że problemem jest to, że mamy pierwiastek sumy, szukając wyrazu większego od a_n, możemy starać się, żeby zamiast sumy pojawił się pod pierwiastkiem iloczyn (jeśli a i b są dodatnie, to $\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$, ale $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$). Musimy jednak pamiętać, że potem będziemy szukać ciągu o wyrazach mniejszych, zbieżnego do tej samej granicy, więc nie możemy przesadzać z szacowaniem. Spośród trzech wyrażeń pod pierwiastkiem największe to 8^n. Jeżeli pozostałe dwa składniki zastąpimy tym największym, to suma wzrośnie, prawda? Mamy:

$$\cos n + 3^n + 8^n \leq 8^n + 8^n + 8^n = 3 \cdot 8^n.$$

Nie tylko znaleźliśmy wyraz większy od a_n, ale dodatkowo pojawił się iloczyn. Przy pierwiastkowaniu nierówność się zachowa i mamy

$$a_n \leq \sqrt[n]{3 \cdot 8^n} = \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{8^n} = 8\sqrt[n]{3}.$$

Ciągiem $\{c_n\}$ z twierdzenia 2 jest ciąg o wyrazie ogólnym $c_n = 8\sqrt[n]{3}$. Najpierw obliczymy jego granicę, a potem będziemy szukać ciągu o wyrazach mniejszych, zbieżnego do tej samej granicy. Wiemy, że $\sqrt[n]{3} \to 1$ (G5), zatem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} 8\sqrt[n]{3} = 8$.
Teraz szukamy takiego ciągu $\{b_n\}$, żeby spełniona była nierówność $b_n \leq \sqrt[n]{\cos n + 3^n + 8^n}$. Mamy tu wiele możliwości. Za b_n można wstawić np. liczbę 0 albo $\sqrt[n]{3^n}$, albo $\sqrt[n]{8^n}$. Możliwości jest dużo, ale my musimy pamiętać, że aby skorzystać z twierdzenia o trzech ciągach, ciąg $\{b_n\}$ musi być zbieżny do 8. Wybór pada więc na $\sqrt[n]{8^n}$. Spełnione są teraz założenia twierdzenia o trzech ciągach:

$$8 \leq a_n \leq 8\sqrt[n]{3} \quad (\text{dla } n > 1)$$

oraz

$$\lim_{n\to\infty} 8 = \lim_{n\to\infty} 8\sqrt[n]{3} = 8.$$

Możemy więc wyciągnąć wniosek, że również $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 8$.

Zadanie 8. Policz teraz samodzielnie granicę ciągu o wyrazie ogólnym a_n, jeżeli

a) $a_n = \sqrt[n]{\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + \left(\dfrac{1}{4}\right)^n + \left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$, **b)** $a_n = \sqrt[n]{\sin(n!) + 2 + n}$.

Przykład 9. Obliczymy granicę ciągu o wyrazie ogólnym $a_n = \left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^n$.

Ciąg $\{a_n\}$ przypomina ciągi z przykładu 6 i zadania 6. Sprawdźmy, czy teraz też mamy symbol nieoznaczony $[1^\infty]$. Łatwo stwierdzić, że nie. Co prawda wykładnik dąży do $+\infty$, ale podstawa dąży do $\frac{1}{2}$. Mamy ciąg postaci $\{(\alpha_n)^{\beta_n}\}$, gdzie $\alpha_n \to \frac{1}{2} > 0$ i może moglibyśmy skorzystać z wniosku 2, ale jest jeden problem: otóż ciąg o wyrazie ogólnym $\beta_n = n$ nie jest zbieżny. Musimy sobie inaczej poradzić. Zauważamy, że bez problemu policzylibyśmy granicę ciągu, gdyby w mianowniku przy n nie było dwójki. Skoro dwójka nam przeszkadza, to wyłączmy ją przed nawias i zobaczmy, co dalej:

$$a_n = \left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^n = \left(\frac{n+5}{2(n+\frac{1}{2})}\right)^n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{n+5}{n+\frac{1}{2}}\right)^n.$$

Otrzymaliśmy iloczyn dwóch ciągów, pierwszy jest zbieżny do zera, granicę drugiego można bez problemu policzyć. My jednak proponujemy ciekawsze podejście do tego zadania. Przyjrzyjmy się dokładniej, co oznacza fakt, że $\frac{n+5}{2n+1} \to \frac{1}{2}$. Mianowicie to, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba naturalna N taka, że dla wszystkich naturalnych $n > N$ zachodzi nierówność $|\frac{n+5}{2n+1} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$. Wykorzystamy teraz jedną z własności modułu: $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b$. Otrzymujemy więc:

$$\left|\frac{n+5}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < \frac{n+5}{2n+1} - \frac{1}{2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \varepsilon < \frac{n+5}{2n+1} < \varepsilon + \frac{1}{2}.$$

Wybierzmy sobie takie ε, żeby po lewej stronie nierówności była liczba dodatnia, a po prawej mniejsza od 1. Na przykład niech $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Dla tak wybranego ε istnieje N naturalne takie, że dla wszystkich $n > N$ zachodzi podwójna nierówność:

$$\frac{1}{4} < \frac{n+5}{2n+1} < \frac{3}{4}.$$

Pojawiła się podwójna nierówność, a więc czas pomyśleć o twierdzeniu o trzech ciągach. Mamy dalej:

$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < \left(\frac{n+5}{2n+1}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

oraz $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$. W takim razie możemy, na podstawie twierdzenia o trzech ciągach, wywnioskować, że $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Zauważmy jeszcze, że nierówność $\frac{1}{4} < \frac{n+5}{2n+1} < \frac{3}{4}$ można otrzymać w inny sposób, nie odwołując się do definicji granicy (warto jednak pamiętać o tym, że granice są źródłem nierówności). Zauważmy, że w ułamku $\frac{n+5}{2n+1}$ i licznik, i mianownik są dodatnie. Zatem ułamek wzrośnie, jeżeli zwiększymy licznik lub zmniejszymy mianownik, a więc dla dostatecznie dużych n (a dokładniej dla $n > 10$) zachodzi nierówność:

$$\frac{n+5}{2n+1} < \frac{n+\frac{n}{2}}{2n+1} < \frac{n+\frac{n}{2}}{2n} = \frac{3}{4}.$$

Natomiast ułamek zmaleje, jeżeli zmniejszymy licznik lub zwiększymy mianownik:

$$\frac{n+5}{2n+1} > \frac{n}{2n+1} > \frac{n}{2n+2n} = \frac{1}{4}.$$

Pamiętajmy jednak, że przy takim szacowaniu trzeba bardzo uważać. Gdybyśmy nie zwracali uwagi na znaki licznika i mianownika, moglibyśmy popełnić błąd. Rozważmy następujący przykład: oszacujemy z góry ułamek $\frac{-1}{-2}$. Mogłoby się wydawać, że jeżeli licznik (-1) zastąpimy liczbą większą (0), to ułamek wzrośnie. Spójrzmy, czy faktycznie tak będzie

$$\frac{-1}{-2} < \frac{0}{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < 0.$$

Błąd, prawda?

Zadanie 9. Oblicz granicę ciągu $\{a_n\}$, jeżeli

a) $a_n = \frac{(1+2+\ldots+n)^3}{(n+2)^5}$,

b) $a_n = \frac{\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n-1}}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}}$,

c) $a_n = (\sqrt{n^2+1}-n)(n-\sqrt{2n^2-1})$,

d) $a_n = \sqrt[3]{n^3-n^2}-n$,

e) $a_n = \sqrt[4]{n^2+1}-\sqrt[4]{n^2+2}$,

f) $\frac{5^n-2^{2n+3}-3^n}{2^{3n}-3^{n-1}}$,

g) $a_n = \left(\frac{n^2+3}{n^2+n+1}\right)^{2n+1}$,

h) $a_n = \sqrt[n]{\left(\frac{n^2+3n}{n^2+1}\right)^{3n^2}}$,

i) $a_n = \frac{7^n}{(-2)^n+2^{3n+1}} \cdot \sin(n!)$,

j) $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+\sqrt{2}} + \frac{1}{n+\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n+\sqrt{n}}$.

Odpowiedzi

Symbole nieoznaczone

a) $[\infty-\infty]$ 3, **b)** $[\infty^0]$ 2, **c)** $[\infty-\infty]$ $-\infty$, **d)** $[\infty^0]$ 1,

e) $\left[\frac{0}{0}\right]$ 2, **f)** $[1^\infty]$ $+\infty$, **g)** $[0\cdot\infty]$ 1, **h)** $\left[\frac{0}{0}\right]$ $+\infty$,

i) $\left[\frac{0}{0}\right]$ 0, **j)** $[0\cdot\infty]$ 2, **k)** $[0^0]$ $\frac{1}{2}$, **l)** $[1^\infty]$ e.

Zadanie 1.

a) $+\infty$,
b) $-\infty$.

Zadanie 2.

a) $+\infty$,
b) $-\frac{1}{2}$.

Zadanie 3.

a) $+\infty$,
b) $-\infty$.

Zadanie 4.

a) -3,
b) 0.

Zadanie 5.

a) 1,
b) 2.

Zadanie 6.

a) e^{10},
b) $\frac{1}{e^2}$.

Zadanie 7.

a) 0,
b) 0.

Zadanie 8.

a) $\frac{3}{4}$,
b) 1.

Zadanie 9.

a) $+\infty$, **b)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$, **c)** $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$, **d)** $-\frac{1}{3}$, **e)** 0,

f) 0, **g)** $\frac{1}{e^2}$, **h)** e^9, **i)** 0, **j)** 1.

Wskazówki do zadania 9:

d) zastosuj wzór $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$,

e) dwukrotnie zastosuj wzór na różnicę kwadratów,

h) zapisz inaczej wyraz ogólny ciągu (użyj potęgi zamiast pierwiastka),

j) zastosuj twierdzenie o trzech ciągach; szacując wyraz ogólny z góry (z dołu), zastąp każdy z wyrazów przez wyraz największy (najmniejszy).

Literatura

1. W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza Matematyczna w zadaniach , cz. I*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1975, s. 29–42.
2. E. Łobos, B. Sikora, *Calculus and Differential Equations in Exercises*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2006, pp. 17–20.
3. R. Rudnicki, *Wykłady z analizy matematycznej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 2001, s. 52–69.
4. B. Sikora, E. Łobos, *A First Course in Calculus*, Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice 2007, pp. 87–111.