

Tadeusz MARKOWSKI<sup>1</sup>, Michał BATSCH<sup>2</sup>

## ANALITYCZNO-NUMERYCZNE METODY WYZNACZANIA OBSZARU STYKU PRZEKŁADNI WKŁĘŚŁO-WYPUKŁYCH NOWIKOWA

**Streszczenie.** Artykuł przedstawia analityczno-numeryczne metody wyznaczania obszaru styku przekładni wkłęsło-wypukłych Nowikowa. Zaprezentowano dwie metody zaliczane do grupy metod TCA (tooth contact analysis), które bazują na wykorzystaniu równań geometrii różniczkowej. Różnice pomiędzy metodami objawiają się w sposobie pomiaru odległości pomiędzy współpracującymi bokami zębów. W artykule omówiono algorytmy wyznaczania śladu styku oraz przedstawiono przykładowe wyniki ich działań. Ponadto, dokonano porównania obydwu metod pod kątem zastosowania ich do analizy przekładni zębatych Nowikowa.

**Słowa kluczowe:** przekładnia Nowikowa, ślad styku, analiza styku zębów

## ANALYTICAL AND NUMERICAL METHODS TO OBTAIN CONTACT PATTERN OF CONVEXO-CONCAVE NOVIKOV GEARING

**Summary.** Article presents analytical and numerical methods to obtain contact pattern of convexo-concave Novikov gearing. Two TCA (tooth contact analysis) methods were given which are based on equations of differential geometry. Difference between both of methods reveals in measurement of gap between the working teeth. Algorithms with their example results for presented methods were given. Moreover comparative analysis for application both of methods in Novikov gearing analysis were given.

**Keywords:** Novikov gearing, contact pattern, tooth contact analysis

### 1. WPROWADZENIE

Prace prowadzone nad uzębieniami przekładni zębatych mają na celu zwiększenie ich wydolności. Dotyczy to wszystkich odmian zarysu zębów. O nośności pary zębatej decyduje głównie obszar współpracy par zębów będących w przyporze. Niniejsze opracowanie dotyczy sposobu identyfikacji parametrów kontaktu w przekładni wkłęsło-wypukłej Nowikowa z jedną linią styku. Przykładowy zarys odniesienia dla takiego zazębienia pokazano na rys. 2.1.

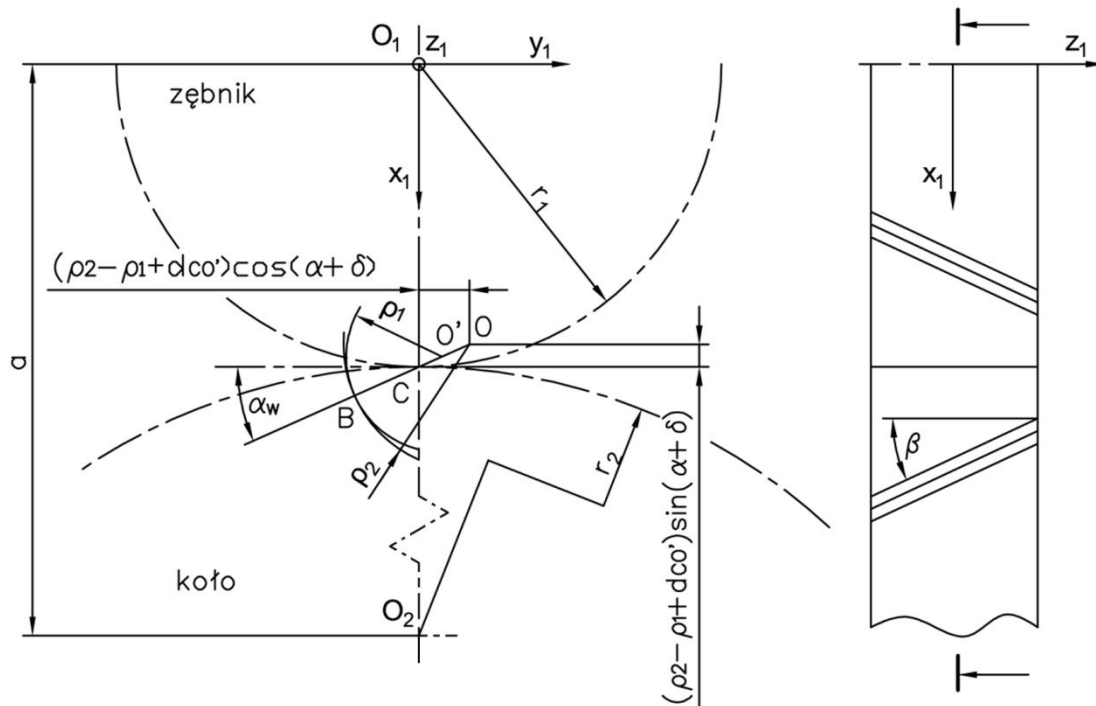
---

<sup>1</sup> Faculty of Mechanical Engineering and Aeronautics, Rzeszów University of Technology, Rzeszów, Poland.

<sup>2</sup> Faculty of Mechanical Engineering and Aeronautics, Rzeszów University of Technology, Rzeszów, Poland.

## 2. ANALIZA TCA (ODLEGŁOŚĆ MIERZONA WZDŁUŻ WERSORA NORMALNEGO)

Proponowana metoda analizy styku zębów jest modyfikacją metody TCA dla zarysów ewolwentowych przedstawionej w monografii [4]. Metoda ta pozwala na wyznaczenie pola styku zębów zarówno dla przekładni bezodchyłkowych, jak i przekładni rzeczywistych. Polega na wyznaczeniu parametrycznych równań powierzchni bocznych współpracujących zębów, a następnie obliczeniu odległości pomiędzy nimi. Odległości odpowiadające grubości znacznika w metodzie tuszowania zestawia się na wykresie, otrzymując tym samym ślad styku przekładni.



Rys. 2.1. Przekrój czołowy przekładni Nowikowa, gdzie:  $\alpha_w$  – kąt przyporu,  $r_1$  – promień podziałowy zębniaka,  $r_2$  – promień podziałowy koła,  $\rho_1$  – promień zarysu zęba wypukłego,  $\rho_2$  – promień zarysu zęba wklęsłego,  $a$  – odległość osi kół,  $d_{CO'}$  – odległość pomiędzy centralnym punktem zazębienia  $C$  a środkiem zarysu zęba wypukłego  $O'$ ,  $\beta$  – kąt pochylenia linii zęba na średnicy podziałowej

Fig. 2.1. A front cross-section of Novikov gearing, where:  $\alpha_w$  – pressure angle,  $r_1$  – pitch radius of pinion,  $r_2$  – pitch radius of wheel,  $\rho_1$  – radius of convex teeth profile,  $\rho_2$  – radius of concave teeth profile,  $a$  – distance between wheels' axes,  $d_{CO'}$  – distance between central meshing point  $C$  and centre of convex teeth profile  $O'$ ,  $\beta$  – inclination angle of teeth line on pitch diameter

Rysunek 2.1 przedstawia przekrój czołowy współpracujących kół przekładni Nowikowa. Zębniak o zębach wypukłych i promieniu podziałowym  $r_1$  współpracuje z kołem o zębach wklęsłych i promieniu podziałowym  $r_2$ . Punkt styczności zarysów zębów  $B$  określony jest przez kąt  $\alpha + \delta$ . Punkt  $O'$  jest środkiem zarysu zęba wypukłego o promieniu  $\rho_1$ , natomiast punkt  $O$  jest środkiem zarysu zęba wklęsłego o promieniu  $\rho_2$ . Punkt  $C$  jest centralnym punktem zazębienia, będącym punktem styku okręgów podziałowych.

## 2.1. Parametryczny zapis powierzchni zęba wypukłego

Powierzchnię boczną zęba wypukłego otrzymano przez translację punktów okręgu o promieniu  $\rho_1$  o wektor o współrzędnych będących współrzędnymi kolejnych punktów linii śrubowej o promieniu  $r_1$  i skoku  $H_1$ . Ponadto, zębnik obraca się wokół osi  $z_1$  o kąt  $\varphi$ . Macierzowy zapis tego przekształcenia przedstawia zależność (2.1):

$$\begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ r_{z1} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & r_1 \cos \varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 & r_1 \sin \varphi_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{H_1}{2\pi} \varphi_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_1 \cos \theta_1 - d_{CO'} \sin \alpha_w \\ \rho_1 \sin \theta_1 + d_{CO'} \cos \alpha_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \cos(\varphi + \theta_1) + r_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - d_{CO'} \sin(\alpha_w + \varphi) \\ \rho_1 \sin(\varphi + \theta_1) + r_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + d_{CO'} \cos(\alpha_w + \varphi) \\ \frac{H_1}{2\pi} \varphi_1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

gdzie:

$\varphi_1$  – parametr linii śrubowej,

$\theta_1$  – parametr okręgu,

$\varphi$  – kąt obrotu koła 1.

Skok linii śrubowej określony jest zależnością (2.2):

$$H_1 = \frac{\pi d_1}{tg \beta} \quad (2.2)$$

gdzie  $\beta$  to kąt pochylenia linii zęba na walcu podziałowym.

Ostatecznie, wykorzystując zależności (2.1) oraz (2.2), wektor wodzący powierzchni bocznej zęba wyraża się wzorem (2.3):

$$\vec{r}_{w1} = \begin{bmatrix} r_{x1} \\ r_{y1} \\ r_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_1 \cos(\varphi + \theta_1) + r_1 \cos(\varphi + \varphi_1) - d_{CO'} \sin(\alpha_w + \varphi) \\ \rho_1 \sin(\varphi + \theta_1) + r_1 \sin(\varphi + \varphi_1) + d_{CO'} \cos(\alpha_w + \varphi) \\ \varphi_1 r_1 \text{ctg} \beta \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

## 2.2. Parametryczny zapis powierzchni zęba wklęsłego

Powierzchnię boczną zęba wklęsłego otrzymano w sposób analogiczny do zęba wypukłego, z tą różnicą, że linia śrubowa ma kierunek przeciwny. Jej oś znajduje się w odległości  $a = r_1 + r_2$  od osi  $z_1$ , a środek wyciąganego okręgu jest przesunięty o współrzędne będące rzutami odcinka  $CO$  na osie  $x_1$  i  $y_1$ . Ponadto, koło obraca się wokół osi prostopadłej do płaszczyzny przekroju przechodzącej przez punkt  $O_2$  o kąt  $\emptyset$ . Macierzowy zapis przekształcenia dany jest wzorem (2.4):

$$\begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \\ r_{z2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \emptyset & -\sin \emptyset & 0 & 0 \\ \sin \emptyset & \cos \emptyset & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -r_2 \cos \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 & -r_2 \sin \varphi_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{H_2}{2\pi} \varphi_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_2 \cos \theta_2 - (\rho_2 - \rho_1 + d_{CO'}) \sin \alpha_w \\ \rho_2 \sin \theta_2 + (\rho_2 - \rho_1 + d_{CO'}) \cos \alpha_w \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_2 \cos(\emptyset + \theta_2) - r_2 \cos(\emptyset + \varphi_2) - (\rho_2 - \rho_1 + d_{CO'}) \sin(\alpha_w + \emptyset) + a \\ \rho_2 \sin(\emptyset + \theta_2) - r_2 \sin(\emptyset + \varphi_2) + (\rho_2 - \rho_1 + d_{CO'}) \cos(\alpha_w + \emptyset) \\ -\frac{H_2}{2\pi} \varphi_2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

gdzie:

$\varphi_2$  – parametr linii śrubowej,

$\theta_2$  – parametr okręgu,

$\emptyset = -\varphi \frac{r_1}{r_2}$  – kąt obrotu koła 2,

$\varphi$  – kąt obrotu koła 1.

Skok linii śrubowej określony jest zależnością (2.5):

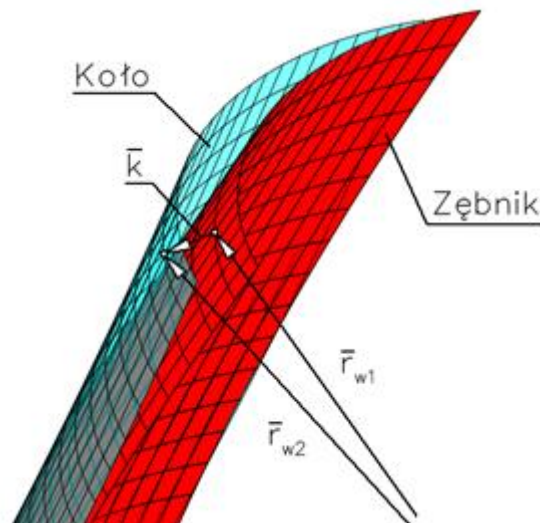
$$H_2 = \frac{\pi d_2}{\operatorname{tg} \beta} \quad (2.5)$$

Ostatecznie, wykorzystując zależności (2.4) oraz (2.5), wektor wodzący powierzchni bocznej zęba wyraża się wzorem (2.6):

$$\bar{r}_{w2} = \begin{bmatrix} r_{x2} \\ r_{y2} \\ r_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_2 \cos(\emptyset + \theta_2) - r_2 \cos(\emptyset + \varphi_2) - (\rho_2 - \rho_1 + d_{CO'}) \sin(\alpha_w + \emptyset) + a \\ \rho_2 \sin(\emptyset + \theta_2) - r_2 \sin(\emptyset + \varphi_2) + (\rho_2 - \rho_1 + d_{CO'}) \cos(\alpha_w + \emptyset) \\ -\varphi_2 r_2 \operatorname{ctg} \beta \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

### 2.3. Odległość pomiędzy współpracującymi bokami zębów

Rysunek 2.2 ilustruje sposób wyznaczenia odległości pomiędzy współpracującymi bokami zębów na podstawie wektorów wodzących oraz wektora odległości.



Rys. 2.2. Wyznaczanie odległości (wektora  $\bar{k}$ ) pomiędzy współpracującymi bokami zębów  
Fig. 2.2. Measurement of gap (of vector  $\bar{k}$ ) between the working teeth

Z powyższego rysunku wynika równanie wektorowe (2.7):

$$\bar{r}_{w1}(\theta_1, \varphi_1) + \bar{k}(\theta_1, \varphi_1) = \bar{r}_{w2}(\theta_2, \varphi_2), \quad (2.7)$$

gdzie  $\bar{k}$  – jest wektorem odległości określonym zależnością (2.8):

$$\bar{k} = k \bar{n}_1 \quad (2.8)$$

Wzór (2.8) jest iloczynem miary wektora długości  $k$  oraz wersora normalnego do powierzchni bocznej zębnika  $\bar{n}_1$ . Wersor normalny wyraża się wzorem (2.9):

$$\bar{n}_1 = \frac{\frac{\partial \bar{r}_{w1}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \bar{r}_{w1}}{\partial \varphi_1}}{\left| \frac{\partial \bar{r}_{w1}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \bar{r}_{w1}}{\partial \varphi_1} \right|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{H_1}{2\pi} \rho_1\right)^2 + \rho_1^2 r_1^2 \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{H_1}{2\pi} \rho_1 \cos(\theta_1 + \varphi) \\ \frac{H_1}{2\pi} \rho_1 \sin(\theta_1 + \varphi) \\ \rho_1 r_1 \sin(\varphi_1 - \theta_1) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Uwzględniając zależność (2.2) oraz przekształcając zależność (2.9), otrzymuje się prostszą w zapisie postać wektora normalnego (2.10):

$$\bar{n}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\operatorname{ctg} \beta \cos(\theta_1 + \varphi)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} \\ \frac{\operatorname{ctg} \beta \sin(\theta_1 + \varphi)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} \\ \frac{\sin(\varphi_1 - \theta_1)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Dla wyznaczenia miary odległości wektora  $\bar{k}$  przy zadanych parametrach  $\theta_1$  oraz  $\varphi_1$ , należy rozwiązać układ trzech równań z niewiadomymi  $k$ ,  $\theta_2$  oraz  $\varphi_2$  (2.11), określony równaniem wektorowym (2.7):

$$\begin{cases} \rho_1 \cos(\theta_1 + \varphi) + r_1 \cos(\varphi_1 + \varphi) + \frac{k \rho_1 \operatorname{ctg} \beta \cos(\theta_1 + \varphi)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} = \\ \quad = \rho_2 \cos(\theta_2 + \varphi) - r_2 \cos(\varphi_2 + \varphi) - (\rho_2 - \rho_1 + d_{cor}) \sin(\alpha_w + \varphi) + a \\ \rho_1 \sin(\theta_1 + \varphi) + r_1 \sin(\varphi_1 + \varphi) + \frac{k \rho_1 \operatorname{ctg} \beta \sin(\theta_1 + \varphi)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} = \\ \quad = \rho_2 \sin(\theta_2 + \varphi) - r_2 \sin(\varphi_2 + \varphi) + (\rho_2 - \rho_1 + d_{cor}) \cos(\alpha_w + \varphi) \\ \varphi_1 r_1 \operatorname{ctg} \beta + \frac{k \sin(\varphi_1 - \theta_1)}{\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \beta + \sin^2(\varphi_1 - \theta_1)}} = -\varphi_2 r_2 \operatorname{ctg} \beta \end{cases} \quad (2.11)$$

Obszar styku kół otrzymuje się przez zestawienie na wykresie  $r_{M1}(b_{M1})$  punktów, dla których wartość  $k$  jest mniejsza od grubości znacznika w metodzie tuszowania. Wielkości  $r_{M1}$  oraz  $b_{M1}$  dane są wzorami (2.12):

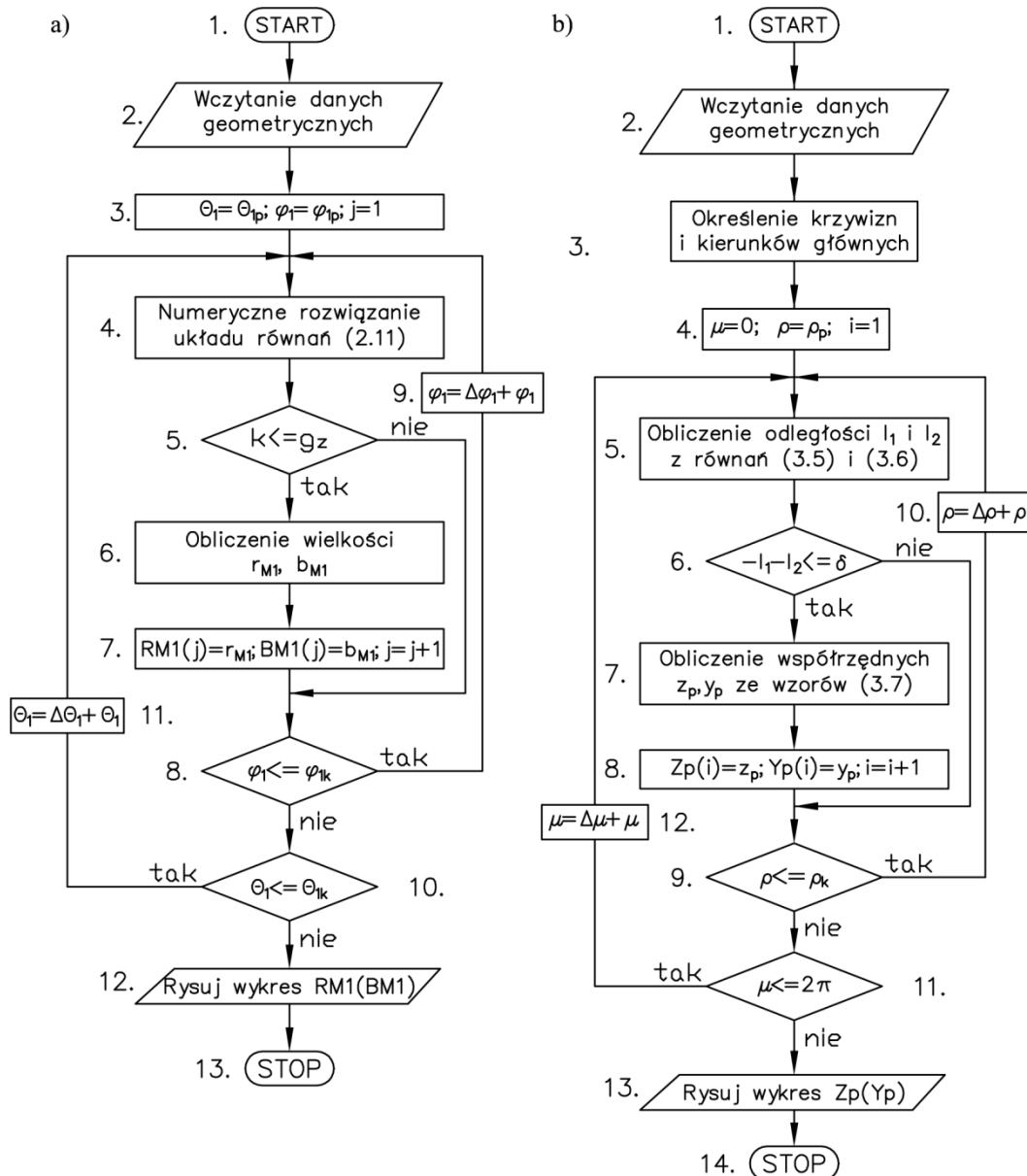
$$r_{M1} = \sqrt{r_{x1}^2 + r_{y1}^2}, \quad b_{M1} = r_{z1} \quad (2.12)$$

## 2.4. Algorytm wyznaczania pola styku zębów

Schemat blokowy algorytmu wyznaczania pola styku zębów przedstawiono na rys. 2.3a. Celem algorytmu jest odnalezienie zbioru rozwiązań układu równań (2.11) dla wszystkich wartości parametrów  $\theta_1$  oraz  $\varphi_1$  z zadanego przedziału, a następnie graficzne zestawienie wyników w postaci wykresu  $r_{M1}(b_{M1})$ .

Algorytm rozpoczyna się od wczytania niezbędnych danych geometrycznych kół analizowanej przekładni (blok 2). Kolejny blok odpowiada za wczytanie przyjętych wartości początkowych parametrów  $\theta_{1p}$  oraz  $\varphi_{1p}$ . Następnym etapem jest numeryczne rozwiązanie układu równań (2.11). Po jego rozwiązaniu miara długości wektora odległości  $k$  jest porównywana z przyjętą grubością znacznika  $g_z$ . Jeżeli jest ona od niego mniejsza, obliczane

zostają wielkości  $r_{M1}$  i  $b_{M1}$  przy wykorzystaniu zależności (2.12). Na tym etapie zostają również utworzone wektory RM1 oraz BM1, które posłużą do graficznego przedstawienia wyników. Jeżeli warunek 5 nie zostanie spełniony, program przejdzie bezpośrednio do kolejnego bloku (blok 8), z pominięciem bloków 6 i 7. Blok 8 odpowiada za sprawdzenie warunku pętli wewnętrznej. Jeżeli parametr  $\varphi_1$  jest mniejszy lub równy od wartości końcowej  $\varphi_{1k}$ , zostaje on zwiększony o przyjęty krok dyskretyzacji  $\Delta\varphi_1$  (blok 9), a program ponownie przeprowadza obliczenia, zaczynając od bloku 4. Jeżeli jednak warunek 8 nie jest spełniony, następuje sprawdzenie warunku pętli zewnętrznej. Po zakończeniu pracy w pętlach program zwraca wykres śladu styku przekładni.

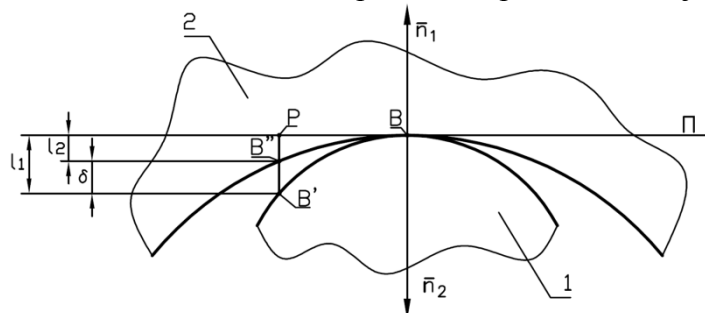


Rys. 2.3. Schematy blokowe algorytmów wyznaczania pola styku zębów przekładni Nowikowa: a) odległość mierzona wzdłuż normalnej do boku zęba, b) odległość mierzona wzdłuż normalnej do płaszczyzny stycznej

Fig. 2.3. Flowchart algorithms of measurement of tooth contact field in Novikov gearing: a) distance along the normal to teeth's side, b) distance along the normal to tangent plane

### 3. ANALIZA TCA (ODLEGŁOŚĆ MIERZONA PROSTOPADLE DO PŁASZCZYZNY STYCZNEJ)

Przedstawiona w niniejszym rozdziale metoda analizy styku zębów została opisana w pracach [2]. Różnica między opisami metody objawia się w sposobie pomiaru odległości pomiędzy współpracującymi bokami zębów. Rysunek 3.1 schematycznie przedstawia dowolny przekrój normalny współpracujących powierzchni bocznych zębów określonych parametrycznymi równaniami (2.3) oraz (2.6), przekładni przedstawionej na rys. 2.1.



Rys. 3.1. Dowolny przekrój normalny współpracujących powierzchni bocznych zębów  
Fig. 3.1. Any normal cross-section of the working teeth

Przez przekrój normalny rozumie się przekrój uzyskany przez przecięcie powierzchni zębów dowolną płaszczyzną przechodzącą przez wspólną normalną. Płaszczyzna Π jest płaszczyzną styczną do boków zębów będących w kontakcie w punkcie B. Wektory  $\bar{n}_1$  oraz  $\bar{n}_2$  są wersorami normalnymi do powierzchni bocznych zębów odpowiednio zębnika i koła. Wyrażone są one zależnościami (2.10) oraz (3.1):

$$\bar{n}_2 = \begin{bmatrix} -ctg\beta\cos(\theta_2 + \varphi) \\ \sqrt{ctg^2\beta + \sin^2(\theta_2 - \varphi_2)} \\ -ctg\beta\sin(\theta_2 + \varphi) \\ \sqrt{ctg^2\beta + \sin^2(\theta_2 - \varphi_2)} \\ \sin(\theta_2 - \varphi_2) \\ \sqrt{ctg^2\beta + \sin^2(\theta_2 - \varphi_2)} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Punkt P jest dowolnie obranym punktem leżącym na płaszczyźnie stycznej Π. Definiuje on jednoznacznie płaszczyznę przekroju normalnego. Punkty przecięcia osi prostopadłej do płaszczyzny stycznej Π, przechodzącej przez punkt P, z powierzchniami bocznymi zębów kół 1 i 2 oznaczono odpowiednio jako B' oraz B''. Punkty B' i B'' w wyniku deformacji zębów pokryją się [2]. Wielkości  $l_1 = |PB'|$ ,  $l_2 = |PB''|$  (rys. 3.1) są odległościami punktów B' i B'' od płaszczyzny stycznej. Odległości te mierzone od płaszczyzny stycznej do punktu są dodatnie, gdy kierunek pomiaru jest zgodny z kierunkiem odpowiedniego wersora normalnego.

#### 3.1. Odległość pomiędzy bokami zębów a płaszczyzną styczną

Odległość pomiędzy bokami zębów mierzona prostopadłe do płaszczyzny stycznej wyraża się wzorem (3.2):

$$-l_1 - l_2 = \delta, \quad (3.2)$$

gdzie  $\delta$  jest sumarycznym odkształceniem zębów.

W celu odnalezienia odległości pomiędzy powierzchniami bocznymi zębów należy wyznaczyć odległości pomiędzy nimi a płaszczyzną styczną  $\Pi$ . Odległość punktu  $P$  (będącego rzutem punktu  $B'$  na płaszczyznę  $\Pi$ ) od punktu  $B'$  wyraża się zależnością (3.3):

$$l_{1,2} = \frac{1}{2} \kappa_n \rho^2, \quad (3.3)$$

gdzie:  $\kappa_n$  – jest krzywizną normalną, a  $\rho = |\overline{BP}|$ .

Wyprowadzenie powyższej zależności, bazujące na rozwinięciu długości  $|\overline{BB}'|$  opisanej za pomocą długości łuku  $s$  w szereg Taylora oraz przyjęciu, że  $|\overline{BP}| \approx |\widehat{BB}'|$ , znajduje się w pracach [2]. Krzywizna normalna opisana jest zależnością Eulera (3.4) [1,2]:

$$\kappa_n = \kappa_I \cos^2 q + \kappa_{II} \sin^2 q, \quad (3.4)$$

gdzie

$\kappa_I, \kappa_{II}$  – główne krzywizny powierzchni w punkcie  $B$ ,

$q$  – kąt pomiędzy powierzchnią przekroju normalnego (określoną przez  $\rho = |\overline{BP}|$ ) a pierwszym kierunkiem głównym powierzchni.

Wykorzystując zależność (3.4) we wzorze (3.3), otrzymano odległości pomiędzy bokami zębów a płaszczyzną styczną (3.5) i (3.6):

$$l_1 = \frac{\rho^2}{2} (\kappa_I^{(1)} \cos^2 q_1 + \kappa_{II}^{(1)} \sin^2 q_1) \quad (3.5)$$

$$l_2 = \frac{\rho^2}{2} (\kappa_I^{(2)} \cos^2 q_2 + \kappa_{II}^{(2)} \sin^2 q_2), \quad (3.6)$$

gdzie:

$\kappa_I^{(1)}, \kappa_{II}^{(1)}$  – główne krzywizny powierzchni bocznej zęba wklęsłego w punkcie styku  $B$ ,

$\kappa_I^{(2)}, \kappa_{II}^{(2)}$  – główne krzywizny powierzchni bocznej zęba wypukłego w punkcie styku  $B$ ,

$q_1, q_2$  – kąty pomiędzy powierzchnią przekroju normalnego a pierwszym kierunkiem głównym powierzchni bocznych zębów odpowiednio koła 1 i 2.

Wyznaczenie kierunków głównych oraz głównych krzywizn powierzchni przedstawione zostało w monografii [2].

Rysunek 3.2 przedstawia układ współrzędnych na płaszczyźnie stycznej o początku w punkcie styku  $B$ , który zostanie wykorzystany do wyznaczenia śladu styku.

Współrzędne punktu  $P$  określone są zależnościami:

$$\begin{aligned} z_p &= \rho \cos \mu \\ y_p &= \rho \sin \mu \end{aligned} \quad (3.7)$$

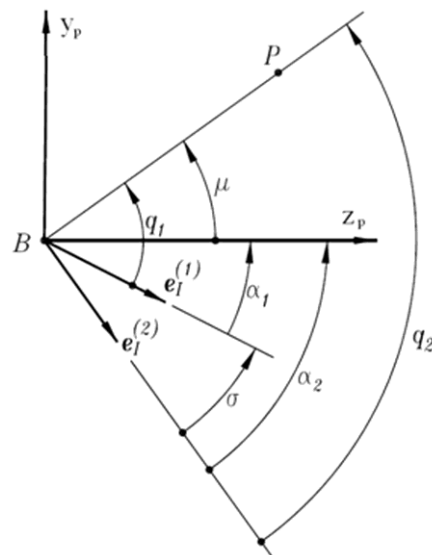
Ponadto, z rys. 3.2 wynikają związki:

$$\begin{aligned} q_1 &= \mu + \alpha_1 \\ q_2 &= \mu + \alpha_1 + \sigma, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie  $\sigma = \arccos \left( \frac{e_I^{(1)} e_I^{(2)}}{|e_I^{(1)}| |e_I^{(2)}|} \right)$ .

Układ współrzędnych  $y_p z_p$  może być przyjęty dowolnie. Jego orientację względem pierwszych kierunków głównych określają kąty  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . W przypadku przekładni Nowikowa, przedstawionej na rys. 2.1, dogodnie jest obrać go w ten sposób, że oś  $y_p$  leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez osie  $x_I$  i  $y_I$ .





Rys. 3.2. Orientacja kierunków głównych powierzchni bocznych zębów względem układu współrzędnych:  $e_I^{(1)}, e_I^{(2)}$  – pierwsze kierunki główne powierzchni bocznej zębów wklęsłego i wypukłego,  $\alpha_1, \alpha_2$  – kąty pomiędzy kierunkami głównymi a osią  $z_p$ ,  $\sigma$  – kąt pomiędzy pierwszymi kierunkami głównymi powierzchni bocznych zębów,  $\mu$  – kąt pomiędzy płaszczyzną przekroju normalnego (określoną przez  $\rho = |\overline{BP}|$ ) a osią  $z_p$  [2]

Fig. 3.2. Orientation of main directions of tooth sides to coordinate system:  $e_I^{(1)}, e_I^{(2)}$  – first main directions of convex and concave tooth sides  $\alpha_1, \alpha_2$  – angles between main directions and  $z_p$  axe,  $\sigma$  – angle between first main directions of tooth sides  $\mu$  – angle between normal cross section plane (determined by  $\rho = |\overline{BP}|$ ) and axe  $z_p$

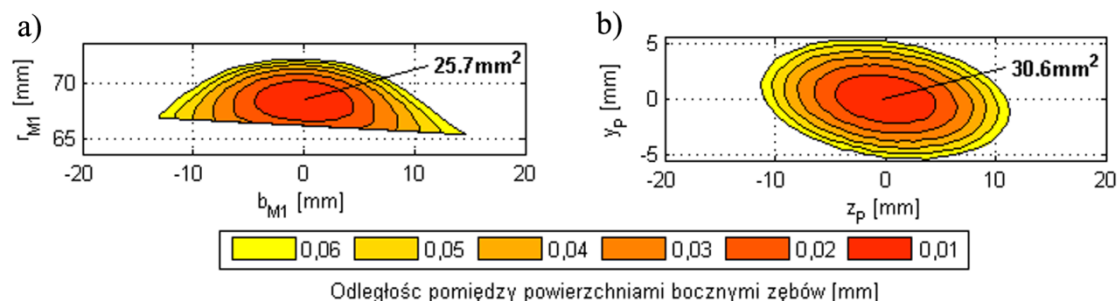
### 3.2. Algorytm wyznaczania pola styku zębów

Schemat blokowy algorytmu wyznaczania pola styku zębów przedstawiono na rys. 2.3b. Jego celem jest odnalezienie odległości pomiędzy powierzchniami bocznymi zębów dla wszystkich parametrów  $\rho$  oraz  $\mu$ , a następnie graficzne zestawienie wyników w postaci wykresu  $y_p(z_p)$ .

Algorytm rozpoczyna się od wczytania niezbędnych danych geometrycznych (blok 2). Następnie obliczane są krzywizny oraz kierunki główne powierzchni bocznych zębów. Kolejny blok (blok 4) odpowiada za wczytanie wartości początkowych parametrów  $\rho$  i  $\mu$  oraz licznika  $i$ . W bloku 5 przy wykorzystaniu zależności (3.5) oraz (3.6) zostają obliczone odległości  $l_1$  i  $l_2$ . Po obliczeniu odległości następuje porównanie ich różnicy z przyjętą wartością sumarycznej deformacji zębów (blok 6). Jeżeli jest ona od niej mniejsza, następuje obliczenie współrzędnych  $z_p$  i  $y_p$  z zależności (3.7) (blok 7). Zostają również utworzone wektory  $Z_p$  oraz  $Y_p$ , które posłużą do graficznego przedstawienia wyników. Jeżeli warunek 6 nie zostanie spełniony, program przejdzie bezpośrednio do kolejnego bloku (blok 9) z pominięciem bloków 7 i 8. Blok 9 odpowiada za sprawdzenie warunku pętli wewnętrznej. Jeżeli parametr  $\mu$  jest mniejszy lub równy od wartości końcowej  $2\pi$ , zostaje on zwiększony o przyjęty krok dyskretyzacji  $\Delta\mu$  (blok 10), a program ponownie przeprowadza obliczenia, zaczynając od bloku 5. Jeżeli jednak warunek 9 nie jest spełniony, następuje sprawdzenie warunku pętli zewnętrznej. Po zakończeniu pracy w pętlach program zwraca wykres śladu styku przekładni.

#### 4. WNIOSKI

Ślad styku wyznaczany metodami TCA dla przykładowej przekładni przedstawiono na rys. 4.1.



Rys. 4.1. Obrazy śladu styku przekładni Nowikowa wyznaczone metodami TCA: a) odległość mierzona wzdłuż normalnej do boku zęba, b) odległość mierzona wzdłuż normalnej do płaszczyzny stycznej

Fig. 4.1. The image of contact pattern of Novikov gearing obtained with TCA methods: a) distance along the normal to teeth's side, b) distance along the normal to tangent plane

W obydwu przypadkach kształt pola styku jest zbliżony do elipsy. W miarę zwiększania grubości znacznika obszar styku wyznaczony pierwszą z opisywanych metod zmienia swój kształt, który można opisać jako wynik przecięcia elipsy prostą równoległą do jej osi wielkiej. Kształt obszaru styku wyznaczany drugą metodą nadal pozostaje kształtem eliptycznym. Wynika to z faktu, że druga metoda nie uwzględnia geometrycznych warunków brzegowych narzuconych na parametry powierzchni. W tej metodzie powierzchnie są nieskończone, a jedynym ograniczeniem staje się promień  $\rho$  poszukiwania punktów, dla których odległość mierzona wzdłuż normalnej do płaszczyzny stycznej jest mniejsza lub równa od zadanej. Pierwsza metoda uwzględnia natomiast wspomniane geometryczne warunki brzegowe występujące w postaci początkowych i końcowych wartości parametrów  $\theta_1$  oraz  $\varphi_1$ .

Jak wynika z powyższego opisu, metoda analizy styku zębów, w której odległość pomiędzy bokami zębów mierzona jest wzdłuż wektora normalnego, może z powodzeniem być stosowana do analizy przekładni Nowikowa. Druga z opisywanych metod może być stosowana tylko wtedy, gdy istnieje pewność, że nie wystąpi krawędziowanie śladu styku. Ponadto, pierwsza metoda, z uwagi na przedstawienie śladu styku w układzie współrzędnych związanym z zębniem, pozwala na analizę ruchu śladu styku. W drugiej metodzie ślad styku przedstawiany jest zawsze w układzie współrzędnych o środku w bieżącym punkcie styku zębów. Co za tym idzie nie można przeprowadzić analizy przetaczania się śladu styku. Ponadto, metoda z rozdziału 2 może posłużyć do analizy styku przekładni rzeczywistej, dla której błędy rozstawienia i przekoszenia osi mogą być reprezentowane przez macierz obrotu i przesunięcia koła.

**Bibliografia**

1. Bronsztejn I.N., Siemiendajew K.A., Musiol G., Mühlig H.: Nowoczesne kompendium matematyki. PWN, Warszawa 2007.
2. Litvin F.L., Fuentes A.: Gear Geometry and Applied Theory. Cambridge University Press, 2004.
3. Nowikow M.L.: ZSRR Pat. Nr 109113.
4. Wiktor J.: Analityczno-numeryczne metody analizy parametrów geometrycznych, zakłóceń ruchu i wytrzymałości przekładni walcowych. Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2004.